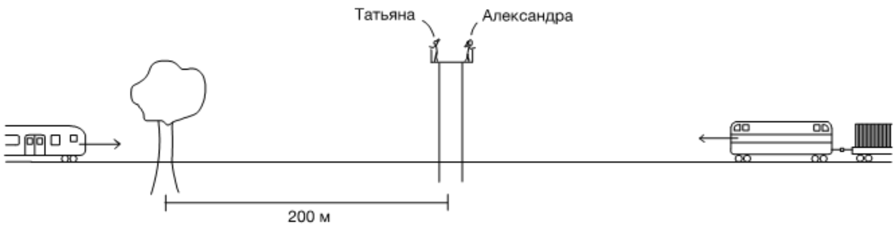
Международная физическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2025–2026 учебный год. Заключительный этап

Решения задач для 8 класса

8.1. (7 баллов) Татьяна и Александра гуляли за городом и решили следить за поездами на прямой железной дороге с пешеходного моста, который находится над ней. Вокруг были степи за исключением дерева рядом с железной дорогой, находящегося за 200 м до моста. Татьяна стала смотреть в сторону дерева, а Александра – в противоположную. Со стороны Татьяны шёл пассажирский поезд, а со стороны Александры – грузовой. В какой-то момент пассажирский поезд поравнялся с деревом, а грузовой в этот же момент поравнялся с мостом. Татьяна, зная стандартную длину вагона в 25,5 м и посчитав количество вагонов, равное 3, заметила также, что между моментами, когда поезд поравнялся с деревом и поравнялся с мостом, прошло 7 с. Александра же заметила, что грузовой поезд полностью прошёл мост через секунду после пассажирского. Ей было сложнее определить длину грузового поезда, так как он содержал в себе вагоны разной длины. Но на одной из платформ было два стандартных контейнера, и Александра знала ототца, работающего в порту, что их совокупная длина составляет 24 м, и эта платформа прошла мост за 3 с.



[1] Определить длину грузового поезда, если поезда движутся с постоянными скоростями.

Замечание. Шириной моста пренебречь. *(Л.С. Ласкавый)*
Ответ: $l_{\text{груз}} = 90$ м.
Решение.
Длина пассажирского поезда определяется как

$$l_{\text{пас}} = nl_{\text{в}}$$

Определим скорость пассажирского поезда:

$$v_{\text{пас}} = \frac{S_{\text{д}}}{t}$$

За некоторое время t_1 поезд прошёл путь, равный сумме расстояния от дерева до моста и своей длины:

$$S_{\text{пас}} = S_{\text{д}} + l_{\text{пас}}$$

Или, подставляя длину поезда:

$$S_{\text{пас}} = S_{\text{д}} + nl_{\text{в}}$$

Скорость поезда постоянна, так что:

$$v_{\text{пас}} = \frac{S_{\text{д}} + nl_{\text{в}}}{t_1}$$

Приравняв выражения для скоростей, выразим t_1:

$$t_1 = \frac{(S_д + nl_в)\,t}{S_д}$$

Грузовой поезд прошёл собственную длину за время, на секунду большее t_1

$$S_{груз} = l_{груз}$$

Скорость грузового поезда определим с помощью данных о контейнерах:

$$v_{груз} = \frac{l_к}{t_к}$$

С другой стороны:

$$v_{груз} = \frac{S_{груз}}{t_1 + \Delta t}$$

Выразив

$$S_{груз} = v_{груз}\,(t_1 + \Delta t)$$

и подставив все выражения, получим:

$$l_{груз} = \frac{l_к}{t_к}\left(\frac{(S_д + nl_в)\,t}{S_д} + \Delta t\right)$$

Подставляя значения, получим в итоге:

$$l_{груз} = \frac{24}{3}\left(\frac{(200 + 3 \cdot 25{,}5) \cdot 7}{200} + 1\right) = 85{,}42 \text{ м}$$

Учитывая минимальное число значащих цифр в условии равное единице, проводим округление, так что $l_{груз} = 90$ м.

8.2. (9 баллов) Тимур в гостях у бабушки решил помочь ей принять дрова для топки, по заказу их привезли 0,900 м^3. Он решил не нести их через весь двор под навес, а оставил на улице, но была осень с редкими, но сильными дождями, температура держалась близко к 0,00 ^oC. Из-за дождя дрова промокли, и Тимур, постепенно перетаскивая их под навес с помощью тачки и перебирая, определил их суммарную массу 648 кг.

[2] На сколько дней хватит дров для поддержания дома протопленным при той же температуре в случае, если для этого в день следует сжигать по 10 кг сухих дров?

Замечание. Считать внешние условия при сжигании сухих и мокрых дров неизменными и одинаковыми, плотность сухих дров 600,00 кг/м^3, удельная теплоёмкость воды 4200,00 Дж/(кг$\cdot$К), удельная теплота парообразования воды 2,30 Дж/кг, удельная теплота сгорания сухих дров $1{,}00 \cdot 10^7$ Дж/кг. *(Л.С. Ласкавый)*

Ответ: $n = 51$.

Решение.

Поскольку дрова — неоднородный материал, то руководствоваться объёмами невозможно. Поэтому осуществим переход к массам. Масса сухих дров:

$$m_{сд} = \rho_д V$$

$$m_{сд} = 600 \cdot 0{,}9 = 540 \text{ кг}$$

Тогда можно найти массу воды, которая оказалась в дровах, как разность

$$m_в = m_{мд} - m_{сд}$$

$$m_{\text{в}} = 648 - 540 = 108 \text{ кг}$$

Если на 540 кг сухих дров приходится 108 кг воды, то на 10 кг сухих дров для сжигания приходится

$$m_{\text{в1}} = 2 \text{ кг}$$

Если рассматривать мокрые дрова, то

$$m_{\text{мок}} = m_{\text{сж1}} + m_{\text{в1}}$$

Причём из соотношения между 10 кг дров и 2 кг воды в мокрых дровах ясно, что для любой массы мокрых дров

$$m_{\text{сж1}} = \frac{10}{12} m_{\text{мок}}$$

$$m_{\text{в1}} = \frac{2}{12} m_{\text{мок}}$$

Переведём температуру в абсолютные показатели. Далее температура будет учтена как абсолютная.

$$T_{\text{нач}} = 273 \text{ К}$$

$$T_{\text{кип}} = 373 \text{ К}$$

Поддержание дома при какой-то температуре означает, что необходимо определённое количество теплоты, получаемое при сжигании дров. В случае с сухими дровами при их сжигании получается количество теплоты

$$Q_{\text{сух}} = q m_{\text{сж}}$$

Ясно, что теплота, даваемая от мокрых дров, должна быть точно такой же, как и от сухой. Но помимо энергии, получаемой от сжигания дров, необходимо нагреть и испарить воду, попавшую в дрова. Тогда соотношение выглядит так:

$$Q_{\text{мок}} - Q_1 - Q_2 = Q_{\text{сух}}$$

Удельная теплота сгорания мокрых дров:

$$Q_{\text{мок}} = q \cdot \frac{10}{12} m_{\text{мок}}$$

Количество теплоты для нагрева воды:

$$Q_1 = c \cdot \frac{2}{12} m_{\text{мок}} \left(T_{\text{кип}} - T_{\text{нач}}\right)$$

Количество теплоты для полного превращения воды в пар при кипении:

$$Q_2 = L \cdot \frac{2}{12} m_{\text{мок}}$$

В итоге

$$q \cdot \frac{10}{12} m_{\text{мок}} - c \cdot \frac{2}{12} m_{\text{мок}} \left(T_{\text{кип}} - T_{\text{нач}}\right) - L \cdot \frac{2}{12} m_{\text{мок}} = q m_{\text{сж}}$$

Выражая $m_{\text{мок}}$:

$$m_{\text{мок}}\left(10q - 2c\left(T_{\text{кип}} - T_{\text{нач}}\right) - 2L\right) = 12qm_{\text{сж}}$$

$$m_{\text{мок}} = \frac{12qm_{\text{сж}}}{10q - 2c\left(T_{\text{кип}} - T_{\text{нач}}\right) - 2L}$$

Подставляя значения, получим:

$$m_{\text{мок}} = \frac{12 \cdot 10^7 \cdot 10}{10 \cdot 10^7 - 2 \cdot 4200 \cdot (373 - 273) - 2 \cdot 2{,}3 \cdot 10^6} = 12{,}6903 \text{ кг}$$

