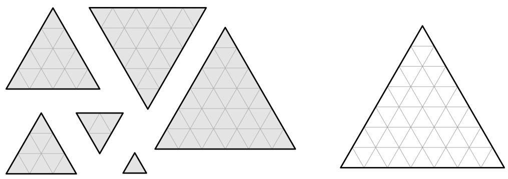
Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2025-2026 учебный год. Заключительный этап

Решения задач для 5 класса

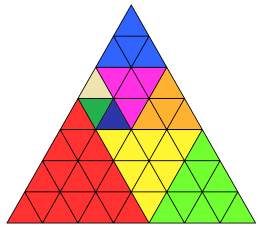
Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.
Оценка в 1–3 балла означает, что задача в целом не решена, но есть существенные продвижения; оценка в 4–6 баллов — задача в целом решена, но есть существенные недостатки.
Для некоторых задач есть частные критерии, указанные ниже.

---

1. Конструктор состоит из равносторонних треугольников со сторонами 1, 2, 3, 4, 5 и 6 (по 50 штук каждого размера). Ирина хочет собрать равносторонний треугольник со стороной 7, используя некоторые из имеющихся деталек, укладывая их без наложений и дыр. Помогите ей справиться ровно 9 детальками. (*Л. С. Корешкова*)



Ответ: Например, так, как показано справа.



Критерии. Верный пример — 7 баллов.

Использовано 10 деталек вместо 9 — 1 балл.

Есть пересечения или выступы за край — 0 баллов. Приведены только количества деталей — 0 баллов.

2. В каждую пустую клетку квадрата 3×3 справа надо поставить по одной цифре так, чтобы во всех строках и столбцах сумма была одинакова, а всякая цифра присутствовала в квадрате хотя бы дважды (или отсутствовала). Найдите все решения и докажите, что других нет. (*П. Д. Муленко*)

2		
		3
4	2	

Ответ: Это можно сделать только одним способом:

2	4	3
3	3	3
4	2	3

Решение. Обозначим левое число в средней строке за x. Тогда, из левого столбца, сумма должна быть равна $x + 6$, откуда:

2	$x+1$	3
x	3	3
4	2	x

- в средней строке центральное число должно быть равно $x+6-x-3 = 3$,
- в нижней строке правое число должно быть равно $x + 6 - 2 - 4 = x$,
- в правом столбце верхнее число должно быть равно $x + 6 - x - 3 = 3$,
- наконец, центральное число в верхней строке должно быть равно $x + 6 - 2 - 3 = x + 1$.

Поскольку каждая цифра должна быть представлена хотя бы дважды, какая-то из неизвестных цифр должна быть равна 4. Если $x = 4$, то тогда центральная цифра верхней строки равна 5, но эта цифра больше нигде не повторяется. Значит, $x+1 = 4$, и другие две незаполненные клетки содержат цифру 3.

Критерии. Только пример без какого-либо обоснования — 2 балла.

Доказано, что в центре и в правом верхнем углу стоят тройки — +1 балл за каждую.

Среди возможных заполнений есть хотя бы одно неправильное — 0 баллов.

3. Буратино посадил на Поле Чудес монету, из которой прорастёт денежное дерево, на конце

каждой веточки которого будет висеть по монете. Раз в месяц монеты приносят «потомство»: если монета была золотая, то из неё вырастает 5 веточек с серебряной монетой на каждой, а если серебряная, то две веточки с золотой монетой на каждой. Старые монеты при этом исчезают.

(a) Через некоторое время Буратино собрал с дерева весь урожай — 2000 монет. Какую монету посадил Буратино и сколько месяцев он ждал?

(b) Кот Базилио утверждает, что он тоже посадил монету и через некоторое время обнаружил, что на его дереве 4000 монет. Может ли он говорить правду? (*П. Д. Муленко*)

Ответ: (a) Буратино посадил серебряную монету и ждал 7 месяцев; (b) нет.

Решение (a). Из условия следует, что если в текущем месяце все монеты на дереве были серебряные, то в следующем будут золотые, и наоборот. Таким образом, монеты чередуются, поэтому их общее количество умножается то на 2, то на 5.

$2000 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2$, то есть из самой первой монеты проросло 2 веточки (то есть Буратино посадил серебряную монету), и ждать потребовалось ровно 7 месяцев.

Решение (b). Как было показано в пункте (a), монеты чередуются, поэтому их общее количество умножается то на 2, то на 5. Если Базилио посадил серебряную монету, то через 7 месяцев на его дереве будет $2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 = 2000$ монет (как и получилось у Буратино), а через 8 месяцев их станет в 5 раз больше, то есть уже 10000 монет. А если Базилио посадил золотую монету, то через 6 месяцев на его дереве будет $5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 = 1000$ монет, а ещё через месяц их будет в 5 раз больше, то есть 5000. И в том, и в другом случае количество монет в какой-то месяц меньше 4000, а в следующий уже больше 4000, то есть ровно 4000 монет Базилио получить никак не мог.

Другое решение (b). Как было показано в пункте (a), монеты чередуются, поэтому их общее количество умножается то на 2, то на 5. Из этого, в том числе, следует, что в любой момент количество монет на дереве равно произведению нескольких двоек и пятерок, причём количество двоек и пятёрок не может отличаться больше чем на 1. Но 4000 равно произведению 3 пятёрок и 5 двоек, поэтому такое количество монет не могло получиться.

Критерии. Пункт (a) оценивается в 3 балла — по 1 баллу за ответ, пример и доказательство единственности.

Пункт (b) оценивается из 4 баллов:

Приведён только ответ «да» или «нет» — 0 баллов;

В 1-м решении каждый разобранный случай даёт по 2 балла;

Во 2-м решении отсутствие объяснения, почему степени 2 и 5 могут отличаться на 0 или ± 1 — -1 балл.

4. Миша записал верный арифметический пример на сложение. Потом заменил в нём каждую цифру буквой (разные цифры — разными буквами, а одинаковые — одинаковыми), но при этом в одном месте ошибся, заменив цифру не той буквой. В результате у него получился пример $ONE + ONE = TWO$. Какое максимальное значение могло принимать число справа от знака «равно» в его примере, прежде чем он заменил цифры буквами? Докажите, что оно действительно максимальное. (*А. А. Теслер*)

Ответ: 986 ($643 + 343 = 986$ или $ONE + ENE = TWO$)

Решение. Так как мы ищем наибольшее значение результата сложения, будем подставлять в TWO наибольшие возможные цифры.

Если $TWO = 99*$, то $T = W$ и ошибка найдена, то есть в левой части выражения ошибок нет. Тогда O обязана равняться 4 ($5{*}{*} + 5{*}{*} > 1000$, $3{*}{*} + 3{*}{*} < 900$), то есть $TWO = 994$ и $ONE = 994 : 2 = 497$, но тогда $T = W = N = 9$, то есть ошибок больше одной. Следовательно, $TWO = 98*$.

Если TWO — 989 или 987 (то есть нечётное число), то ошибка должна быть в буквах E (если слагаемые оканчиваются одной и той же цифрой, то сумма будет чётна), то есть обе O в левой части должны равняться 4, что приводит ко второй ошибке, так как O в правой части — нечётная цифра.

Если $TWO = 988$, то одна ошибка уже есть ($W = O = 8$), но тогда $ONE = 988/2 = 494$, то есть $O = E$, и ошибок снова больше одной.

