Olimpíada Internacional de Matemática
"Fórmula da Unidade" / "O Terceiro Milênio"
Ano 2026/2027. Fase de qualificação.

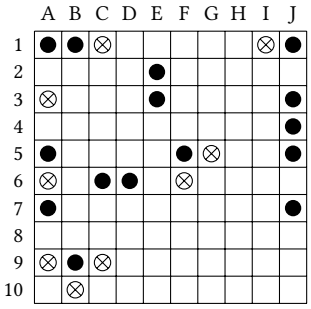
Problemas para nível R5

Por favor, entregue sua prova em formato eletrônico (ex: como um arquivo de texto ou uma digitalização/escaneamento), até as **23:59:59 UTC de 5 de novembro de 2026**. Mais detalhes estão na página formulo.org/en/olymp/2026-math-en/.

Por favor, resolva as questões individualmente. É proibido usar calculadoras, ferramentas de programação e redes neurais. Lembre-se que a maioria dos problemas exige, além de uma resposta, a sua demonstração completa. A prova não deve conter seus dados pessoais, portanto, **por favor, não assine sua prova**.

---

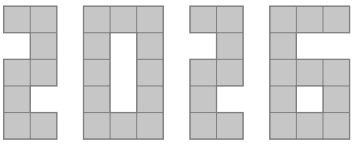
1. Artur está jogando batalha naval com um amigo. Neste jogo, um jogador posiciona 10 navios (quatro 1×1, três 1×2, dois 1×3 e um 1×4) em um tabuleiro 10×10 de modo que os navios não se toquem, nem mesmo pelos vértices, e o outro jogador indica casas, uma por vez, para afundar esses navios. Artur já fez algumas jogadas (veja a figura: ● — acerto em um navio, ⊗ — erro). Quantas configurações válidas dos navios existem? (*P. Mulenko*)



2. Uma máquina recebe como entrada um número natural maior que 10 e encontra a soma dos quadrados de todos os seus algarismos. Em seguida, se o número obtido tiver pelo menos 2 algarismos, a máquina encontra a soma dos quadrados de seus algarismos e repete essas operações até obter um número de um algarismo, que ela retorna como resultado (por exemplo, 24 se transformará em $2^2 + 4^2 = 20$, que se transformará em $2^2 + 0^2 = 4$, e a máquina retornará 4). Existe um número formado apenas por algarismos pares para o qual a máquina retorna um número ímpar de um algarismo? (*M. Karlukova*)

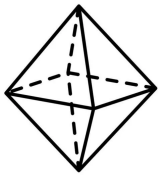
3. Em um país onde vivem apenas cavaleiros, que sempre dizem a verdade, e mentirosos, que sempre mentem, as pessoas estão se preparando para comemorar o Dia da Independência. Dois habitantes viram um cartaz no qual estava indicada a idade do país, de dois algarismos, e disseram a você o seguinte.
Primeiro: 1) "A idade é divisível por 5". 2) "A idade não é divisível por 2".
Segundo: 1) "A idade é divisível por 10". 2) "A soma dos algarismos da idade não é igual a 7".
Quantos anos o país pode ter? Encontre todas as possibilidades. (*P. Mulenko*)

4. O número 2026 foi recortado de uma folha quadriculada, acompanhando as linhas da grade (veja a figura). Corte um ou vários algarismos ao longo das linhas da grade e monte com todas as peças obtidas um retângulo 5×8. O comprimento total de todos os cortes não deve exceder 4 (o lado de uma célula é igual a 1). Desenhe como os algarismos são cortados e depois como o retângulo é montado a partir dessas peças. (*S. Pavlov*)



5. No quadro estão escritos os algarismos 1, 2 e 3. Curiosamente, sua soma é divisível por cada um deles. Como é possível acrescentar ao quadro mais três algarismos de modo que todos os seis algarismos sejam diferentes e sua soma seja divisível por cada um deles? Encontre todas as maneiras e prove que não existem outras. (*P. Mulenko, S. Pavlov*)

6. Um octaedro regular é um poliedro composto por 8 triângulos de lados iguais. Um octaedro de aresta 1 foi cortado ao longo de algumas arestas e desdobrado no plano em uma única peça, de modo que as faces não se sobrepõem e não há duas faces que se toquem ao longo de um segmento, a não ser que continuem unidas por essa aresta. Qual pode ser o perímetro da planificação? Encontre todas as possibilidades e prove que não existem outras. (*P. Mulenko*)



7. Qual é o menor número de casas de um tabuleiro 3×2026 que é preciso pintar para que em qualquer retângulo de 4 casas haja pelo menos uma pintada? Não se esqueça de provar que ele é de fato o menor. (*S. Pavlov*)

Olimpíada Internacional de Matemática
"Fórmula da Unidade" / "O Terceiro Milênio"
Ano 2026/2027. Fase de qualificação.