Таким образом, найдена масса мокрых дров, итоговое количество теплоты от которых будет равно количеству теплоты от сухих дров для одного дня. Для получения количества дней нужно общую массу мокрых дров разделить на $m_{\text{мок}}$:

$$n = \frac{m_{\text{мд}}}{m_{\text{мок}}}$$

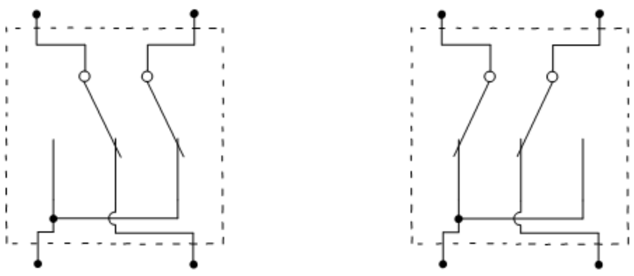
Подставляя значения, получим:

$$n = \frac{648}{12{,}6903} = 51{,}0624$$

Количество дней может быть только целым, так что

$$n = 51$$

8.3. (5 баллов) Артём на кружке по физике в рамках исследования электрических цепей получил задание составить электрическую цепь так, чтобы в лаборатории освещение можно было включить и выключить у любой из трёх дверей, в неё ведущих. Он знал, что есть проходные переключатели, которые работают как стрелки в рельсовых системах. Алексей, помогавший отцу делать ремонт, подсказал Артёму, что для такой же задачи они покупали перекрёстный переключатель, схема которого изображена на рисунке: привод от клавиши воздействует сразу на два разветвления в себе. Но как должны соединяться эти переключатели в схему, Алексей также не знает. И проходной, и перекрёстный переключатели выглядят точно также, как обычные выключатели, и монтируются также.

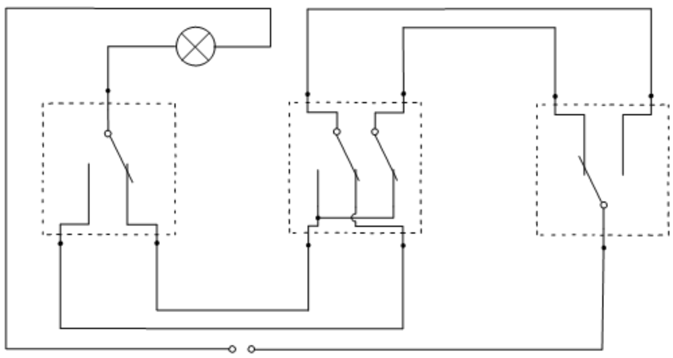


ВКЛ. (Вверх) ВЫКЛ. (Вниз)

[3] Составьте схему с источником, лампой, а также проходными и одним перекрёстным переключателями, чтобы схема позволяла выполнить цель Артёма.

(Л.С. Ласкавый)

Ответ:



.

Решение.

Смысл элементов в том, чтобы каждый из переключателей при нажатии осуществлял разрыв цепи, и чтобы разрыв был не более чем один. Поэтому нужно разместить два проходных переключателя концами к источнику и лампе соответственно, а между ними разместить перекрёстный переключатель. Вариант схемы приведён на рисунке 2.

8.4. (7 баллов) На кружке по физике Ивану поручили провести эксперимент в области тепловых явлений: в кружке из никеля налито 250 г воды при 20 ^oC. Иван опускает кипятильник в кружку. Через 15 мин после опускания кипятильника в кружку вода закипела.

[4] Через какое время выкипит 20,0%?

Замечание. Мощность кипятильника считать постоянной, теплопотерями в окружающую среду, а также теплоёмкостью пренебречь. Теплоёмкость никеля 46 Дж/К, удельная теплоёмкость воды 4200 Дж/(кг $\cdot$ К), удельная теплота парообразования $2{,}3 \cdot 10^6$ Дж/кг. *(Л.С. Ласкавый)*

Ответ: $\tau_2 = 1200$ с.

Решение.

Переведём температуру в абсолютные показатели. Далее температура будет учтена как абсолютная.

$$T_{\text{нач}} = 293 \text{ К}$$

$$T_{\text{кип}} = 373 \text{ К}$$

Разобьём процесс на два раздельных: сначала нагрев кружки и воды до температуры кипения, затем кипение части воды.

$$Q_{\text{н}} = Q_1 + Q_2,$$

где нагрев никеля

$$Q_1 = C_{\text{ник}} \left(T_{\text{кип}} - T_{\text{нач}}\right),$$

а нагрев воды

$$Q_2 = c_{\text{в}} m_{\text{в}} \left(T_{\text{кип}} - T_{\text{нач}}\right).$$

В свою очередь количество теплоты, отданное кипятильником:

$$Q_{\text{н}} = P\tau_1$$

То есть

$$P\tau_1 = C_{\text{ник}}\left(T_{\text{кип}} - T_{\text{нач}}\right) + c_{\text{в}} m_{\text{в}}\left(T_{\text{кип}} - T_{\text{нач}}\right)$$

Откуда

$$P = \frac{C_{\text{ник}}\left(T_{\text{кип}} - T_{\text{нач}}\right) + c_{\text{в}} m_{\text{в}}\left(T_{\text{кип}} - T_{\text{нач}}\right)}{\tau_1}$$

Здесь допускается частичная подстановка для получения значения мощности кипятильника. Рассмотрим второй процесс (выкипания части воды):

$$Q_{\text{кип}} = L m_{\text{п}}$$

Отношение масс воды и пара:

$$m_{\text{п}} = 0{,}2 m_{\text{в}}$$

Теплота, отданная кипятильником (мощность постоянна):

$$Q_{\text{кип}} = P\tau_2$$

Тогда

$$P\tau_2 = 0{,}2 L m_{\text{в}}$$

Откуда

$$\tau_2 = \frac{0{,}2 L m_{\text{в}}}{P}$$

Подставляя выражение мощности, полученное из первого процесса, получим в итоге:

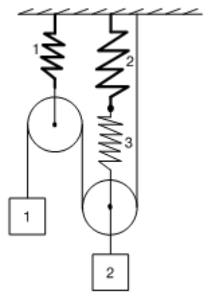
$$\tau_2 = \frac{0{,}2 L m_{\text{в}} \tau_1}{C_{\text{ник}}\left(T_{\text{кип}} - T_{\text{нач}}\right) + c_{\text{в}} m_{\text{в}}\left(T_{\text{кип}} - T_{\text{нач}}\right)}$$

Подставляя значения, получим:

$$\tau_2 = \frac{0{,}2 \cdot 2{,}3 \cdot 10^6 \cdot 0{,}25 \cdot 900}{46 \cdot (373 - 293) + 4200 \cdot 0{,}25 \cdot (373 - 293)} = 1180{,}4288 \text{ с.}$$

Учитывая минимальное число значащих цифр в условии равное двум, проводим округление, так что $\tau_2 = 1200$ с.

8.5. (6 баллов) Александр на одной из лабораторных работ по физике собрал с помощью блоков, грузов, пружин и троса полиспаст, изображённый на рисунке. Масса второго груза равна 200 г, жёсткости первой, второй и третьей пружин равны соответственно 100 Н/м, 90 Н/м, 150 Н/м. В итоге полиспаст, построенный Александром, пребывает в состоянии равновесия.



[5] Найти массу первого груза и удлинения первой пружины, а также суммарное удлинение второй и третьей пружины.

Замечание. Считать блоки и пружины невесомыми, нити идеальными (невесомыми нерастяжимыми), ускорение свободного падения 10,0 м/с^2. *(Л.С. Ласкавый)*

Ответ: $m_1 = 0{,}1$ кг, $\Delta l_1 = 0{,}02$ м, $\Delta l_{23} = 0{,}02$ м.

Решение.