Если $TWO = 986$, то находим подходящий пример: $643 + 343 = 986$, который корректно зашифровывается как $ONE + ENE = TWO$.

Критерии. Только верный пример — 3 балла.

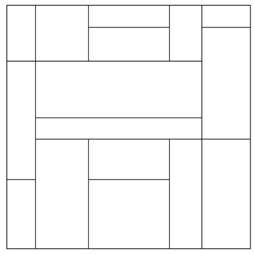
Получен ответ $492 + 492 = 984$ — 2 балла.

Доказана невозможность случая $TW = 99$ — +1 балл.

В оценке рассматриваются только чётные значения числа TWO — −1 балл.

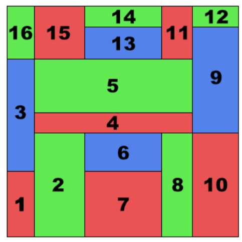
В случае неверного понимания условия (например, что Миша ошибся в арифметике, а не в шифровании) — 0 баллов.

5. Незнайка нарисовал картинку справа и заявил, что её можно раскрасить в три цвета так, чтобы любые два прямоугольника, имеющие общую сторону, были разных цветов (прямоугольники, касающиеся только в точке, могут быть одного цвета). Знайка ответил, что таких раскрасок больше одной. Сколькими способами можно раскрасить картинку? Две раскраски считайте различными, если хотя бы один прямоугольник окрашен в другой цвет. (*П. Д. Муленко*)



Ответ: 6.

Решение. Пронумеруем прямоугольники (для краткости будем называть их «блоками») от 1 до 16, как показано на рисунке.



Первые 3 блока все касаются друг друга, поэтому должны быть различных цветов. Первый блок можно закрасить любым из трёх доступных цветов; второй блок можно закрасить любым из двух оставшихся цветов; третий блок можно закрасить только последним оставшимся цветом — всего $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ способов закрасить эти три блока.

После этого цвета всех остальных блоков определяются однозначно.

Так, четвёртый блок граничит со вторым и третьим, поэтому он может быть только того же цвета, что и первый блок. Пятый блок граничит с третьим и четвёртым, поэтому он может быть только того же цвета, что и второй блок. И так далее.

Таким образом, покраска первых трёх блоков определяет раскраску всего квадрата. Значит, всего есть 6 возможных раскрасок.

Критерии. Приведён только ответ — 2 балла.

Приведено только несколько каких-то раскрасок, среди которых нет 6 различных правильных, и больше ничего — 0 баллов.

Указано, что раскраски трёх блоков достаточно для раскраски всего квадрата — +3 балла.

Приведена правильная раскраска (без доказательства единственности) и формула перестановок — 3 балла.

6. В эксперименте принимают участие несколько (один или больше) реальных людей и несколько ИИ (искусственных интеллектов). Каждый участник отправляет всем остальным по «мему» (смешной картинке), но, так как ИИ воспринимает юмор не совсем так, как люди, человеческие мемы смешны всем, а мемы ИИ — только таким же ИИ.

По результатам эксперимента оказалось, что количество «неловких» обменов мемами, когда засмеялся только один из двух участников обмена, равно 93. А сколько могло быть «комфортных» ситуаций, когда оба участника смеются над мемами друг друга? Найдите все варианты и докажите, что других нет. (*П. Д. Муленко*)

Ответ: 468 или 4278.

Решение. Обозначим число людей, участвующих в эксперименте, за x, а число ИИ — за y. Обмен будет неловким, только когда в нём принимают участие один человек и один ИИ, поэтому количество неловких обменов равно количеству пар вида «человек—ИИ», то есть произведению числа людей и числа ИИ: $xy = 93$. Так как обе переменных положительны, такое возможно в двух ситуациях: $93 = 3 \cdot 31 = 1 \cdot 93$ (какой именно из множителей равен x, а какой — y, не принципиально).

В комфортной же ситуации, поскольку смеются оба участника обмена, участвуют или два человека, или два ИИ. Каждый из x человек посылает по одному мему остальным $x - 1$ людям, откуда количество комфортных обменов между людьми равно $\frac{x(x-1)}{2}$ (пополам, так как каждый обмен мы учитываем дважды). Аналогично, количество комфортных обменов между ИИ равно $\frac{y(y-1)}{2}$.

Итого, общее количество комфортных ситуаций равно $\frac{x(x-1)}{2} + \frac{y(y-1)}{2}$ при x и y, равным 3 и 31 или 1 и 93:

$$\frac{3 \cdot (3-1)}{2} + \frac{31 \cdot (31-1)}{2} = 3 + 31 \cdot 15 = 468 \quad \text{или} \quad \frac{1 \cdot (1-1)}{2} + \frac{93 \cdot (93-1)}{2} = 93 \cdot 46 = 4278.$$

Критерии. Найден только один ответ — не более 3 баллов.

Приведены только ответы без объяснения — +1 балл за каждый.

Написана (или объяснена) формула для подсчёта комфортных ситуаций — +2 балла.

* Получен ответ 468, а вариант 4278 исключён, так как «несколько» это «больше одного» — не более 5 баллов.

* Выписаны делители числа 93 — 1 балл.

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2025-2026 учебный год. Заключительный этап

Решения задач для 6 класса

Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.
Оценка в 1–3 балла означает, что задача в целом не решена, но есть существенные продвижения; оценка в 4–6 баллов — задача в целом решена, но есть существенные недостатки.
Для некоторых задач есть частные критерии, указанные ниже.

1. Маша учится умножать числа в столбик, но делает это неправильно: она перемножает цифры в одном разряде, добавляет к ним перенос из предыдущего разряда, пишет младшую цифру результата на соответствующее место в ответе, а старшую цифру результата переносит дальше. Например, $37 \otimes 49 = 183$ (см. справа). Может ли Маша умножить какое-нибудь число само на себя и получить 2026? *(Е. Ю. Воронецкий)*

$$\begin{array}{rccc} & & 1 & 6 \\ & & 3 & 7 \\ \otimes & & 4 & 9 \\ \hline & 1 & 8 & 3 \end{array}$$

Ответ: да, а именно $1336 \otimes 1336$.

Примечание. Можно доказать, что это единственный пример.

Критерии. Только ответ «да» или «нет» — 0 баллов.

Приведён верный пример числа (1336) без проверки и/или пояснения — 7 баллов.

2. В каждую пустую клетку квадрата 3×3 справа надо поставить по одной цифре так, чтобы во всех строках и столбцах сумма была одинакова и при этом ровно одна цифра присутствовала в квадрате ровно 1 раз (все остальные цифры должны присутствовать хотя бы дважды или отсутствовать вовсе). Найдите все решения и докажите, что других нет. *(П. Д. Муленко)*

6	9	
		7
8		

Ответ: Есть 2 способа:

6	9	7
8	7	7
8	6	8

6	9	8
9	7	7
8	7	8

Решение. Обозначим число в правом верхнем углу за x. Тогда, из верхней строки, сумма должна быть равна $x + 15$, откуда:

- в правом столбце нижнее число должно быть равно $x + 15 - x - 7 = 8$,
- в левом столбце среднее число должно быть равно $x + 15 - 6 - 8 = x + 1$,
- в нижней строке среднее число должно быть равно $x + 15 - 8 - 8 = x - 1$,
- наконец, центральное число в средней строке должно быть равно $x + 15 - (x + 1) - 7 = 7$.