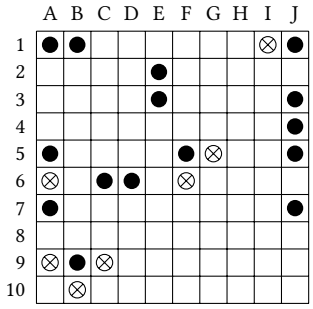
Problemas para nível R6

Por favor, entregue sua prova em formato eletrônico (ex: como um arquivo de texto ou uma digitalização/escaneamento), até as **23:59:59 UTC de 5 de novembro de 2026**. Mais detalhes estão na página formulo.org/en/olymp/2026-math-en/.

Por favor, resolva as questões individualmente. É proibido usar calculadoras, ferramentas de programação e redes neurais. Lembre-se que a maioria dos problemas exige, além de uma resposta, a sua demonstração completa. A prova não deve conter seus dados pessoais, portanto, **por favor, não assine sua prova**.

---

1. Artur está jogando batalha naval com um amigo. Neste jogo, um jogador posiciona 10 navios (quatro 1×1, três 1×2, dois 1×3 e um 1×4) em um tabuleiro 10×10 de modo que os navios não se toquem, nem mesmo pelos vértices, e o outro jogador indica casas, uma por vez, para afundar esses navios. Artur já fez algumas jogadas (veja a figura: ● — acerto em um navio, ⊗ — erro). Quantas configurações válidas dos navios existem? (*P. Mulenko*)



2. É possível cortar um tabuleiro de xadrez 8×8 em várias figuras iguais em forma e área, em cada uma das quais o número de casas pretas não é igual ao número de casas brancas, e também um quadrado 2×2? (*P. Mulenko, S. Pavlov*)

3. No quadro estão escritos os algarismos 1, 2 e 3. Curiosamente, sua soma é divisível por cada um deles. Como é possível acrescentar ao quadro mais alguns algarismos de modo que todos os algarismos sejam diferentes e sua soma seja divisível por cada um deles? Encontre todas as maneiras e prove que não existem outras. (*P. Mulenko, S. Pavlov*)

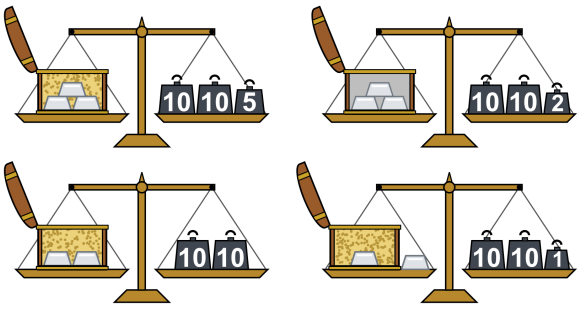
4. Em um país onde vivem apenas cavaleiros, que sempre dizem a verdade, e mentirosos, que sempre mentem, as pessoas estão se preparando para comemorar o Dia da Independência. Dois habitantes viram um cartaz no qual estava indicada a idade do país, de três algarismos, e disseram a você o seguinte.

Primeiro habitante:
1) "A idade é divisível por 25".
2) "A soma dos algarismos da idade não é igual a 9".

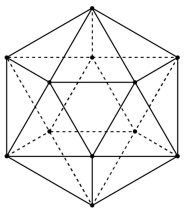
Segundo habitante:
1) "A soma dos algarismos da idade é igual a 18".
2) "O último algarismo não é 8".