Опишем все силы, действующие на каждое из тел. За $\overrightarrow{T}$ обозначена сила натяжения одной нити, поскольку оно идёт по одной нити, то в любой точке натяжение нити одинаково. За $\overrightarrow{T}_1$ обозначим силу натяжения нити подвижного блока, для подвижного блока соотношение между ними:

$$T_1 = 2T$$

Поскольку вся система находится в состоянии равновесия, то для каждого из тел системы справедливы уравнения равновесия: силы, действующие в одну сторону, уравнивают силы, действующие в другую сторону.
Для первого и второго тела уравнения равновесия примут вид:

$$m_1 g = T$$

$$m_2 g = T_1 = 2T$$

Тогда:

$$m_2 g = 2m_1 g$$

В итоге:

$$m_1 = \frac{m_2}{2}$$

Для пружин, соединённых последовательно, действительно соотношение:

$$\frac{1}{k_{23}} = \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \quad \Rightarrow \quad k_{23} = \frac{k_2 k_3}{k_2 + k_3}$$

Закон Гука:

$$F_{\text{упр}} = k\Delta l$$

Уравнение равновесия для первой пружины:

$$k_1 \Delta l_1 = 2T = 2m_1 g$$

Откуда

$$\Delta l_1 = \frac{2m_1 g}{k_1}$$

Аналогично для второй и третьей пружин:

$$k_{23} \Delta l_{23} = T = m_1 g$$

$$\frac{k_2 k_3}{k_2 + k_3} \Delta l_{23} = T = m_1 g$$

Выражая, получим:

$$\Delta l_{23} = \frac{m_1 g \left(k_2 + k_3\right)}{k_2 k_3}$$

Подставляя значения, получим в итоге:

$$m_1 = \frac{0{,}2}{2} = 0{,}1 \text{ кг}$$

$$\Delta l_1 = \frac{2 \cdot 0{,}1 \cdot 10}{100} = 0{,}02 \text{ м}$$

$$\Delta l_{23} = \frac{0{,}1 \cdot 10 \cdot (90 + 150)}{90 \cdot 150} = 0{,}01778 \text{ м}$$

Учитывая минимальное число значащих цифр в условии равное единице, проводим округление только третьего ответа, так что $m_1 = 0{,}1$ кг, $\Delta l_1 = 0{,}02$ м, $\Delta l_{23} = 0{,}02$ м.

Международная физическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2025–2026 учебный год. Заключительный этап

Решения задач для 9 класса

9.1. (5 баллов) В кружке ракетостроения Наталья и Пётр соорудили модель ракеты и стали запускать её на школьной площадке. После того, как Пётр запустил ракету, Наталья, следившая за запуском из окна школы с третьего этажа (высота над землёй 10,0 м), заметила, что ракета поравнялась с ней через одну секунду.

[1] На какую максимальную высоту сможет подняться ракета, если топлива в ней хватит на 7,0 с работы двигателя?

Замечание. Ускорение при работе считайте постоянным, сопротивлением воздуха пренебречь, ускорение свободного падения 10,0 м/с^2. *(Л.С. Ласкавый)*

Ответ: $S = 1500$ м.

Решение.

Рекомендуется выполнять частичную подстановку, однако допустимо и решение в общем виде. Полёт ракеты можно представить в виде двух этапов: полёт при работе двигателя, и полёт по инерции под действием ускорения свободного падения. При работе двигателя итоговое результирующее ускорение (далее ускорение ракеты) есть векторная сумма собственного ускорения двигателя ракеты и ускорения свободного падения.

Используя формулу

$$S_1 = v_0 t_1 + \frac{a t_1^2}{2}$$

и учитывая, что $v_0 = 0$, найдём ускорение ракеты при работе двигателя:

$$a = \frac{2S_1}{t_1^2} = \frac{2 \cdot 10}{1} = 20 \text{ м/с}^2$$

Найдём перемещение при подъёме с работающим двигателем:

$$S_{\text{р}} = \frac{a t_{\text{р}}^2}{2} = \frac{20 \cdot 7^2}{2} = 490 \text{ м}$$

Конечная скорость на данном этапе полёта (она же начальная для второго):

$$v_1 = a t_{\text{р}} = 20 \cdot 7 = 140 \text{ м/с}$$

Скорость ракеты в проекции на ось:

$$v_2 = v_1 - g t_{\text{с}}$$

Учитывая, что конечная скорость в наивысшей точке равна нулю, то

$$0 = v_1 - g t_{\text{с}},$$

откуда

$$t_{\text{с}} = \frac{v_1}{g} = \frac{140}{10} = 14 \text{ с}$$

Формула перемещения ракеты под действием ускорения свободного падения проецируется как

$$S_{\text{с}} = v_1 t_{\text{с}} - \frac{g t_{\text{с}}^2}{2} = 140 \cdot 14 - \frac{10 \cdot 14^2}{2} = 980 \text{ м}.$$

В итоге общая высота подъёма

$$S = S_р + S_с = 490 + 980 = 1470 \text{ м}.$$

Учитывая минимальное число значащих цифр в условии равное двум, проводим округление, так что $\tau_2 = 1500$ м.

9.2. (6 баллов) На лабораторной работе по физике учитель показал следующий опыт: взяв аквариум, в котором налита ртуть, он опустил в неё серебряный шар, а затем залил жидкость сверху. Оказалось, что шар плавает на границе раздела двух жидкостей, причём 75,5% его объёма находится в ртути.

№	**Жидкость**	**Плотность** (кг/м^3)
1	Бензин марки АИ-98	780
2	Спирт этиловый	789
3	Масло оливковое	946
4	Вода пресная	1000
5	Глицерин	1260

[2] Выберите из предложенных в таблице жидкостей ту, которая была налита сверху в описанном опыте. В ответе запишите название этой жидкости.

Замечание. Считать границу раздела жидкостей горизонтальной и устойчивой, жидкости несмешивающимися, плотность ртути 13600 кг/м^3, плотность серебра 10500 кг/м^3, ускорение свободного падения 10,0 м/с^2. Шар не касается дна или стенок аквариума даже при полном погружении в ртуть. (*Л.С. Ласкавый*)

Ответ: Масло оливковое.

Решение.

Объём шара раскладывается на две составляющие, одна из которых плавает в ртути, другая — в неизвестной жидкости:

$$V = V_1 + V_2$$

Тогда

$$V_2 = V - V_1 = V - 0{,}755V = 0{,}245V$$

Второй закон Ньютона в проекции на вертикальную ось (ускорение равно нулю, так как система в состоянии покоя):

$$\rho_{рт} g V_1 + \rho_{ж} g V_2 = mg$$

Учитывая, что масса шара

$$m = \rho_с V$$

и сокращая на g, получим:

$$\rho_{рт} V_1 + \rho_{ж} V_2 = \rho_с V.$$

Откуда

$$\rho_ж = \frac{\rho_с V - \rho_{рт} V_1}{V_2}$$

Выражая объёмы через общий объём и сократив на него, получим в итоге:

$$\rho_ж = \frac{\rho_с - 0{,}755\rho_{рт}}{0{,}245}$$

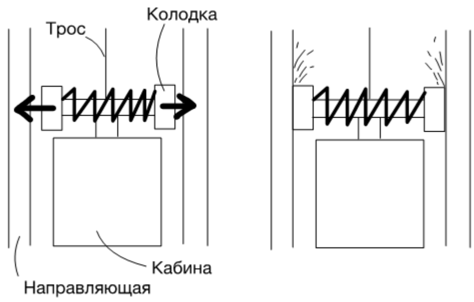
Подставляя значения, получим:

$$\rho_ж = \frac{10500 - 0{,}755 \cdot 13600}{0{,}245} = 946{,}9388 \text{ кг/м}^3$$

Учитывая минимальное число значащих цифр в условии равное трём, проводим округление,

так что $\rho_ж = 947$ кг/м^3.
Данная плотность из представленных в таблице соответствует оливковому маслу.

9.3. (8 баллов) Учитель по физике на занятии кружка по физике дал Николаю задание разобраться, как работают клиновые ловители кабины в лифте. Он знал о них лишь то, что в шахте закреплены две направляющие, к которым при срабатывании системы безопасности прижимаются колодки. Николай предположил, что две колодки могут прижиматься пружиной между ними, действующей как распорка (на самом деле клиновые ловители устроены иным образом), и останавливать кабину, если её скорость почему-то стала выше допустимой (см. рис.).



[3] Рассчитать жёсткость пружины, необходимую для полной остановки кабины лифта за 1,5 с, если полная масса кабины с пассажирами 1500 кг, скорость, при которой срабатывает система, равна 1,2 м/с, расстояние от каждой колодки до направляющей 0,5 см, коэффициент трения 0,7.

Замечание. Изначальное укорочение пружины составляет 20 см. Ускорение свободного падения 10,0 м/с^2. (*Л.С. Ласкавый*)

Ответ: $k = 60000$ Н/м.

Решение.