6	9	x
$x+1$	7	7
8	$x-1$	8

Цифры 6 и 9 представлены по одному разу на текущий момент, а, согласно условию, только одна цифра во всей таблице должна присутствовать один раз. Значит, одной из трёх неизвестных цифр является или 6, или 9. Перебирая 6 возможных случаев, находим два подходящих: когда $x - 1 = 6$, или когда $x + 1 = 9$ (в иных случаях среди неизвестных цифр будут ещё уникальные).

Критерии. Только примеры без какого-либо обоснования — +1 балл за каждый.

Доказано, что в центре стоит цифра 7 — +1 балл.

Доказано, что в правом нижнем углу стоит цифра 8 — +1 балл.

Среди возможных заполнений есть хотя бы одно неправильное — 0 баллов.

3. Пусть N — натуральное число, состоящее из 2026 цифр. Из них 46 цифр равны нулю, а количества остальных цифр (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) находятся в соотношении $1:2:3:4:5:6:7:8:9$ (именно в таком порядке). Докажите, что число N не может оказаться точным квадратом.

(*Л. С. Корешкова*)

Решение. Обозначим количество единиц в числе за x. Тогда двоек — $2x$, троек — $3x$, ..., девяток — $9x$, и всего цифр в числе $x+2x+3x+\ldots+9x+46=2026$, откуда $45x=1980$, и $x=44$. Тогда сумма цифр равна $44\cdot(1\cdot 1+2\cdot 2+\ldots+9\cdot 9)+46\cdot 0=44\cdot 285$, то есть делится на 3, но не на 9. Значит, и N кратно трём, но не 9, а такое число не может быть точным квадратом.

Критерии. Найдено количество единиц — 1 балл.

Рассуждение в целом верное, но допущена арифметическая ошибка, не повлиявшая на делимость — 5 баллов.

4. Миша записал верный арифметический пример на сложение. Потом заменил в нём каждую цифру буквой (разные цифры — разными буквами, а одинаковые — одинаковыми), но при этом в одном месте ошибся, заменив цифру не той буквой. В результате у него получился пример $TWO+TWO=FOUR$. Какое максимальное значение могло принимать четырёхзначное число в его примере, прежде чем он заменил цифры буквами? Докажите, что оно действительно максимальное.

(*А. А. Теслер*)

Ответ: 1972 ($986+986=1972$ или $TWO+TWO=FTUR$)

Решение. Так как складываются 2 трёхзначных числа и получается четырёхзначное, то $F=1$. Для получения наибольшего результата T должно быть равно 9, а также цифра сотен результата (на месте которой стоит O) может быть равна 9 (то есть правильный пример выглядит так: $TWO+TWO=FTUR$).

Тогда больше ошибок в Мишином примере нет, то есть слагаемые равны, а сумма чётна, причём цифры в каждом числе разные. Значит, слагаемые не превосходят 987. Но, если они равны 987, то сумма равна 1974, и появляется вторая ошибка ($O=U=7$). Если же $TWO=986$, то всё сходится: $986+986=1972$.

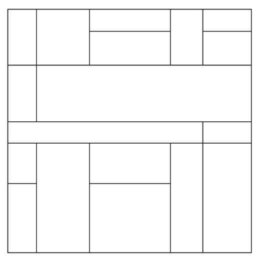
Примечание. В решении сразу предполагается, что ошибка в букве сотен результата. Если же это не так, то или цифра сотен результата не 9 (и тогда результат будет меньше 1972), или хотя бы одна из цифр сотен слагаемых не 9 (и тогда результат заведомо меньше $899+999=1898$, что тоже меньше 1972).

Критерии. Только верный пример без оценки — 2 балла.

Решение верное, но оценка неполная (например, при оценке через правую часть пропускаются нечётные числа) — не более 5 баллов.

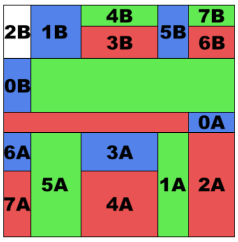
5. Незнайка нарисовал картинку справа и заявил, что её можно раскрасить в три цвета так, чтобы любые два прямоугольника, имеющие общую сторону, были разных цветов (прямоугольники, касающиеся только в точке, могут быть одного цвета). Знайка ответил, что таких раскрасок больше одной. Сколькими способами можно раскрасить картинку? Две раскраски считайте различными, если хотя бы один прямоугольник окрашен в другой цвет.

(*П. Д. Муленко*)



Ответ: 54.

Решение. Подпишем прямоугольники (для краткости будем называть их «блоками»), как показано на рисунке.



Сперва рассмотрим центральную полоску из блоков 0A, 0B и двух неподписанных. Тройка блоков из двух неподписанных и 0A все касаются друг друга, поэтому должны быть различных цветов. Первый неподписанный блок можно закрасить любым из трёх доступных цветов; второй неподписанный блок можно закрасить любым из двух оставшихся цветов; третий блок 0A можно закрасить только последним оставшимся цветом — всего $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ способов закрасить эти три блока. Блок 0B тоже касается обоих неподписанных, поэтому его цвет будет таким же, как и у блока 0A.

Теперь рассмотрим верхнюю и нижнюю полоски из блоков 1A–7A и 1B–7B. Эти две группы идентичны друг другу по тому, как блоки граничат друг с другом, поэтому будем рассматривать их вместе.

Если блок с номером 1 имеет отличный цвет от соответствующего блока 0 (что продемонстрировано в нижней полоске на примере блоков 0A и 1A), то цвета всех остальных блоков восстанавливаются однозначно. Так, блок 2 граничит и с блоком 0, и с блоком 1, поэтому он должен быть третьего цвета; блок 3 граничит и с блоком 1, и с одним из неподписанных блоков, поэтому он должен быть того же цвета, что и блок 0; и так далее.

А если же блок с номером 1 окрашен в тот же цвет, что и соответствующий блок 0 (что продемонстрировано в верхней полоске на примере блоков 0B и 1B), то тогда блок 2 может быть раскрашен в любой из двух других цветов, а все остальные блоки в полоске закрашиваются однозначно.

Таким образом, есть 6 возможных раскрасок для центральной полосы из 4 блоков (двух неподписанных, 0A и 0B), и по 3 возможных раскраски для верхней и нижней полос (из блоков 1B–7B и 1A–7A, соответственно). Всего $6 \cdot 3 \cdot 3 = 54$ возможных раскраски.

Критерии. Приведён только ответ — 2 балла.

Приведена только одна какая-то раскраска и больше ничего — 0 баллов.

Вне зависимости от логики перебора, каждый потерянный случай — −2 балла.

6. В эксперименте принимают участие несколько (один или больше) реальных людей и несколько ИИ (искусственных интеллектов). Каждый участник отправляет всем остальным по «мему» (смешной картинке), но, так как ИИ воспринимает юмор не совсем так, как люди, человеческие мемы смешны всем, а мемы ИИ — только таким же ИИ.

По результатам эксперимента оказалось, что количество «неловких» обменов мемами, когда засмеялся только один из двух участников обмена, равно 520. А каково наименьшее возможное количество «комфортных» ситуаций, когда оба участника засмеялись над мемами друг друга? (*П. Д. Муленко*)

Ответ: 515.

Решение. Обозначим число людей, участвующих в эксперименте, за x, а число ИИ — за y. Обмен будет неловким, только когда в нём принимают участие один человек и один ИИ, поэтому количество неловких обменов равно количеству пар вида «человек—ИИ», то есть произведению числа людей и числа ИИ: $xy = 520$.