Quantos anos o país pode ter? Encontre todas as possibilidades. (*P. Mulenko*)

5. O pirata Jack esconde barras de prata idênticas em um pequeno baú. Às vezes, ele enche o baú de areia até a borda, para que, ao abri-lo, pareça que não há nada de valor dentro. Ao escolher quantas barras esconderia, ele fez quatro pesagens em uma balança de pratos (veja a figura: a massa está indicada em libras). Quantas libras de areia cabem no baú vazio? (*A. Tesler*)



6. Um icosaedro regular é um poliedro composto por 20 triângulos de lados iguais. Um icosaedro de aresta 1 foi cortado ao longo de algumas arestas e desdobrado no plano em uma única peça, de modo que as faces não se sobrepõem e não há duas faces que se toquem ao longo de um segmento, a não ser que continuem unidas por essa aresta. Qual pode ser o perímetro da planificação? Encontre todas as possibilidades e prove que não existem outras. (*P. Mulenko*)



7. Para qual menor número natural k é verdadeira a seguinte afirmação: "Se o produto de 6 números naturais quaisquer é divisível por 960, então o produto de alguns k deles é divisível por 240"? (*A. Tesler*)

Olimpíada Internacional de Matemática
"Fórmula da Unidade" / "O Terceiro Milênio"
Ano 2026/2027. Fase de qualificação.

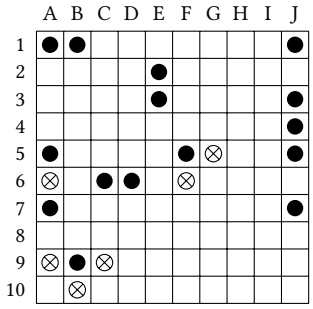
Problemas para nível R7

Por favor, entregue sua prova em formato eletrônico (ex: como um arquivo de texto ou uma digitalização/escaneamento), até as **23:59:59 UTC de 5 de novembro de 2026**. Mais detalhes estão na página formulo.org/en/olymp/2026-math-en/.

Por favor, resolva as questões individualmente. É proibido usar calculadoras, ferramentas de programação e redes neurais. Lembre-se que a maioria dos problemas exige, além de uma resposta, a sua demonstração completa. A prova não deve conter seus dados pessoais, portanto, **por favor, não assine sua prova**.

---

1. Artur está jogando batalha naval com um amigo. Neste jogo, um jogador posiciona 10 navios (quatro 1×1, três 1×2, dois 1×3 e um 1×4) em um tabuleiro 10×10 de modo que os navios não se toquem, nem mesmo pelos vértices, e o outro jogador indica casas, uma por vez, para afundar esses navios. Artur já fez algumas jogadas (veja a figura: ● — acerto em um navio, ⊗ — erro). Quantas configurações válidas dos navios existem? (*P. Mulenko*)

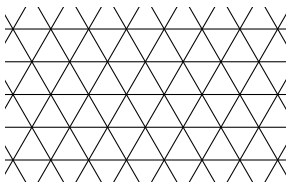


2. Qual é o menor n para o qual é possível escolher, dentre os números de 1 a n, dez números distintos dois a dois tais que o produto de cinco deles seja igual ao produto dos outros cinco? (*S. Pavlov*)

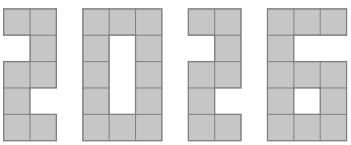
3. Um paralelepípedo retângulo $1 \times 1 \times 2$ foi cortado ao longo de algumas arestas e desdobrado no plano em uma única peça, de modo que as faces não se sobrepõem e não há duas faces que se toquem ao longo de um segmento, a não ser que continuem unidas por essa aresta. Qual pode ser o perímetro da planificação? Encontre todas as possibilidades e prove que não existem outras. (*P. Mulenko*)

4. Em um país onde vivem apenas cavaleiros, que sempre dizem a verdade, e mentirosos, que sempre mentem, as pessoas estão se preparando para comemorar o Dia da Independência. Dois habitantes viram um cartaz no qual estava indicada a idade do país, de quatro algarismos, e disseram sobre essa idade o seguinte.
Primeiro: 1) "O resto da divisão por 101 é igual a 80". 2) "O resto da divisão por 99 não é igual a 40".
Segundo: 1) "O resto da divisão por 99 é igual a 18". 2) "O resto da divisão por 101 não é igual a 92".
Quantos anos o país pode ter? Encontre todas as possibilidades. (*P. Mulenko*)

5. Um gafanhoto está em um vértice de um dos ladrilhos de uma praça pavimentada com triângulos equiláteros. A cada salto, ele se desloca ao longo de um lado do ladrilho até um vértice vizinho. Em quantos vértices diferentes ele pode estar após 60 saltos? (*E. Voronetskiy*)