Рассмотрим действие пружины на колодки. Пружина, соединённая с колодками, давит на каждую из них с силой упругости по закону Гука:

$$F_{упр} = k\left(\Delta l_0 - 2\Delta l\right)$$

Эта сила и является прижимающей колодки к направляющим, поэтому по третьему закону Ньютона, сила реакции опоры от колодок равна по величине силе упругости со стороны пружины:

$$N = F_{упр} = k\left(\Delta l_0 - 2\Delta l\right)$$

Второй закон Ньютона:

$$\overrightarrow{F}_p = m\overrightarrow{a}$$

Раскрывая равнодействующую:

$$m\overrightarrow{g} + \overrightarrow{F}_{тр} + \overrightarrow{F}_{тр} = m\overrightarrow{a}$$

В проекции на ось, направленную вниз

$$mg - F_{тр} - F_{тр} = -ma$$

Сила трения определяется законом Кулона-Амонтона:

$$F_{тр} = \mu N$$

Или

$$F_{тр} = \mu k\left(\Delta l_0 - 2\Delta l\right)$$

В итоге

$$mg - 2\mu k\left(\Delta l_0 - 2\Delta l\right) = -ma$$

Откуда

$$k = \frac{mg + ma}{2\mu\left(\Delta l_0 - 2\Delta l\right)}$$

Ускорение найдём из кинематического выражения скорости:

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}_0 + \overrightarrow{a}t$$

В проекции на ту же ось, направленную вниз:

$$v = v_0 - at$$

С учётом $v = 0$ получится

$$a = \frac{v_0}{t}$$

Подставляя в выражение для жёсткости пружины, получим в итоге:

$$k = \frac{mg + m\frac{v_0}{t}}{2\mu\left(\Delta l_0 - 2\Delta l\right)}$$

Подставляя значения, получим в итоге:

$$k = \frac{1500 \cdot 10 + 1500 \cdot \frac{1{,}2}{1{,}5}}{2 \cdot 0{,}7 \cdot (0{,}2 - 2 \cdot 0{,}005)} = 60902{,}2556 \text{ Н/м}$$

Учитывая минимальное число значащих цифр в условии равное единице, проводим округление, так что $k = 60000$ Н/м.

9.4. (9 баллов) Татьяна и Дарья приехали в пионерский лагерь, на территории которого была река. На ней была сделана запруда, благодаря чему вода стекала вниз. Девочки решили достроить её до плотины, в которой оставили прорезь, через которую шла вода. Измерения показали, что на некотором расстоянии от плотины площадь сечения реки составила 0,5 м^2, а скорость потока реки в этом же месте равнялась 0,5 м/с. Площадь потока воды через прорезь составила 200 см^2, сразу за которой Татьяна установила колесо-генератор с лопастями такой же площади, что и прорезь в плотине, а Дарья подключила генератор к цепи с параллельно соединёнными лампами накаливания, рассчитанными на напряжение 48 В и мощность 50 Вт.

[4] Сколько ламп накаливания может быть в цепи, если КПД генератора 5% и генерируемая в цепи мощность постоянна?

Замечание. Считать струю единым потоком, полностью и сразу же после плотины попадающим на лопасти генератора. Плотность воды 1000 кг/м^3. (*Л.С. Ласкавый*)

Ответ: $n \geqslant 20$.

Решение.

Поскольку у реки нет задержек и растекания, то объём воды, проходящий через каждое сечение (расход) одинаков, то есть

$$Q = S_1 v_1 = S_2 v_2$$

Откуда

$$v_2 = \frac{S_1 v_1}{S_2}$$

Учитывая, что вода сразу же попадает на лопасти, то скорость выхода из прорези в плотине совпадает со скоростью попадания на лопасти, а изменение потенциальной энергии на лопасть можно пренебречь. Расход воды в единицу времени:

$$\mu = v_2 S_2 \rho$$

Тогда мощность потока воды, падающей на лопасть, можно представить как

$$P_{\text{в}} = \frac{\mu v_2^2}{2}$$

$$P_{\text{в}} = \frac{v_2 S_2 \rho v_2^2}{2}$$

$$P_{\text{в}} = \frac{S_2 \rho v_2^3}{2}$$

$$P_{\text{в}} = \frac{S_2 \rho S_1^3 v_1^3}{2 S_2^3}$$

КПД генератора определяется как отношение полезной (электрической) мощности к затраченной мощности (потока воды).

$$\eta = \frac{P}{P_{\text{в}}}$$

$$\eta = \frac{2 S_2^3 P}{S_2 \rho S_1^3 v_1^3}$$

Мощность тока

$$P = \frac{U^2}{R}$$

Где U — напряжение в цепи, R — общее сопротивление, для одинаковых ламп, соединённых параллельно,

$$R = \frac{R_n}{n}$$

Сопротивление лампы можно найти с помощью номинальных характеристик лампы:

$$R_n = \frac{U_n^2}{P_n}$$

Напряжение в цепи:

$$U = \sqrt{PR}$$

$$U = \sqrt{\frac{P R_n}{n}}$$

$$U = \sqrt{\frac{P U_n^2}{P_n n}}$$

Чтобы лампы работали в нормальном режиме без превышения накала, напряжение на каждой из них должно быть не больше номинального:

$$U \leqslant U_n$$

то есть

$$\sqrt{\frac{PU_n^2}{P_n n}} \leqslant U_n$$

С другой стороны, мощность из формулы КПД:

$$P = \frac{\eta S_2 \rho S_1^3 v_1^3}{2S_2^3}$$

Подставляя мощность в неравенство, получим:

$$\sqrt{\frac{\eta S_2 \rho S_1^3 v_1^3 U_n^2}{2S_2^3 P_n n}} \leqslant U_n$$

Подставляя значения, получим численное неравенство с n:

$$\sqrt{\frac{0{,}05 \cdot 0{,}02 \cdot 1000 \cdot 0{,}5^3 \cdot 0{,}5^3 \cdot 48^2}{2 \cdot 0{,}02^3 \cdot 50 \cdot n}} \leqslant 48$$

$$\sqrt{\frac{45000}{n}} \leqslant 48$$

$$\frac{45000}{n} \leqslant 2304$$

$$\frac{45000}{2304} \leqslant n$$

$$n \geqslant 19{,}53$$

Ясно, что количество ламп может быть лишь целым, так что для корректной работы без перегрузки ламп должно быть не менее двадцати.

9.5. (5 баллов) Алина взяла старые дедушкины часы, которые стали отставать, чтобы исследовать их в физической лаборатории в школе. вытащив батарейку, она увидела, что на ней написано $3V$. Алина решила измерить напряжение с помощью двух разных вольтметров, которые есть в лаборатории. Один из них показал 2,6 В, другой 2,5 В, а подключенные вместе они показали оба 2,3 В.

[5] Чему равна ЭДС батарейки?

(Л.С. Ласкавый)

Ответ: $\mathcal{E}$ =2,9 В.

Решение.

Ясно, что вольтметры подключаются к батарейке параллельно. Они показывают разные напряжения потому, что и источник имеет своё внутреннее сопротивление, и вольтметры также неидеальны и имеют сопротивление. Пусть вольтметры имеют сопротивления R_1 и R_2, а батарейка — внутреннее сопротивление r. Рассмотрим первый случай. Формула ЭДС батарейки:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{r + R_1}$$

Закон Ома для участка цепи:

$$I = \frac{U_1}{R_1}$$

Приравняв, получим в итоге:

$$U_1 = \frac{\mathcal{E}}{1 + \frac{r}{R_1}}$$

Аналогично для второго случая и случая совместного подключения:

$$U_2 = \frac{\mathcal{E}}{1 + \frac{r}{R_2}}$$

$$U_{12} = \frac{\mathcal{E}}{1 + \frac{r}{R_1} + \frac{r}{R_2}}$$

Выражая из первых двух случаев отношения сопротивлений и подставляя в последнее, получим в конечном итоге:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{\frac{1}{U_1} + \frac{1}{U_2} - \frac{1}{U_{12}}}$$

Подставляя значения, получим в итоге:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{\frac{1}{2{,}6} + \frac{1}{2{,}5} - \frac{1}{2{,}3}} = 2{,}858508 \text{ В}$$

Учитывая минимальное число значащих цифр в условии равное двум, проводим округление, так что $\mathcal{E}$ =2,9 В.