В комфортной же ситуации, поскольку смеются оба участника обмена, участвуют или два человека, или два ИИ. Каждый из x человек посылает по одному мему остальным $x-1$ людям, откуда количество комфортных обменов между людьми равно $\frac{x(x-1)}{2}$ (пополам, так как каждый обмен мы учитываем дважды). Аналогично, количество комфортных обменов между ИИ равно $\frac{y(y-1)}{2}$.

Итого, общее количество комфортных ситуаций равно $\frac{x(x-1)}{2} + \frac{y(y-1)}{2}$. Переберём возможные пары x и y, дающие в произведении 520: поскольку $520 = 13 \cdot 5 \cdot 2^3$, то его делитель, не кратный 13, равен 1, 2, 4, 8, 5, 10, 20 или 40. Наименьшее значение получается при $x = 20$ и $y = 26$ (или наоборот):

$$\frac{20 \cdot (20-1)}{2} + \frac{26 \cdot (26-1)}{2} = 10 \cdot 19 + 13 \cdot 25 = 515.$$

Примечание. Найти минимальное количество комфортных ситуаций можно и без перебора — например, через формулы сокращённого умножения:

$$\frac{x(x-1)}{2} + \frac{y(y-1)}{2} = \frac{x^2+y^2-x-y}{2} = \frac{(x+y)^2-(x+y)-2xy}{2} = \frac{(x+y)(x+y-1)}{2} - xy.$$

Это выражение будет минимальным при наименьшем возможном значении $x+y$ (то есть при наименьшем общем числе участников), которое, при фиксированном произведении, будет достигаться при наименьшей возможной разности между x и y, то есть при 20 и 26.

Критерии. Приведён только ответ без объяснения — 2 балла.

Написана (или объяснена) формула для подсчёта комфортных ситуаций — +2 балла.

При верном ходе решения найдено не наименьшее возможное значение — не более 4 баллов.

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2025-2026 учебный год. Заключительный этап

Решения задач для 7 класса

Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.
Оценка в 1–3 балла означает, что задача в целом не решена, но есть существенные продвижения; оценка в 4–6 баллов — задача в целом решена, но есть существенные недостатки.
Для некоторых задач есть частные критерии, указанные ниже.

---

1. Маша учится умножать числа в столбик, но делает это неправильно: она перемножает цифры в одном разряде, добавляет к ним перенос из предыдущего разряда, пишет младшую цифру результата на соответствующее место в ответе, а старшую цифру результата переносит дальше. Например, $37 \otimes 49 = 183$ (см. справа). Может ли Маша умножить какое-нибудь число само на себя и получить 2026? (*Е. Ю. Воронецкий*)

$$\begin{array}{cccc} & & 1 & 6 \\ & & 3 & 7 \\ \otimes & & 4 & 9 \\ \hline & 1 & 8 & 3 \end{array}$$

Ответ: да, а именно $1336 \otimes 1336$.

Примечание. Можно доказать, что это единственный пример.

Критерии. Только ответ «да» или «нет» — 0 баллов.

Приведён верный пример числа (1336) без проверки и/или пояснения — 7 баллов.

2. Буратино посадил на Поле Чудес монету, из которой прорастёт денежное дерево, на конце каждой веточки которого будет висеть по монете. Раз в месяц из каждой монеты прорастает «потомство» в виде 2 или 5 новых веточек с монетами (старые монеты при этом исчезают). Через некоторое количество месяцев Буратино собрал с дерева весь «урожай» в размере 2026 монет. Какое наибольшее количество месяцев могло пройти? (*П. Д. Муленко*)

Ответ: 10.

Решение. Так как каждый месяц из монеты прорастает или 2, или 5 новых монет, то общее число монет на дереве за месяц как минимум удваивается (а как максимум, увеличивается в 5 раз). Это означает, что через 10 месяцев количество монет на дереве не меньше чем $2^{10} = 1024$, а через 11 месяцев — не менее чем $1024 \cdot 2 = 2048$, что уже больше, чем 2026. Значит, могло пройти не более 10 месяцев.

При этом необходимо показать, что такое вообще могло пройзойти (то есть что Буратино действительно мог собрать ровно 2026 монет). Предположим, что в первые 9 месяцев из каждой монеты прорастало 2 веточки, тогда их будет ровно $1024/2 = 512$. И если в последний месяц из 334 монет прорастёт по 5 новых монет, а из остальных $512 - 334 = 178$ монет прорастёт только по 2 новые монеты, то общее число монет как раз будет $334 \cdot 5 + 178 \cdot 2 = 2026$.

Критерии. Только ответ без объяснения — 1 балл.

Доказана только оценка (без примера) — 3 балла.

Дан только пример на 10 месяцев — 4 балла.

3. 2130 год будет «годом-перевёртышем» — если поставить знак «минус» между второй и третьей цифрами, то разность двух двузначных чисел, прочитанных слева направо, будет равна разности двузначных чисел, прочитанных справа налево: $21 - 30 = 03 - 12 = -9$. Сколько всего таких лет в третьем тысячелетии?

Примечание. Как видно из примера, числа могут начинаться с нуля, а разность не обязана быть положительной. (*Л. С. Корешкова*)

Ответ: 69 лет.

Решение. Расписав равенство по разрядам, приходим к выводу, что сумма первых двух должна быть равна сумме последних двух:

$$10a + b - (10c + d) = 10d + c - (10b + a) \quad \Rightarrow \quad 11(a + b) = 11(c + d) \quad \Rightarrow \quad a + b = c + d.$$

А так как нас интересуют годы в третьем тысячелетии, то $a = 2$ (см. замечание в конце решения). Таким образом, достаточно перебрать возможные значения остальных цифр (например, по столетиям):

- $b = 0$: $c + d = 2 \to 2002, 2011, 2020$ — 3 года;
- $b = 1$: $c + d = 3 \to 2103, 2112, 2121, 2130$ — 4 года;
- $b = 2$: $c + d = 4 \to 2204, 2213, 2222, 2231, 2240$ — 5 лет;
- $b = 3$: $c + d = 5 \to 2305, 2314, \ldots, 2350$ — 6 лет;
- $b = 4$: $c + d = 6 \to 2406, 2415, \ldots, 2460$ — 7 лет;
- $b = 5$: $c + d = 7 \to 2507, 2516, \ldots, 2670$ — 8 лет;
- $b = 6$: $c + d = 8 \to 2608, 2617, \ldots, 2680$ — 9 лет;
- $b = 7$: $c + d = 9 \to 2709, 2718, \ldots, 2790$ — 10 лет;
- $b = 8$: $c + d = 10 \to 2819, 2828, \ldots, 2891$ — 9 лет;
- $b = 9$: $c + d = 11 \to 2929, 2938, \ldots, 2992$ — 8 лет.

Всего получаем $3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 9 + 8 = 69$ лет-перевёртышей.

Примечание. Строго говоря, третьим тысячелетием является диапазон лет с 2001 по 3000, но, так как ни 2000-й год, ни 3000-й не являются перевёртышами, мы можем смело рассматривать диапазон с 2000 по 2999 годы.

Критерии. Доказано, что сумма двух первых цифр равна сумме двух последних — не менее 3 баллов. Наоборот, если перечислены (и верно подсчитаны) все годы-перевёртыши, но полностью отсутствует доказательство, что других нет — 2 балла.