6. O número 2026 foi recortado de uma folha quadriculada, acompanhando as linhas da grade (veja a figura). Corte um ou vários algarismos ao longo das linhas da grade e monte com todas as peças obtidas um retângulo 5×8. O comprimento total de todos os cortes não deve exceder 3 (o lado de uma célula é igual a 1). Desenhe como os algarismos são cortados e depois como o retângulo é montado a partir dessas peças. (*S. Pavlov*)



7. Certa vez, para revestir com papel de parede um salão retangular, foram comprados 25 rolos, mas eles não foram suficientes, e foi preciso comprar mais um. Agora decidiram dividir o salão, com duas divisórias perpendiculares que vão de parede a parede, em quatro cômodos retangulares. Cada cômodo será revestido com papel de parede de sua própria cor: vermelho, amarelo, verde e azul. Verificou-se que, para três cômodos, bastam 10 rolos de papel de parede vermelho, 12 de amarelo e 16 de verde (com um rolo a menos já não seria suficiente). Qual é o menor número de rolos de papel de parede azul que é preciso comprar para que sejam certamente suficientes para o quarto cômodo? Considere que o consumo de papel de parede é proporcional ao comprimento total das paredes; não leve em conta janelas e portas. (*P. Mulenko*)

Olimpíada Internacional de Matemática
"Fórmula da Unidade" / "O Terceiro Milênio"
Ano 2026/2027. Fase de qualificação.

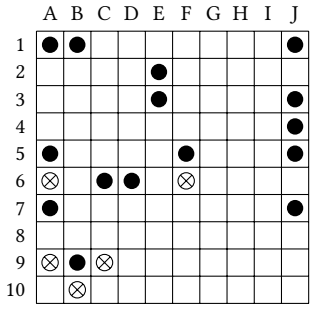
Problemas para nível R8

Por favor, entregue sua prova em formato eletrônico (ex: como um arquivo de texto ou uma digitalização/escaneamento), até as **23:59:59 UTC de 5 de novembro de 2026**. Mais detalhes estão na página formulo.org/en/olymp/2026-math-en/.

Por favor, resolva as questões individualmente. É proibido usar calculadoras, ferramentas de programação e redes neurais. Lembre-se que a maioria dos problemas exige, além de uma resposta, a sua demonstração completa. A prova não deve conter seus dados pessoais, portanto, **por favor, não assine sua prova**.

---

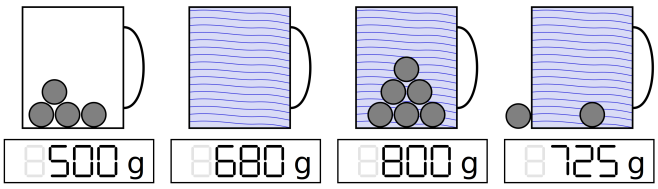
1. Artur está jogando batalha naval com um amigo. Neste jogo, um jogador posiciona 10 navios (quatro 1×1, três 1×2, dois 1×3 e um 1×4) em um tabuleiro 10×10 de modo que os navios não se toquem, nem mesmo pelos vértices, e o outro jogador indica casas, uma por vez, para afundar esses navios. Artur já fez algumas jogadas (veja a figura: ● — acerto em um navio, ⊗ — erro). Quantas configurações válidas dos navios existem? (*P. Mulenko*)



2. Qual é o menor n para o qual é possível escolher, dentre os números de 1 a n, dez números distintos dois a dois tais que o produto de cinco deles seja igual ao produto dos outros cinco? (*S. Pavlov*)

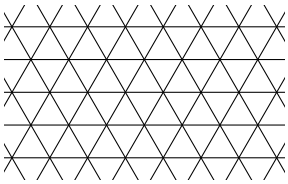
3. Certa vez, para revestir com papel de parede um salão retangular, foram comprados 25 rolos, mas eles não foram suficientes, e foi preciso comprar mais um. Agora decidiram dividir o salão, com duas divisórias perpendiculares que vão de parede a parede, em quatro cômodos retangulares. Cada cômodo será revestido com papel de parede de sua própria cor: vermelho, amarelo, verde e azul. Verificou-se que, para três cômodos, bastam 10 rolos de papel de parede vermelho, 12 de amarelo e 16 de verde (com um rolo a menos já não seria suficiente). Qual é o menor número de rolos de papel de parede azul que é preciso comprar para que sejam certamente suficientes para o quarto cômodo? Considere que o consumo de papel de parede é proporcional ao comprimento total das paredes; não leve em conta janelas e portas. (*P. Mulenko*)