Международная физическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2025–2026 учебный год. Заключительный этап

Решения задач для 10 класса

10.1. (8 баллов) В учебной лаборатории Петя исследует электростатические поля, создаваемые заряженными рамками необычной формы. Из тонкой изолирующей нити Петя изготовил два замкнутых контура: круговое кольцо радиуса $R = 20$ мм и квадрат со стороной $2a = 40$ мм. Мальчикрасположил фигуры так, что их плоскости параллельны, а ось кольцаперпендикулярна этим плоскостям и проходит через центр квадрата. Расстояние между центрами фигур равно $d = 10$ см. По кольцу равномерно распределён заряд $Q = 2$ мкКл, а по квадрату — заряд $q = 2$ мкКл. В центре квадрата Петя поместил пробный заряд $q_0 = 2{,}0$ нКл массой $m = 1{,}0$ г и сообщил ему начальную скорость $v = 0{,}50$ м/с, направленную вдоль оси, соединяющей центры фигур, в сторону кольца.

[1] Достигнет ли пробный заряд центра кольца?

(*А.А. Черенков*)

Ответ: не достигнет.

Решение.

1) Сначала выведем формулу для потенциала электростатического поля, создаваемого заряженным кольцом. Для этого рассмотрим точку P на оси кольца на расстоянии x от его центра O. Мысленно разобьём кольцо на множество точечных зарядов $Q = Q_1 + \ldots + Q_n$. Согласно теореме Пифагора каждый точечный заряд находится от точки P на расстоянии

$$r = \sqrt{R^2 + x^2}.$$

С помощью формулы для потенциала точечного заряда и принципа суперпозиции выразим потенциал φ, создаваемый всем кольцом в точке P:

$$\varphi_c = \frac{kQ_1}{r} + \ldots + \frac{kQ_n}{r} = \frac{kQ}{\sqrt{R^2 + x^2}}$$

Отметим, что в силу общности вывода полученная формула справедлива для любого распределения заряда по кольцу.

2) Выведем теперь формулу для потенциала электростатического поля, создаваемого заряженным квадратом в той же самой точке P. Расстояние от центра квадрата M до точки P равно $z = d - x$. Ясно, что в силу центральной симметрии задачи относительно оси OP для вычисления потенциала, создаваемого квадратом, достаточно рассмотреть половину любой его сторону и умножить полученный результат на 8.

Мысленно разобьем выбранную сторону квадрата на точечные заряды $dq = \rho dl$, где $\rho = \frac{q}{8a} = const$ - плотность распределения заряда по квадрату. Пусть точечный заряд находится на расстоянии l от середины стороны. Тогда согласно теореме Пифагора расстояние от него до точки P:

$$r(l) = \sqrt{MP^2 + (a^2 + l^2)} = \sqrt{(z^2 + a^2) + l^2}$$

Наконец, с помощью формулы для потенциала точечного заряда и принципа суперпозиции выразим потенциал φ_0, создаваемый половиной стороны квадрата в точке P:

$$\varphi_0 = \int_0^a \frac{kdq}{r} = \int_0^a \frac{k\rho dl}{\sqrt{(z^2 + a^2) + l^2}} = k\rho \int_0^a \frac{dl}{\sqrt{(z^2 + a^2) + l^2}}$$

Таким образом, мы получили табличный интеграл, его можно взять и получить окончательный ответ в соответствии с формулой Ньютона-Лейбница:

$$\varphi_0 = \ k\rho \cdot \ln \left| l + \sqrt{l^2 + z^2 + a^2} \right| \Big|_0^a = k\rho \left(\ln \left(a + \sqrt{z^2 + 2a^2} \right) - \ln \left(\sqrt{z^2 + a^2} \right) \right) =$$

$$= k \frac{q}{8a} \ln \frac{a + \sqrt{(d-x)^2 + 2a^2}}{\sqrt{(d-x)^2 + a^2}}$$

Окончательно получаем, что потенциал, создаваемый всем квадратом в точке P равен:

$$\varphi_s = 8\varphi_0 = k\frac{q}{a} \ln \frac{a + \sqrt{(d-x)^2 + 2a^2}}{\sqrt{(d-x)^2 + a^2}}$$

3) Вычислим теперь суммарный потенциал, создаваемый заряженными фигурами в точке P. По-прежнему руководствуюясь принципом суперпозиции, получаем:

$$\varphi(x) = \varphi_c(x) + \varphi_s(x) = \frac{kQ}{\sqrt{R^2 + x^2}} + \frac{kq}{a} \ln \frac{a + \sqrt{(d-x)^2 + 2a^2}}{\sqrt{(d-x)^2 + a^2}}$$

Согласно полученной формуле потенциал в центре квадрата ($x = d$):

$$\varphi_1 = \frac{kQ}{\sqrt{R^2 + d^2}} + \frac{kq}{a} \ln \left(1 + \sqrt{2} \right)$$

А потенциал в центре кольца (x = 0):

$$\varphi_2 = \frac{kQ}{R} + \frac{kq}{a} \ln \left(\frac{a + \sqrt{(d^2 + 2a^2)}}{\sqrt{d^2 + a^2}} \right)$$

Работа при перемещении пробного заряда из центра квадрата в центр кольца:

$$A = q_0 \left(\varphi_1 - \varphi_2 \right) = -kq_0 \left[Q \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + d^2}} \right) - \frac{q}{a} \left(\ln \left(1 + \sqrt{2} \right) - \ln \left(\frac{a + \sqrt{d^2 + 2a^2}}{\sqrt{d^2 + a^2}} \right) \right) \right] =$$

$$= -2{,}11 \cdot 10^{-4} \text{Дж}$$

4) Пробный заряд достигнет центра кольца, если его начальная кинетическая энергия $E = \frac{mv^2}{2}$ будет не меньше, чем модуль работы электростатического поля при этом перемещении. Подставляя численные значения, находим:

$$E = 1{,}25 \cdot 10^{-4} \text{Дж}$$

Таким образом, сравнивая значения энергии E и работы A, приходим к выводу, что заряд не сможет достичь центра второго кольца.

10.2. (5 баллов) Во время туристического похода школьники подошли к длинной канаве, которая была заполнена водой и преграждала им дальнейший путь. Чтобы не идти в обход, ребята решили соорудить переправу. Неподалёку от берега они обнаружили развалины старой деревянной избушки, сложенной из брёвен длиной L = 4,0 м прямоугольного сечения 15см × 15см. Ребята взяли одно из таких брёвен и положили его поперёк канавы, параллельно поверхности воды, так что бревно лишь касалось воды своей длинной гранью. Вскоре берег канавы осыпался, бревно оказалось свободным и начало тонуть.

[2] Найдите количество теплоты, которое выделится, пока бревно придёт в равновесие.

Замечание. При решении считать, что плотность древесины равна плотности воды $\rho = 1000{,}0\text{м}^3$. Ускорение свободного падения принять равным $9{,}8\text{м/с}^2$. *(А.А. Черенков)*

Ответ: 66 Дж.

Решение.
Так как плотность бревна равна плотности воды, то в конечном состоянии равновесия бревно окажется полностью погружённым в воду. Вначале, после отпускания бревна, под действием силы тяжести оно приобретёт некоторую скорость, затем по инерции пройдёт под водой некоторое расстояние, постепенно тормозясь, и в конце концов остановится на некоторой глубине под поверхностью воды.
Пусть центр масс бревна при погружении опустился на расстояние h. Тогда потенциальная энергия бревна уменьшилась на величину

$$\Delta U_1 = mgh,$$

Где $m = \rho L a^2$ - масса бревна. При этом бревном был вытеснен на поверхность объем воды в форме прямоугольного параллелепипеда массой m. Можно считать, что эта вода растеклась по поверхности тонким слоем, то есть ее центр масс поднялся на высоту $(h - a/2)$, а её потенциальная энергия увеличилась на

$$\Delta U_2 = mg\left(h - \frac{a}{2}\right).$$

Искомое количество теплоты равно разности этих двух величин:

$$\Delta Q = \Delta U_1 - \Delta U_2 = \frac{mga}{2} = \frac{\rho g L a^3}{2} \approx 66\text{Дж}$$

10.3. (7 баллов) Спортсмен-дайвер массой m = 90,00 кг решил испытать способности своего организма. Для этого он провел серию испытаний, в которых погружался в море на глубину H без какого-либо снаряжения, набрав полные легкие воздуха. Оказалось, что максимальная глубина, с которой он может всплыть, не совершая никаких движений, равна 7,00 метров.

[3] Какой объем легких дайвера, если при полном выдохе объем его тела составляет V = 85,0 л?