Неправильно подсчитаны годы-перевёртыши в каких-то столетиях — не больше 5 баллов.

Рассматривается диапазон 2000–2999 вместо 2001–3000 — баллов не снимать.

4. Сколькими способами можно заменить буквы a, b, c, d, e в выражении справа цифрами от 0 до 4 (использовав по одному разу каждую) так, чтобы оно равнялось натуральному числу? (*П. Д. Муленко*)

$$a + \cfrac{b}{c + \cfrac{d}{e}}$$

Ответ: 44.

Решение. Чтобы всё выражение было целым числом, необходимо и достаточно, чтобы второе слагаемое (дробь) было целым числом.

Если $b = 0$, то вся дробь равна 0, и любая расстановка остальных цифр будет давать целый результат. Необходимо расставить 4 цифры на 4 места, что можно сделать $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ способами.

Если $d = 0$, то дробь вырождается в b/c, которая может быть целой в 4 случаях (2/1, 3/1, 4/1 и 4/2), после чего оставшиеся 2 цифры можно поставить на места букв a и e в произвольном порядке — $4 \cdot 2 = 8$ допустимых расстановок.

Если $c = 0$, то дробь преобразуется в be/d. Она будет целым числом в двух случаях:

- если $d = 1$, и тогда вместо b и e можно расставить любые две цифры и 3 оставшихся $3 \cdot 2 = 6$ способами, и на место a отправляется последняя оставшаяся цифра);
- если $d = 2$, и тогда одна из букв b и e должна равняться 4, и остальные 2 цифры можно расставить в произвольном порядке — $2 \cdot 2 = 4$ расстановки.

Наконец, если ни одно из чисел в дроби не равно 0 (то есть $a = 0$), то дробь преобразуется в $\frac{be}{ce+d}$. Если тройка находится в знаменателе, то знаменатель будет иметь простой делитель больше 4, то есть не будет сократимой до целого ($1 \cdot 3 + 2 = 1 \cdot 2 + 3 = 5$, $2 \cdot 3 + 1 = 1 \cdot 3 + 4 = 1 \cdot 4 + 3 = 7$,

$3 \cdot 4 + 1 = 13$, $2 \cdot 3 + 4 = 10 = 5 \cdot 2$, $2 \cdot 4 + 3 = 11$, $4 \cdot 3 + 2 = 14 = 7 \cdot 2$). Значит, $b = 3$, а в знаменателе используются цифры 1, 2 и 4. Если $d = 1$, то знаменатель равен 9, и дробь не сократится нацело; иначе знаменатель равен $1 \cdot 2 + 4 = 1 \cdot 4 + 2 = 6$, и дробь будет сократима, если тройка в числителе умножается не на 1: $\frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2 + 4} = 1$ и $\frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 4 + 2} = 2$.
Итого есть $24 + 8 + 6 + 4 + 2 = 44$ допустимые расстановки цифр.

Критерии. Только ответ без объяснения — 2 балла.

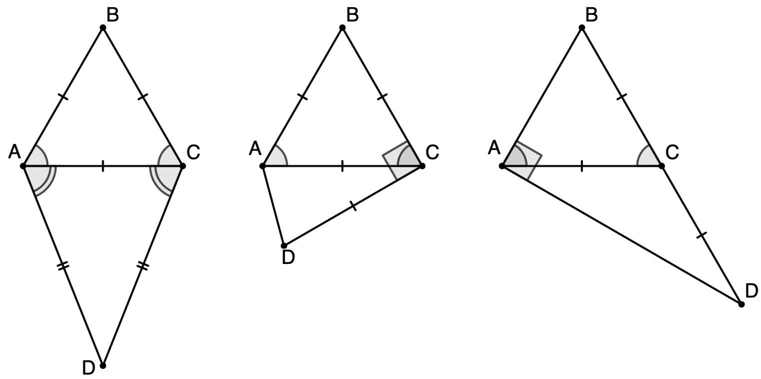
Каждое потерянное число при $a = 0$ — -1 балл.

Каждый потерянный случай равенства нулю одной из цифр b, c, d — -2 балла.

5. Дан выпуклый четырёхугольник с двумя острыми и одним тупым углами. Одна из диагоналей разбивает его на равносторонний и равнобедренный треугольники. Какими могут быть углы четырёхугольника? Найдите все варианты и докажите, что других нет. (*П. Д. Муленко*)

Ответ: Существует один такой четырёхугольник с углами 60°, 75°, 90° и 135°.

Решение. В выпуклом четырёхугольнике 4 угла. Если из них три являются тупым и острыми, то последний угол прямой. Более того, раз половинкой 4-угольника является равносторонний треугольник, то один из острых углов равен 60°. Нарисуем равносторонний треугольник ABC и посмотрим, как к нему можно пририсовать равнобедренный треугольник.



Если сторона равностороннего треугольника AB равна основанию равнобедренного (то есть в равнобедренном треугольнике ACD $AD = DC$, см. рис. слева), то углы BAD и BCD будут равны, что не сходится с условием ($\angle ABC = 60^\circ$, значит, остальные три угла четырёхугольника должны быть острым, тупым и прямым).
Значит, сторона AC равностороннего является боковой стороной равнобедренного ($AC = CD$). Угол D не может быть прямым (так как этот угол является углом при основании в равнобедренном треугольнике), значит, прямым углом является BAD или BCD.
Если $\angle BAD = 90^\circ$, тогда $\angle CAD = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$, и $\angle ACD = 180^\circ - 2 \cdot 30^\circ = 120^\circ$, но тогда $ABCD$ является треугольником, а не четырёхугольником (так как $\angle BCD = 180^\circ$ — см. рис. справа). Значит, $\angle BCD = 90^\circ$, тогда $\angle ACD = 30^\circ$, и $\angle CAD = \angle ADC = 75^\circ$.
Итого, углы четырёхугольника равны 60°, 90°, 75° и 135° (см. рис. в центре).

Критерии. Найден прямой угол — +1 балл.

Найден угол в 60° — +1 балл.

Не рассмотрен вырожденный случай с углом в 180° (правый рисунок) — -1 балл.

Не рассмотрен случай, когда четырёхугольник является дельтоидом (левый рисунок) — -2 балла.

6. В школе учатся 50 детей. Некоторые из них — рыцари (отвечают только правду), остальные — лжецы (всегда врут). Ещё в школе есть Директор и Учитель. На новогодний праздник к детям придёт Дед Мороз, в мешке у которого от 50 до 100 конфет включительно. Директор планирует написать 50 бумажек, на каждой из которых написаны два вопроса (один красной ручкой, другой синей). Каждый вопрос должен подразумевать ответ «да» или «нет». Потом Директор случайным образом раздаёт каждому ребёнку по одной бумажке, после чего уходит.

Далее начинается ёлка, на которой Дед Мороз по очереди вызывает детей на сцену. Оказавшись на сцене, ребёнок задаёт сначала красный вопрос Деду Морозу, а потом синий — случайному ребёнку. Учитель считает общее количество поступивших ответов «да» и сообщает его Директору. Помогите Директору придумать такие вопросы, чтобы по числу, полученному от Учителя, определить, сколько конфет у Деда Мороза. Кстати, Директор не помнит, сколько из детей — рыцари, а Дед Мороз честно отвечает на каждый заданный ему вопрос.