4. Arquimedes tem uma caneca, várias bolinhas de metal idênticas, uma torneira com água, uma balança precisa e muito tempo livre. Ele fez várias pesagens e obteve os resultados mostrados na figura (cada vez que há água na caneca, ela está cheia até a borda). Qual é a massa da caneca vazia? (*A. Tesler*)



5. Um paralelepípedo retângulo $1 \times 2 \times 3$ foi cortado ao longo de algumas arestas e desdobrado no plano em uma única peça, de modo que as faces não se sobrepõem e não há duas faces que se toquem ao longo de um segmento, a não ser que continuem unidas por essa aresta. Qual pode ser o perímetro da planificação? Encontre todas as possibilidades e prove que não existem outras. (*P. Mulenko*)

6. Uma formiga foi parar em uma praça pavimentada com triângulos equiláteros. Ela consegue correr paralelamente aos lados dos ladrilhos com velocidade de 1 cm/s. Qual é o perímetro do conjunto dos pontos que a formiga consegue alcançar em 1 minuto? (*E. Voronetskiy*)



7. Chamemos um número natural k de *verde* se existe um natural n tal que a representação decimal do número $n!$ termina em exatamente k zeros, e de *roxo* caso contrário. De quais números há mais no intervalo de 1 a 20262026: verdes ou roxos? (*A. Tesler*)

Olimpíada Internacional de Matemática
"Fórmula da Unidade" / "O Terceiro Milênio"
Ano 2026/2027. Fase de qualificação.

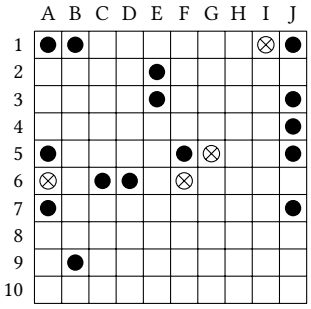
Problemas para nível R9

Por favor, entregue sua prova em formato eletrônico (ex: como um arquivo de texto ou uma digitalização/escaneamento), até as **23:59:59 UTC de 5 de novembro de 2026**. Mais detalhes estão na página formulo.org/en/olymp/2026-math-en/.

Por favor, resolva as questões individualmente. É proibido usar calculadoras, ferramentas de programação e redes neurais. Lembre-se que a maioria dos problemas exige, além de uma resposta, a sua demonstração completa. A prova não deve conter seus dados pessoais, portanto, **por favor, não assine sua prova**.

---

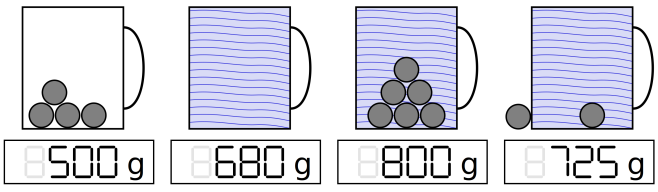
1. Artur está jogando batalha naval com um amigo. Neste jogo, um jogador posiciona 10 navios (quatro 1×1, três 1×2, dois 1×3 e um 1×4) em um tabuleiro 10×10 de modo que os navios não se toquem, nem mesmo pelos vértices, e o outro jogador indica casas, uma por vez, para afundar esses navios. Artur já fez algumas jogadas (veja a figura: ● — acerto em um navio, ⊗ — erro). Quantas configurações válidas dos navios existem? (*P. Mulenko*)



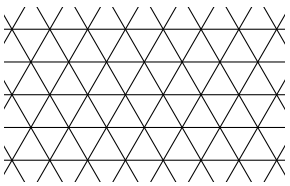
2. Qual é o menor $n > 1$ para o qual todos os números naturais de 1 a n podem ser escritos em fila de modo que a soma de quaisquer dois números vizinhos seja um quadrado perfeito? (*S. Pavlov*)

3. O icosaedro truncado (também conhecido como o poliedro da bola de futebol), é composto por 12 pentágonos regulares e 20 hexágonos regulares de lado 1. Ele foi cortado ao longo de algumas arestas e desdobrado no plano em uma única peça, de modo que as faces não se sobrepõem e não há duas faces que se toquem ao longo de um segmento, a não ser que continuem unidas por essa aresta. Qual pode ser o perímetro da planificação? Encontre todas as possibilidades e prove que não existem outras. (*P. Mulenko*)