Замечание. При решении считать, что плотность морской воды $\rho = 1020$кг/м^3, при вдохе воздуха объём тела увеличивается на долю $n = 0{,}900$ от объёма вдохнутого воздуха. Ускорение свободного падения принять равным 9,81м/с^2, а атмосферное давление равным $p_0 = 1{,}00\ * 10^5$ Па.
(А.А. Черенков)

Ответ: 6,11 л.
Решение.
1) Максимальная глубина погружения H спортсмена определяется из условия, что на этой глубине выталкивающая наверх сила Архимеда сравнивается с силой тяжести. Таким образом, имеем:

$$F_a = mg$$

Откуда

$$\rho g V_0 = mg$$

где V_0 - объем спортсмена на глубине H. Таким образом

$$V_0 = m/\rho$$

2) При погружении на глубину H объем спортсмена меняется практически только из-за изотермического сжатия воздуха в легких на величину Δv. Пусть объем легких спортсмена равен v. Применим закон Бойля—Мариотта:

$$p_0 v = (p_0 + \rho g H)(v - \Delta v),$$

Отсюда находим:

$$\Delta v = \left(1 - \frac{p_0}{p_0 + \rho g H}\right) v$$

3) При полных легких воздуха объем спортсмена равен $V + vn$, тогда на глубине H:

$$V_0 = V + (v - \Delta v)n$$

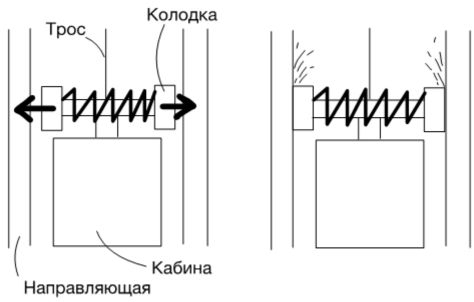
Подставим ранее найденные величины:

$$m/\rho = V + \left(1 - 1 + \frac{p_0}{p_0 + \rho g H}\right) nv$$

Выполняя алгебраические преобразования, окончательно получим ответ:

$$v = \frac{(m - V\rho)(p_0 + \rho g H)}{n\rho p_0} \approx 6{,}11 \text{ л}$$

10.4. (8 баллов) Учитель по физике на занятии кружка по физике дал Николаю задание разобраться, как работают клиновые ловители кабины в лифте. Он знал о них лишь то, что в шахте закреплены две направляющие, к которым при срабатывании системы безопасности прижимаются колодки. Николай предположил, что две колодки могут прижиматься пружиной между ними, действующей как распорка (на самом деле клиновые ловители устроены иным образом), и останавливать кабину, если её скорость почему-то стала выше допустимой (см. рис.).



[4] Рассчитать жёсткость пружины, необходимую для полной остановки кабины лифта за 1,5 с, если полная масса кабины с пассажирами 1500 кг, скорость, при которой срабатывает система, равна 1,2 м/с, расстояние от каждой колодки до направляющей 0,5 см, коэффициент трения 0,7.

Замечание. Изначальное укорочение пружины составляет 20 см. Ускорение свободного падения 10,0 м/с^2. (*Л.С. Ласкавый*)

Ответ: $k = 60000$ Н/м.

Решение.

Рассмотрим действие пружины на колодки. Пружина, соединённая с колодками, давит на каждую из них с силой упругости по закону Гука:

$$F_{\text{упр}} = k(\Delta l_0 - 2\Delta l)$$

Эта сила и является прижимающей колодки к направляющим, поэтому по третьему закону Ньютона, сила реакции опоры от колодок равна по величине силе упругости со стороны пружины:

$$N = F_{\text{упр}} = k(\Delta l_0 - 2\Delta l)$$

Второй закон Ньютона:

$$\vec{F}_p = m\vec{a}$$

Раскрывая равнодействующую:

$$m\vec{g} + \vec{F}_{\text{тр}} + \vec{F}_{\text{тр}} = m\vec{a}$$

В проекции на ось, направленную вниз

$$mg - F_{\text{тр}} - F_{\text{тр}} = -ma$$

Сила трения определяется законом Кулона-Амонтона:

$$F_{\text{тр}} = \mu N$$

Или

$$F_{\text{тр}} = \mu k \left(\Delta l_0 - 2\Delta l\right)$$

В итоге

$$mg - 2\mu k \left(\Delta l_0 - 2\Delta l\right) = -ma$$

Откуда

$$k = \frac{mg + ma}{2\mu \left(\Delta l_0 - 2\Delta l\right)}$$

Ускорение найдём из кинематического выражения скорости:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a} t$$

В проекции на ту же ось, направленную вниз:

$$v = v_0 - at$$

С учётом $v = 0$ получится

$$a = \frac{v_0}{t}$$

Подставляя в выражение для жёсткости пружины, получим в итоге:

$$k = \frac{mg + m\frac{v_0}{t}}{2\mu \left(\Delta l_0 - 2\Delta l\right)}$$

Подставляя значения, получим в итоге:

$$k = \frac{1500 \cdot 10 + 1500 \cdot \frac{1{,}2}{1{,}5}}{2 \cdot 0{,}7 \cdot (0{,}2 - 2 \cdot 0{,}005)} = 60902{,}2556 \text{ Н/м}$$

Учитывая минимальное число значащих цифр в условии равное единице, проводим округление, так что $k = 60000$ Н/м.

10.5. (7 баллов) В школе на уроке физике учитель проводил лабораторную работу с целью изучения оптических систем. Школьники устанавливали лампочку на расстоянии L = 100 см от экрана, а между ними тонкую собирающую линзу с фокусным расстоянием F =30,0 см и диаметром D = 5,00 см. Затем необходимо было измерить размер пятна от лампочки на экране.

[5] Чему равно минимально возможное измеренное значение площади пятна?

(А.А. Черенков)

Ответ: 1,99см^2.

Решение.

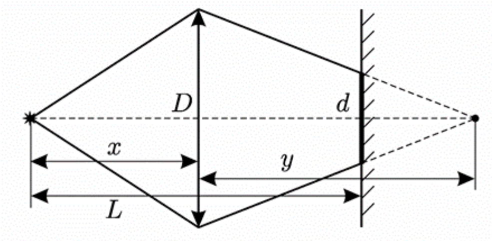


Рисунок 1. Ход лучей через линзу

Обозначим расстояния от линзы до источника x и до изображения y соответственно, диаметр линзы D, диаметр пятна на экране d.

Тогда из подобия треугольников (см рис):

$$d = D \cdot \frac{x+y-L}{y} = D\left(\frac{x-L}{y}+1\right).$$

Найдём такое x, при котором d минимально. Отметим, что не имеет смысла рассматривать значения $x \leqslant F$, так как в этом случае $d \geqslant D$, и размер пятна явно не может быть минимальным. Ясно, что d будет минимальным тогда, когда минимальное значение примет функция

$$f = \frac{x-L}{y}.$$

Применяя формулу тонкой линзы, получаем:

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{F} - \frac{1}{x}.$$

Следовательно,

$$f = \frac{(x-L)(x-F)}{Fx} = \frac{1}{F}\left(x + \frac{LF}{x} - (L+F)\right)$$

$$= \frac{1}{F}\left(\left(\sqrt{x} - \frac{\sqrt{LF}}{\sqrt{x}}\right)^2 - \left(\sqrt{L}-\sqrt{F}\right)^2\right).$$

Выражение

$$\left(\sqrt{x} - \frac{\sqrt{LF}}{\sqrt{x}}\right)^2 - \left(\sqrt{L}-\sqrt{F}\right)^2$$

минимально тогда, когда первое слагаемое равно нулю:

$$\sqrt{x} = \frac{\sqrt{LF}}{\sqrt{x}}, \qquad x_0 = \sqrt{LF}.$$

Этому значению соответствует минимально возможный диаметр пятна на экране:

$$d = D \cdot \frac{2\sqrt{LF}-L}{F}.$$

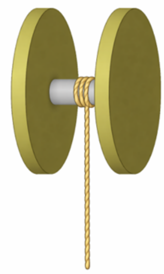
а значит минимальная площадь пятна

$S = \pi d^2/4 = \pi D^2 \cdot \left(\frac{2\sqrt{LF}-L}{F}\right)^2/4 \approx 1{,}99\text{см}^2$

Международная физическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2025–2026 учебный год. Заключительный этап

Решения задач для 11 класса

11.1. (7 баллов) Игрушка йо-йо является одной из разновидностей маятников. Она представляет из себя два одинаковых маховика радиуса R = 3 см, центры которых жестко соединены с концами легкого стержня радиуса r = 1 мм, причем оси маховиков совпадают с осью стержня. К середине стержня прикрепляется и наматывается нить длины L = 1 м, свободный конец нити фиксируется. Если отпустить игрушку, то она придёт в движение и будет разматывать нить, а при достижении нижней точки траектории, продолжая вращение по инерции, начнёт наматывать ее обратно, совершая колебательное движение.