(*И. М. Туманова, А. А. Теслер*)

Ответ: Например, Директор нумерует детей от 1 до 50, каждому вписывает синий вопрос «Ты рыцарь?» и красный вопрос «У тебя больше, чем $49 + k$ конфет?», где k — номер ребёнка. То есть один ребёнок задаёт Деду Морозу вопрос «У тебя больше 50 конфет?», второй «У тебя больше 51 конфеты?», ..., последний «У тебя больше 99 конфет?».

Решение. Покажем, что количество ответов «да» в ситуации, описанной в ответе, равно количеству конфет. Действительно, на вопрос «Ты рыцарь?» любой ученик ответит «да» независимо от того, является он рыцарем или лжецом. Разберём вопросы учеников Деду Морозу. Если у Деда Мороза a конфет, то он будет отвечать «да» тем ученикам, чей номер k удовлетворяет неравенству $a > 49+k$, то есть при всех $k \leqslant a-50$. Поскольку $50 \leqslant a \leqslant 100$, то количество таких учеников равно $a - 50$ (от нуля при $a = 50$ до 50 при $a = 100$). В сумме с 50 ответами учеников на вопросы друг друга получается ровно a ответов «да».

Например, если конфет 70, то 50 ответов «да» дадут ученики и ещё 20 даст Дед Мороз, отвечая ученикам с номерами от 1 до 20.

Критерии. Приведён подходящий алгоритм, но не объяснено, как и почему Директор может установить число конфет (по сути, только ответ без обоснования) — не более 5 баллов.

Если предложенный алгоритм использует фразы вида «Скажи "да", если выполняется такое-то условие, и "нет" в противном случае», которые не являются вопросами — -2 балла, если их нельзя просто переформулировать в вопрос без потери смысла.

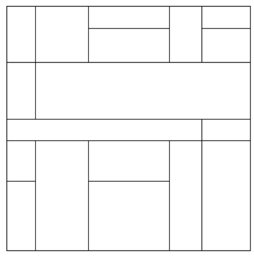
Если предложенный алгоритм позволяет определить любое количество конфет, кроме какого-то одного (например, невозможно отличить 50 и 100 конфет) — не более 3 баллов.

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2025-2026 учебный год. Заключительный этап

Решения задач для 8 класса

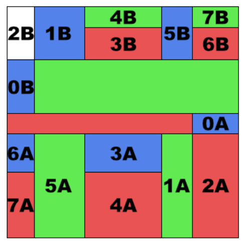
Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.
Оценка в 1–3 балла означает, что задача в целом не решена, но есть существенные продвижения; оценка в 4–6 баллов — задача в целом решена, но есть существенные недостатки.
Для некоторых задач есть частные критерии, указанные ниже.

1. Незнайка нарисовал картинку справа и заявил, что её можно раскрасить в три цвета так, чтобы любые два прямоугольника, имеющие общую сторону, были разных цветов (прямоугольники, касающиеся только в точке, могут быть одного цвета). Знайка ответил, что таких раскрасок больше одной. Сколькими способами можно раскрасить картинку? Две раскраски считайте различными, если хотя бы один прямоугольник окрашен в другой цвет. (*П. Д. Муленко*)



Ответ: 54.

Решение. Подпишем прямоугольники (для краткости будем называть их «блоками»), как показано на рисунке.



Сперва рассмотрим центральную полоску из блоков 0A, 0B и двух неподписанных. Тройка блоков из двух неподписанных и 0A все касаются друг друга, поэтому должны быть различных цветов. Первый неподписанный блок можно закрасить любым из трёх доступных цветов; второй неподписанный блок можно закрасить любым из двух оставшихся цветов; третий блок 0A можно закрасить только последним оставшимся цветом — всего $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ способов закрасить эти три блока. Блок 0B тоже касается обоих неподписанных, поэтому его цвет будет таким же, как и у блока 0A.

Теперь рассмотрим верхнюю и нижнюю полоски из блоков 1A–7A и 1B–7B. Эти две группы идентичны друг другу по тому, как блоки граничат друг с другом, поэтому будем рассматривать их вместе.

Если блок с номером 1 имеет отличный цвет от соответствующего блока 0 (что продемонстрировано в нижней полоске на примере блоков 0A и 1A), то цвета всех остальных блоков восстанавливаются однозначно. Так, блок 2 граничит и с блоком 0, и с блоком 1, поэтому он должен быть третьего цвета; блок 3 граничит и с блоком 1, и с одним из неподписанных блоков, поэтому он должен быть того же цвета, что и блок 0; и так далее.

А если же блок с номером 1 окрашен в тот же цвет, что и соответствующий блок 0 (что продемонстрировано в верхней полоске на примере блоков 0B и 1B), то тогда блок 2 может быть раскрашен в любой из двух других цветов, а все остальные блоки в полоске закрашиваются однозначно.

Таким образом, есть 6 возможных раскрасок для центральной полосы из 4 блоков (двух неподписанных, 0A и 0B), и по 3 возможных раскраски для верхней и нижней полос (из блоков 1B–7B и 1A–7A, соответственно). Всего $6 \cdot 3 \cdot 3 = 54$ возможных раскраски.

Критерии. Приведён только ответ — 2 балла.

Приведена только одна какая-то раскраска и больше ничего — 0 баллов.

Вне зависимости от логики перебора, каждый потерянный случай — −2 балла.

2. Буратино посадил на Поле Чудес монету, из которой прорастёт денежное дерево, на конце каждой веточки которого будет висеть по монете. Раз в месяц из каждой монеты прорастает «потомство» в виде 2 или 5 новых веточек с монетами (старые монеты при этом исчезают). Буратино может (но не обязан) в конце каждого месяца снять с дерева ровно 3 монеты (тогда эти веточки больше расти не будут). Может ли в какой-то момент на дереве оказаться ровно 999 монет? (*П. Д. Муленко*)

Ответ: Нет.

Решение. Если в очередной месяц количество монет равнялось $x + y$, где x — это количество монет, из которых прорастут 2 новые, а y — это количество монет, из которых прорастут 5 новых, то в следующем месяце количество монет будет равно $2x+5y$ или $2x+5y-3$ в зависимости от того, решит Буратино снять 3 монеты с дерева или нет.
Заметим, что если $x + y$ не делится на три (иными словами, хотя бы одно из чисел x и y не делится на 3), то и новое число монет не будет делиться на 3. А поскольку Буратино изначально посадил 1 монету (что не кратно 3), то и в любой последующий месяц количество монет не будет кратно 3. Значит, 999 монет (что делится на 3) получиться не могло.

Критерии. Только ответ «да» или «нет» — 0 баллов.
Сформулирована идея инварианта по модулю 3 — +3 балла.

3. 2130 год будет «годом-перевёртышем» — если поставить знак «минус» между второй и третьей цифрами, то разность двух двузначных чисел, прочитанных слева направо, будет равна разности двузначных чисел, прочитанных справа налево: $21 - 30 = 03 - 12 = -9$. Сколько всего таких лет в третьем тысячелетии?
Примечание. Как видно из примера, числа могут начинаться с нуля, а разность не обязана быть положительной. (*Л. С. Корешкова*)

Ответ: 69 лет.