4. Arquimedes tem uma caneca, várias bolinhas de metal idênticas, uma torneira com água, uma balança precisa e muito tempo livre. Ele fez várias pesagens e obteve os resultados mostrados na figura (cada vez que há água na caneca, ela está cheia até a borda). Qual é a massa da caneca vazia? (*A. Tesler*)



5. Uma formiga foi parar em uma praça pavimentada com triângulos equiláteros. Ela consegue correr paralelamente aos lados dos ladrilhos com velocidade de 1 cm/s. Qual é a área do conjunto dos pontos que a formiga consegue alcançar em 1 minuto? (*E. Voronetskiy*)



6. O tiktoker Joãozinho, com um único corte reto, dividiu um quadrado de lado 2 em um triângulo e um quadrilátero. Se o perímetro do triângulo é igual a 6, qual é o perímetro do quadrilátero? (*P. Mulenko*)

7. Prove que, entre os números de 1 a 10^{1000}, mais de dois milhões de números contêm em sua fatoração em primos apenas fatores 2 e 5. (*A. Tesler*)

Olimpíada Internacional de Matemática
"Fórmula da Unidade" / "O Terceiro Milênio"
Ano 2026/2027. Fase de qualificação.

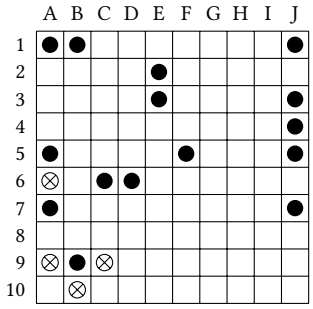
Problemas para nível R10

Por favor, entregue sua prova em formato eletrônico (ex: como um arquivo de texto ou uma digitalização/escaneamento), até as **23:59:59 UTC de 5 de novembro de 2026**. Mais detalhes estão na página formulo.org/en/olymp/2026-math-en/.

Por favor, resolva as questões individualmente. É proibido usar calculadoras, ferramentas de programação e redes neurais. Lembre-se que a maioria dos problemas exige, além de uma resposta, a sua demonstração completa. A prova não deve conter seus dados pessoais, portanto, **por favor, não assine sua prova**.

---

1. Artur está jogando batalha naval com um amigo. Neste jogo, um jogador posiciona 10 navios (quatro 1×1, três 1×2, dois 1×3 e um 1×4) em um tabuleiro 10×10 de modo que os navios não se toquem, nem mesmo pelos vértices, e o outro jogador indica casas, uma por vez, para afundar esses navios. Artur já fez algumas jogadas (veja a figura: ● — acerto em um navio, ⊗ — erro). Quantas configurações válidas dos navios existem? (*P. Mulenko*)



2. Certa vez, para revestir com papel de parede um salão retangular, foram comprados 25 rolos, mas eles não foram suficientes, e foi preciso comprar mais um. Agora decidiram dividir o salão, com duas divisórias perpendiculares que vão de parede a parede, em quatro cômodos retangulares. Cada cômodo será revestido com papel de parede de sua própria cor: vermelho, amarelo, verde e azul. Verificou-se que, para três cômodos, bastam 10 rolos de papel de parede vermelho, 12 de amarelo e 16 de verde (com um rolo a menos já não seria suficiente). Qual é o menor número de rolos de papel de parede azul que é preciso comprar para que sejam certamente suficientes para o quarto cômodo? Considere que o consumo de papel de parede é proporcional ao comprimento total das paredes; não leve em conta janelas e portas. (*P. Mulenko*)

3. Para qual menor número natural k é verdadeira a seguinte afirmação: "Se o produto de 10 números naturais quaisquer é divisível por 61440, então o produto de alguns k deles é divisível por 240"? (*A. Tesler*)

4. Em um país há 2026 aeroportos, numerados de 1 a 2026. Existe um voo entre dois aeroportos se a soma de seus números é igual ao quadrado de um número natural. É verdade que de qualquer aeroporto é possível chegar a qualquer outro (possivelmente com conexões)? (*S. Pavlov*)

5. O tiktoker Joãozinho, com um único corte reto, dividiu um quadrado em um triângulo e um quadrilátero. A razão entre o perímetro do triângulo e o perímetro do quadrilátero é igual a $6 : 7$. E qual é a razão entre a área do triângulo e a área do quadrilátero? (*P. Mulenko, A. Tesler*)