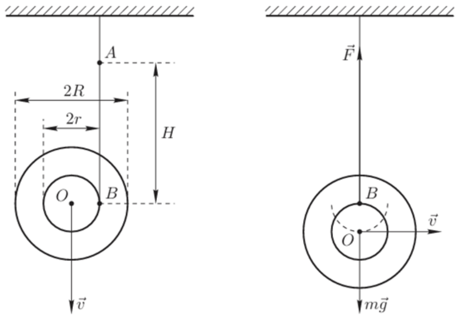
[1] Определить силу натяжения нити в нижней точке траектории йо-йо, если изначально нить была полностью смотана, а игрушку отпустили без начальной скорости.

Замечание. При решении считать, что маховик представляет собой цилиндр, а вся его масса m = 50 г сосредоточена на ободе. Ускорение свободного падения принять равным g = 10м/с^2

(*А.А. Черенков*)

Ответ: 3 Н.

Решение.



1) При решении можно считать, что $r \ll R \ll L$. На рис. 1 изображён маятник перед и при прохождении нижней точки своей траектории. В силу условия r ≪ L можно пренебречь отклонением нити от вертикали и изменением потенциальной энергии маятника между указанными состояниями, то есть далее будем считать, что ось O маятника движется с некоторой постоянной по модулю скоростью v по окружности радиусом r с центром в точке B.

2) Пусть ω — угловая скорость вращения маятника, u — постоянная скорость точек обода маховика относительно его оси, тогда из уравнения кинематической связи

$$\frac{v}{r} = \omega = \frac{u}{R}$$

находим

$$v = u \cdot \tfrac{r}{R}. \qquad (1)$$

Из условия $r \ll R$ следует, что $v \ll u$, поэтому можно пренебречь кинетической энергией поступательного движения центра масс маятника по сравнению с кинетической энергией вращательного движения маховика относительно центра масс и записать закон сохранения энергии в виде

$$2mgL = \frac{mu^2}{2} + \frac{mu^2}{2},$$

где учтено, что момент инерции маховика вычисляется как $\frac{mR^2}{2}$. Таким образом,

$$u^2 = 2gL. \qquad (2)$$

Используя уравнения (1) и (2) совместно, выражаем

$$v^2 = 2gL \cdot \frac{r^2}{R^2}.$$

Согласно второму закону Ньютона в проекции на вертикальную ось при прохождении маятником нижней точки окружности имеем

$$2m \cdot \frac{v^2}{r} = F - 2mg,$$

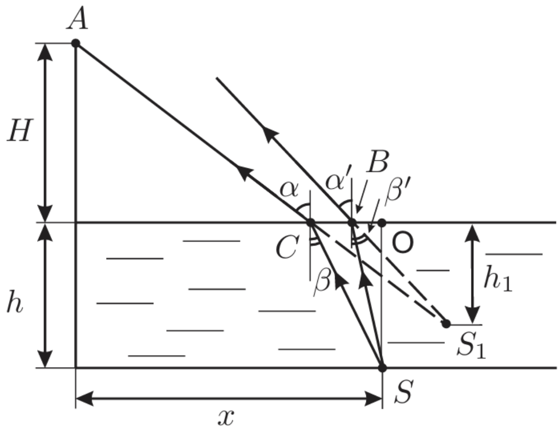
откуда с учётом выражения для скорости находим искомую силу:

$$F = 2mg\left(1 + \frac{2rL}{R^2}\right) \approx 3\ H.$$

11.2. (7 баллов) Детский лагерь находится недалеко от круглого карьера шириной L = 30,0м, заполненного родниковой водой глубиной h = 1,5м. На одном из берегов карьера находится обрыв высотой H = 10,0 м.

[2] Какой глубины будет казаться середина карьера, если встать на самый край обрыва?

Замечание. Показатель преломления воды n = 4/3. *(А.А. Черенков)*
Ответ: 0,40 м.
Решение.



1) Человек, находящийся в точке A (см.рисунок), оценивает глубину водоёма по двум близким лучам, идущим из точек B и C. Ему кажется, что лучи исходят не из точки S, а из точки S_1, поэтому видимая глубина водоёма h_1. Изменение направлений лучей на поверхности воды подчиняется закону Снеллиуса:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n, \qquad \frac{\sin\alpha'}{\sin\beta'} = n,$$

где n — показатель преломления воды, а углы α,β,α',β' показаны на рисунке.

2) Пусть Δ — длина отрезка BC. Тогда из прямоугольных треугольников, показанных на рисунке, следует, что

$$\Delta = h(tg\beta - tg\beta') = h_1(tg\alpha - tg\alpha').$$

Углы α и α', β и β' мало отличаются, поэтому, если $\alpha - \alpha' = \Delta\alpha$ и $\beta - \beta' = \Delta\beta$, то

$$tg\beta - tg\beta' \approx \frac{\Delta\beta}{\cos^2\beta}, \qquad tg\alpha - tg\alpha' \approx \frac{\Delta\alpha}{\cos^2\alpha}.$$

Подставляя полученные выражения в формулу для Δ, находим:

$$h_1 = h\,\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\beta}\,\frac{\Delta\beta}{\Delta\alpha}.$$

Запишем закон Снеллиуса для малых приращений углов:

$$\cos\alpha\,\Delta\alpha = n\cos\beta\,\Delta\beta,$$

откуда

$$h_1 = \frac{h}{n}\,\frac{\cos^3\alpha}{\cos^3\beta} = \frac{h}{n}\,\frac{\cos^3\alpha}{\left(1-\frac{\sin^2\alpha}{n^2}\right)^{3/2}}.$$

3)Для угла α из рисунка находим:

$$\sin\alpha = \frac{x-OB}{\sqrt{(x-OB)^2+H^2}} \approx \frac{x}{\sqrt{x^2+H^2}},$$

так как $OB \ll x$ при малых h. Осталось подставить полученное выражение для $\sin\alpha$ в формулу и произвести алгебраические преобразования:

$$h_1 = \frac{n^2hH^3}{\left((n^2-1)\,x^2+n^2H^2\right)^{3/2}}.$$

Учитывая, что по условию задачи $x = L/2$, приходим к окончательному ответу:

$$h_1 \approx 0{,}40\text{м}$$

11.3. (6 баллов) В экспериментальной установке используется длинная горизонтальная цилиндрическая трубка площадью поперечного сечения S = 100см^2, внутри которой находятся два поршня массами $M_1 = 2$ кг и $M_2 = 3$ кг, которые могут перемещаться вдоль оси трубки практически без трения. Между поршнями заключён один моль кислорода O_2, который можно считать идеальным газом. Установка помещена в камеру, где поддерживается внешнее давление в пол-атмосферы $p_0 = 0{,}5\,p_{\text{атм}}$. К поршням снаружи прикладывают постоянные силы $F_1 = 600$ Н и $F_2 = 500$ Н, направленные вдоль оси трубки навстречу друг другу. Газ находится в тепловом контакте с термостатом, поэтому его температура всё время остаётся постоянной и равной $T = 300$К.

[3] Определите установившееся расстояние между поршнями, после того как к ним приложили силы.

Замечание. При решении принять атмосферное давление равным $p_{\text{атм}} = 1 * 10^5$Па.

(А.А. Черенков)

Ответ: 2 м.

Решение.