Решение. Расписав равенство по разрядам, приходим к выводу, что сумма первых двух должна быть равна сумме последних двух:

$$10a + b - (10c + d) = 10d + c - (10b + a) \quad \Rightarrow \quad 11(a + b) = 11(c + d) \quad \Rightarrow \quad a + b = c + d.$$

А так как нас интересуют годы в третьем тысячелетии, то $a = 2$ (см. замечание в конце решения). Таким образом, достаточно перебрать возможные значения остальных цифр (например, по столетиям):

- $b = 0$: $c + d = 2 \longrightarrow 2002, 2011, 2020$ — 3 года;
- $b = 1$: $c + d = 3 \longrightarrow 2103, 2112, 2121, 2130$ — 4 года;
- $b = 2$: $c + d = 4 \longrightarrow 2204, 2213, 2222, 2231, 2240$ — 5 лет;
- $b = 3$: $c + d = 5 \longrightarrow 2305, 2314, \ldots, 2350$ — 6 лет;
- $b = 4$: $c + d = 6 \longrightarrow 2406, 2415, \ldots, 2460$ — 7 лет;
- $b = 5$: $c + d = 7 \longrightarrow 2507, 2516, \ldots, 2670$ — 8 лет;
- $b = 6$: $c + d = 8 \longrightarrow 2608, 2617, \ldots, 2680$ — 9 лет;
- $b = 7$: $c + d = 9 \longrightarrow 2709, 2718, \ldots, 2790$ — 10 лет;
- $b = 8$: $c + d = 10 \longrightarrow 2819, 2828, \ldots, 2891$ — 9 лет;
- $b = 9$: $c + d = 11 \longrightarrow 2929, 2938, \ldots, 2992$ — 8 лет.

Всего получаем $3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 9 + 8 = 69$ лет-перевёртышей.

Примечание. Строго говоря, третьим тысячелетием является диапазон лет с 2001 по 3000, но, так как ни 2000-й год, ни 3000-й не являются перевёртышами, мы можем смело рассматривать диапазон с 2000 по 2999 годы.

Критерии. Доказано, что сумма двух первых цифр равна сумме двух последних — не менее 3 баллов.
Наоборот, если перечислены (и верно подсчитаны) все годы-перевёртыши, но полностью отсутствует доказательство, что других нет — 2 балла.
Неправильно подсчитаны годы-перевёртыши в каких-то столетиях — не больше 5 баллов.
Рассматривается диапазон 2000–2999 вместо 2001–3000 — баллов не снимать.

4. Дан куб $3\times3\times3$, в маленькие кубики которого требуется расставить числа от 1 до 27 (все числа должны быть использованы). Может ли так получиться, что в любой паре соседних кубиков (то есть имеющих общую грань) числа будут взаимно просты? (*С. П. Павлов*)

Ответ: да, может. Например, так:

5	24	25
6	7	12
11	18	13

Верхний слой

2	1	4
17	8	19
10	23	14

Средний слой

21	16	15
20	27	22
3	26	9

Нижний слой

Критерии. Только пример без проверки — 7 баллов.

5. В школе учатся 50 детей. Некоторые из них — рыцари (отвечают только правду), остальные — лжецы (всегда врут). Ещё в школе есть Директор и Учитель. На новогодний праздник к детям придёт Дед Мороз, в мешке у которого от 50 до 100 конфет включительно. Директор планирует написать 50 бумажек, на каждой из которых написаны два вопроса (один красной ручкой, другой синей). Каждый вопрос должен подразумевать ответ «да» или «нет». Потом Директор случайным образом раздаёт каждому ребёнку по одной бумажке, после чего уходит.
Далее начинается ёлка, на которой Дед Мороз по очереди вызывает детей на сцену. Оказавшись на сцене, ребёнок задаёт сначала красный вопрос Деду Морозу, а потом синий — случайному ребёнку. Учитель считает общее количество поступивших ответов «да» и сообщает его Директору. Помогите Директору придумать такие вопросы, чтобы по числу, полученному от Учителя, определить, сколько конфет у Деда Мороза. Кстати, Директор не помнит, сколько из детей — рыцари, а Дед Мороз отвечает правду рыцарям и врёт лжецам.
(*И. М. Туманова, А. А. Теслер*)

Ответ: Например, Директор нумерует детей от 1 до 50, каждому вписывает синий вопрос «Ты рыцарь?» и красный вопрос «Утверждения "Я рыцарь" и "У тебя больше, чем $49 + k$ конфет" имеют одинаковую истинность?», где k — номер ребёнка.

Решение. Покажем, что количество ответов «да» в ситуации, описанной в ответе, равно количеству конфет. Действительно, на вопрос «Ты рыцарь?» любой ученик ответит «да» независимо от того, является он рыцарем или лжецом. Разберём вопрос ученика Деду Морозу. Если ученик с номером k является рыцарем, то Дед Мороз честно ответит «да», если у него действительно больше $49 + k$ конфет, и честно ответит «нет», если у него не более чем $49 + k$ конфет. Если же спрашивающий ученик является лжецом, то, если у Деда Мороза больше $49 + k$ конфет, истинность ответов разная, поэтому он соврёт и скажет «да», а иначе истинность ответов одинаковая, поэтому он скажет «нет». Таким образом, предложенная постановка вопроса ученика Деду Морозу позволяет последнему честно отвечать «да» или «нет» на скрытый вопрос «У тебя больше $49+k$ конфет?» независимо от того, является вопрошающий рыцарем или лжецом. Значит, если у Деда Мороза a конфет, то он будет отвечать «да» тем ученикам, чей номер k удовлетворяет неравенству $a > 49 + k$, то есть при всех $k \leqslant a - 50$. Поскольку $50 \leqslant a \leqslant 100$, то количество таких учеников равно $a - 50$ (от нуля при $a = 50$ до 50 при $a = 100$). В сумме с 50 ответами учеников на вопросы друг друга получается ровно a ответов «да».
Например, если конфет 70, то 50 ответов «да» дадут ученики и ещё 20 даст Дед Мороз, отвечая ученикам с номерами от 1 до 20.

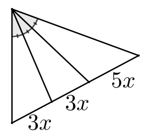
Критерии. Приведён подходящий алгоритм, но не объяснено, как и почему Директор может установить число конфет (по сути, только ответ без обоснования) — не более 5 баллов.

Если предложенный алгоритм использует фразы вида «Скажи "да", если выполняется такое-то условие, и "нет" в противном случае», которые не являются вопросами — −2 балла, если их нельзя просто переформулировать в вопрос без потери смысла.

Если предложенный алгоритм позволяет определить любое количество конфет, кроме какого-то одного (например, невозможно отличить 50 и 100 конфет) — не более 3 баллов.

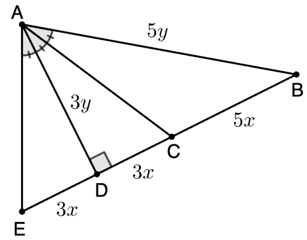
Если предложенный алгоритм игнорирует условие про Деда Мороза (то есть считается, что он всегда отвечает честно) — не более 4 баллов.

6. В остроугольном треугольнике провели обе трисектрисы одного из углов (то есть разделили его на 3 равные части), которые разделили противоположную сторону в отношении 5 : 3 : 3. Найдите периметр треугольника, если длина более короткой трисектрисы равна 6. (*П. Д. Муленко*)



Ответ: $21 + 3\sqrt{5}$.

Решение. Обозначим вершину разделённого угла за A, а точки на противоположной стороне за B, C, D и E так, что $BC : CD : DE = 5 : 3 : 3$.