6. Prove que, entre os números de 1 a 10^{1000}, mais de dois milhões de números contêm em sua fatoração em primos apenas fatores 2 e 5. (*A. Tesler*)

7. Dentro de um quadrilátero convexo $ABCD$ foi marcado um ponto P de modo que os triângulos PAB, PBC, PCD e PDA têm áreas iguais. Sabe-se também que $PB = PC$ e $PA = PD$. Prove que P é o centro da circunferência circunscrita ao quadrilátero $ABCD$. (*P. Mulenko*)

Olimpíada Internacional de Matemática
"Fórmula da Unidade" / "O Terceiro Milênio"
Ano 2026/2027. Fase de qualificação.

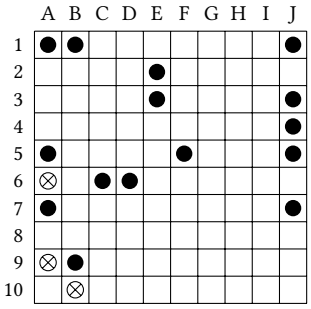
Problemas para nível R11

Por favor, entregue sua prova em formato eletrônico (ex: como um arquivo de texto ou uma digitalização/escaneamento), até as **23:59:59 UTC de 5 de novembro de 2026**. Mais detalhes estão na página formulo.org/en/olymp/2026-math-en/.

Por favor, resolva as questões individualmente. É proibido usar calculadoras, ferramentas de programação e redes neurais. Lembre-se que a maioria dos problemas exige, além de uma resposta, a sua demonstração completa. A prova não deve conter seus dados pessoais, portanto, **por favor, não assine sua prova**.

---

1. Artur está jogando batalha naval com um amigo. Neste jogo, um jogador posiciona 10 navios (quatro 1×1, três 1×2, dois 1×3 e um 1×4) em um tabuleiro 10×10 de modo que os navios não se toquem, nem mesmo pelos vértices, e o outro jogador indica casas, uma por vez, para afundar esses navios. Artur já fez algumas jogadas (veja a figura: ● — acerto em um navio, ⊗ — erro). Quantas configurações válidas dos navios existem?



(*P. Mulenko*)

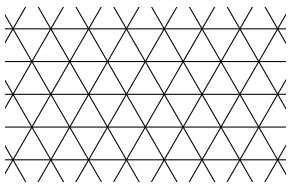
2. Helena anotou em um papelzinho o seu telefone, que consiste em 11 algarismos. É possível escrever no início, no final e entre cada dois algarismos do telefone um algarismo de modo que o número de 23 algarismos obtido seja divisível por 2026? (*A. Tesler*)

3. Em um país há 2026 aeroportos, numerados de 1 a 2026. Existe um voo entre dois aeroportos se a soma de seus números é igual ao quadrado de um número natural. É verdade que, mesmo que um dos aeroportos feche, entre quaisquer dois outros aeroportos a ligação se manterá (possivelmente com conexões)? (*S. Pavlov*)

4. Na esfera unitária está marcado um ponto de coordenadas (k, ℓ, m), sendo que
$$m = \frac{\ell}{\sqrt{k^2 + \ell^2}}.$$
Prove que os números 1, $\dfrac{mk}{\ell}$, $k^2 + \ell^2$, $\dfrac{k\ell}{m}$ (nesta ordem) formam uma progressão geométrica.

(*P. Mulenko*)

5. Uma formiga foi parar em uma praça pavimentada com triângulos equiláteros (veja a figura). Ela consegue correr paralelamente aos lados dos ladrilhos com velocidade de 1 cm/s. A formiga quer estar 30 cm à direita de sua posição atual, e ela tem 1 minuto para isso. Qual é a área do conjunto dos pontos pelos quais ela pode passar no caminho? (*E. Voronetskiy*)



6. Prove que, entre os números de 1 a 10^{1000}, mais de dois milhões de números contêm em sua fatoração em primos apenas fatores 2 e 5. (*A. Tesler*)

7. Dentro de um quadrilátero convexo $ABCD$ foi marcado um ponto P de modo que os triângulos PAB, PBC, PCD e PDA têm áreas iguais. Sabe-se também que $PB = PC$. Prove que o quadrilátero $ABCD$ tem um ângulo reto. (*P. Mulenko*)