В установившемся режиме система будет двигаться с ускорением, определяемым из соотношения

$$(M_1+M_2+m)\,a = F_1 - F_2.$$

где m - масса кислорода. Поскольку масса газа много меньше массы поршней, то можно считать, что

$$a = \frac{F_1-F_2}{M_1+M_2},$$

а давление p газа всюду постоянно и определяется из условия

$$M_1a = -pS + p_0S + F_1.$$

Отсюда

$$p = \frac{M_2F_1 + M_1F_2}{(M_1 + M_2)\,S} \; + \; p_0 \; = \; \frac{M_2F_1 + M_1F_2 + \; p_0S\,(M_1 + M_2)}{(M_1 + M_2)\,S}.$$

Объём газа равен

$$V = \frac{\nu RT}{p} = \frac{\nu RTS\,(M_1 + M_2)}{M_2F_1 + M_1F_2 + \; p_0S\,(M_1 + M_2)},$$

где $\nu = 1$ моль, и установившееся расстояние между поршнями равно

$$x = \frac{V}{S} = \frac{\nu RT\,(M_1 + M_2)}{M_2F_1 + M_1F_2 + \; p_0S\,(M_1 + M_2)} \approx 2 \ \text{ м.}$$

11.4. (8 баллов) В музее редкую рукопись решили защитить от яркого освещения. Для этого перед витриной установили пять одинаковых тонких стеклянных защитных экранов, расположив их параллельно друг другу. Свет от ламп падает практически перпендикулярно поверхности стёкол. Известно, что для одной такой стеклянной пластинки при нормальном падении света 8% энергии отражается, а 92% проходит через пластинку, то есть коэффициенты отражения и пропускания равны $R = 0{,}08$ и $T = 0{,}92$.

[4] Найдите коэффициент пропускания получившейся защитной установки.

(А.А. Черенков)

Ответ: 0,70.

Решение.

Основная трудность, возникающая при решении этой задачи, связана с тем, что свет многократно отражается от поверхностей пластинок внутри стопки. Поэтому для того, чтобы найти ответ, нужно получить рекуррентную формулу, показывающую, как изменяется коэффициент пропускания стопки из n пластинок при добавлении к ней ещё одной пластинки.

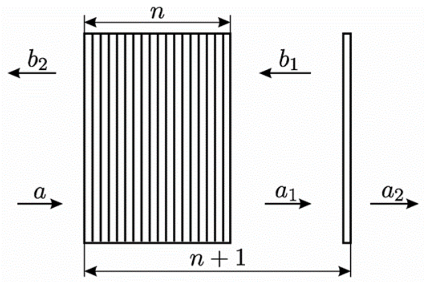


Рисунок. Стопка из стеклянных пластин.

Пусть стопка из n пластинок имеет коэффициент пропускания T_n. Добавим к ней ещё одну пластинку, получив, таким образом, «составную» стопку из $n+1$ пластинки. Пусть на полученную стопку падает волна с интенсивностью a. Обозначим интенсивности волн, распространяющихся снаружи и внутри нашей «составной» стопки, так, как показано на рисунке. Учитывая, что $R_n = 1 - T_n$, получим систему уравнений:

$$a_2 = Ta_1,$$

$$b_1 = (1 - T)a_1,$$

$$a_1 = T_na + (1 - T_n)\,b_1,$$

$$b_2 = (1 - T_n)\,a + T_nb_1.$$

Решая её, найдём:

$$\frac{a}{a_2} = \frac{1}{T_{n+1}} = \frac{1}{T_n} + \frac{1-T}{T}.$$

Это и есть искомая рекуррентная формула. Из неё можно получить явную зависимость коэффициента пропускания T_n от числа пластинок n в стопке. Действительно, если пластинок в стопке всего две ($n+1=2$), то

$$\frac{1}{T_2} = \frac{1}{T} + \frac{1-T}{T}.$$

Далее, при $n+1=3$:

$$\frac{1}{T_3} = \frac{1}{T_2} + \frac{1-T}{T} = \frac{1}{T} + 2\frac{1-T}{T}.$$

Продолжая аналогичные выкладки, для стопки из n пластинок получим:

$$\frac{1}{T_n} = \frac{1}{T} + (n-1)\frac{1-T}{T} = \frac{T+n(1-T)}{T},$$

откуда

$$T_n = \frac{T}{T+n(1-T)} = \frac{T}{T+nR}.$$

При $T = 0{,}92$, n = 5:

$$T_5 = \frac{0{,}92}{0{,}92 + 0{,}08\cdot 5} \approx 0{,}70.$$

11.5. (8 баллов) После лабораторной работы в школе Маша осталась прибирать класс. На партах стояли мензурки, заполненные жидкостью плотностью $\rho_0 = 0{,}80$г/см^3, а на стенках мензурок были нанесены деления. Девочка заметила, что сферический пузырёк воздуха диаметром $d_1 = 3{,}0$ мм всплывает в жидкости, проходя каждую секунду по одному делению, а пузырек втрое большего диаметра за это же время проходил по три деления. Когда Маша бросила в жидкость сферическую металлическую дробинку плотностью $\rho_3 = 4{,}0$г/см^3 и диаметром $d_3 = 9{,}0$ мм, то она опускалась на дно, проходя по три деления каждые полсекунды. Затем она взяла шарик для пинг-понга диаметром $d_4 = 3{,}0$ см и плотностью $\rho_4 = 0{,}08$г/см^3 и опустила его на дно мензурки.

[5] С какой скоростью будет всплывать шарик, если деления мензурки нанесены с шагом l = 5,0 см?

Замечание. При решении считать, что сила вязкого трения жидкости зависит от скорости и диаметра шарика по степенному закону, который одинаков для всех тел. (*А.А. Черенков*)

Ответ: 0,5 м/с.

Решение.

1) Прежде всего заметим, что все тела в задаче за равные промежутки времени проходят равные расстояния, а значит они двигаются равномерно. Тогда скорости первого и второго пузырька, а также дробинки соответственно равны:

$$v_1 = l/t \qquad v_2 = 3v_1 \qquad v_3 = 2v_2$$

где t равно 1 секунде.

2) При движении шарика в жидкости на него действуют сила тяжести F_T, направленная вниз, сила Архимеда F_A, направленная вверх, и сила вязкого трения $F_{\text{тр}}$, зависящая, как это следует из условия задачи, от скорости и от диаметра шарика. Две первые силы являются объёмными. Это значит, что их разность пропорциональна разности $\rho - \rho_0$ (ρ — плотность шарика) и объёму шарика, то есть кубу его диаметра d:

$$|F_T - F_A| = A\,|\rho - \rho_0|\,d^3.$$

Здесь A — коэффициент пропорциональности. Предположим, что сила вязкого трения зависит от диаметра шарика d и его скорости v следующим образом:

$$F_{\text{тр}} = Bd^n v^m,$$

где B — коэффициент пропорциональности, n и m — неизвестные показатели степени. При движении с постоянной скоростью разность сил тяжести и Архимеда равна по величине силе вязкого трения. Тогда для пузырька диаметром d_1 имеем:

$$A\rho_0 d_1^3 = Bd_1^n v_1^m,$$

откуда

$$v_1 = \sqrt[m]{\frac{A}{B}\rho_0 d_1^{3-n}}.$$

Аналогично, для пузырька втрое большего диаметра получаем

$$v_2 = \sqrt[m]{\frac{A}{B}\rho_0\,(3d_1)^{3-n}} = 3v_1 = 3\sqrt[m]{\frac{A}{B}\rho_0 d_1^{3-n}},$$

откуда следует уравнение

$$3^{(3-n)/m} = 3^1, \qquad \text{или} \qquad 3 - n = m.$$

Далее, для дробинки диаметром d_3, учитывая, что $v_3 = 2v_2$ и $\rho_3 = 5\rho_0$, получаем:

$$v_3 = \sqrt[m]{\frac{A}{B}\,(\rho_3 - \rho_0)\,d_3^{3-n}} = \sqrt[m]{\frac{A}{B}\cdot 4\rho_0\,d_3^{3-n}} = 2\sqrt[m]{\frac{A}{B}\rho_0 d_0^{3-n}},$$

откуда находим, что $m = 2$. Зная m, определяем, что $n = 1$. Значит, зависимость $F_{\text{тр}}(d,v)$ имеет следующий вид:

$$F_{\text{тр}} = Bdv^2.$$

Теперь можно найти скорость u, с которой будет всплывать шарик для пинг понга. Учитывая, что его плотность равна $\rho_4 = \frac{1}{10}\rho_0$, а диаметр $d_4 = 10d_1$ получаем:

$$u = \sqrt{\frac{A}{B}\,(\rho_0 - \rho_4)\,d_4^2} = \sqrt{\frac{A}{B}\left(\rho_0 - \frac{1}{10}\rho_0\right)(10d_1)^2} = \sqrt{90\frac{A}{B}\rho_0 d_1^2} = \sqrt{90}v_1 = \sqrt{90}\frac{l}{t} \approx 47{,}4 \text{ см/с}.$$

Округляем.