Отрезок AD в треугольнике EAC является не только биссектрисой, но и медианой, поэтому треугольник EAC — равнобедренный, и AD перпендикулярно BE, что означает, что AD — более короткая трисектриса. Теперь рассмотрим прямоугольный треугольник DAB. В нём отрезок AC является биссектрисой, поэтому $BC : CD = AB : AD$. Обозначим длину $BC = 5x$ (тогда $CD = 3x$), а длину $AB = 5y$ (тогда $AD = 3y$).

По теореме Пифагора, $AB^2 = BD^2 + AD^2$, или $(5y)^2 = (8x)^2 + (3y)^2$, откуда $16y^2 = 64x^2$, то есть $y = 2x$. Следовательно, $AD = 3y = 6x = 6$, поэтому $x = 1$ (и $y = 2$).

Таким образом, $AB = 10$, $BC = 5$ и $CD = DE = 3$. Для нахождения периметра треугольника ABE осталось найти длину AE, что можно сделать с помощью теоремы Пифагора в треугольнике ADE: $AE^2 = AD^2 + DE^2 = 6^2 + 3^2 = 45$, откуда $AE = 3\sqrt{5}$, и периметр равен $10 + 5 + 3 + 3 + 3\sqrt{5} = 21 + 3\sqrt{5}$.

Критерии. Объяснено, что AD является более короткой биссектрисой — 1 балл.

Задача решена в предположении, что $BC = 5$ и $CD = DE = 3$ — не более 2 баллов.

Не доказано, что $AD \perp BE$ (например, потому что «более короткая» понято как «кратчайшее расстояние») — −2 балла.

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2025-2026 учебный год. Заключительный этап

Решения задач для 9 класса

Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.
Оценка в 1–3 балла означает, что задача в целом не решена, но есть существенные продвижения; оценка в 4–6 баллов — задача в целом решена, но есть существенные недостатки.
Для некоторых задач есть частные критерии, указанные ниже.

---

1. Найдите наибольшее натуральное число, все цифры которого различны, причём их сумма является простым числом, а произведение — квадратом натурального числа. (*С. П. Павлов*)

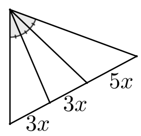
Ответ: 986431.

Решение. Заметим, что если точный квадрат кратен простому p, то он кратен и p^2. Поэтому ни 5, ни 7 в искомое число входить не могут. Также нельзя использовать 0, иначе произведение будет равно нулю, а это не квадрат *натурального* числа. Остались цифры 9, 8, 6, 4, 3, 2, 1, сумма которых равна 33. Число 33 не простое, поэтому хотя бы одну из цифр надо убрать. Поскольку порядок цифр в числе неважен и нам нужно получить как можно большее число, то убрать надо как можно меньшую цифру, при которой сумма оставшихся — простая, то есть двойку. Оставшиеся цифры расположим в порядке убывания. Число 986431 подходит, поскольку его сумма цифр равна 31, а произведение — $3^2 \cdot 2^3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 1 = (3^2 \cdot 2^3)^2$.

Критерии. Только ответ — 2 балла.

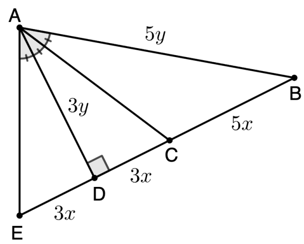
Упомянуто, что 5 и 7 не могут встречаться в числе — 1 балл.

2. В остроугольном треугольнике провели обе трисектрисы одного из углов (то есть разделили его на 3 равные части), которые разделили противоположную сторону в отношении 5 : 3 : 3. Найдите периметр треугольника, если длина более короткой трисектрисы равна 6. (*П. Д. Муленко*)



Ответ: $21 + 3\sqrt{5}$.

Решение. Обозначим вершину разделённого угла за A, а точки на противоположной стороне за B, C, D и E так, что $BC : CD : DE = 5 : 3 : 3$.



Отрезок AD в треугольнике EAC является не только биссектрисой, но и медианой, поэтому треугольник EAC — равнобедренный, и AD перпендикулярно BE, что означает, что AD — более короткая трисектриса. Теперь рассмотрим прямоугольный треугольник DAB. В нём отрезок AC является биссектрисой, поэтому $BC : CD = AB : AD$. Обозначим длину $BC = 5x$ (тогда $CD = 3x$), а длину $AB = 5y$ (тогда $AD = 3y$).
По теореме Пифагора, $AB^2 = BD^2 + AD^2$, или $(5y)^2 = (8x)^2 + (3y)^2$, откуда $16y^2 = 64x^2$, то есть $y = 2x$. Следовательно, $AD = 3y = 6x = 6$, поэтому $x = 1$ (и $y = 2$).
Таким образом, $AB = 10$, $BC = 5$ и $CD = DE = 3$. Для нахождения периметра треугольника ABE осталось найти длину AE, что можно сделать с помощью теоремы Пифагора в треугольнике ADE: $AE^2 = AD^2 + DE^2 = 6^2 + 3^2 = 45$, откуда $AE = 3\sqrt{5}$, и периметр равен $10 + 5 + 3 + 3 + 3\sqrt{5} = 21 + 3\sqrt{5}$.

Критерии. Объяснено, что AD является более короткой биссектрисой — 1 балл.

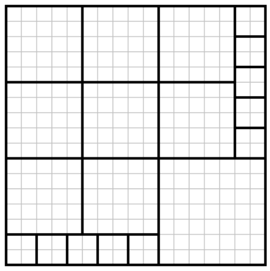
Задача решена в предположении, что $BC = 5$ и $CD = DE = 3$ — не более 2 баллов.

Не доказано, что $AD \perp BE$ (например, потому что «более короткая» понято как «кратчайшее расстояние») — −2 балла.

3. Квадрат разрезали на несколько квадратов. Обязательно ли среди полученных квадратов найдётся такой, сторона которого в целое количество раз меньше стороны исходного квадрата?

(*А. А. Теслер*)

Ответ: нет. Например, квадрат со стороной 17 можно получить из квадратов со сторонами 2, 5 и 7, как показано на рисунке.



4. Инженер пишет программу для робота с металлоискателем, который будет искать клад в полоске из 100 клеток. Клад лежит в случайной клетке (все клетки равновероятны), также в случайную клетку высаживается робот (он может определить, в какой клетке находится). За одну минуту робот переходит в любую из соседних клеток. Когда робот оказывается в клетке с кладом, поиск завершён. Инженер понимает, что роботу нужно дойти сначала до одного из краёв полоски, а потом пойти обратно. Но не уверен, к какому краю лучше идти сначала — к тому, который ближе к стартовой клетке (стратегия А), или к дальнему (стратегия Б). Инженер хочет для каждой начальной клетки выбрать лучшую из двух стратегий, исходя из следующего:
   1) прежде всего нужно минимизировать среднее время поиска клада;
   2) если оно одинаково — максимизировать вероятность того, что клад найдётся в течение первых 10 минут (то есть что роботу придётся совершить от 0 до 10 шагов);
   3) если обе стратегии всё ещё одинаково эффективны, то минимизировать максимально возможное время поиска.

   Для скольких начальных клеток выгоднее стратегия А, а для скольких — стратегия Б?

(*О. А. Пяйве, А. А. Теслер*)

Ответ: для 80 клеток (11–90) выгоднее стратегия А, а для 18 клеток (2–10 и 91–99) — стратегия Б.

Решение. 0) Для клеток 1 и 100 обе стратегии приводят к одной и той же последовательности действий, поэтому эти клетки не учитываются ни там, ни там (для них нельзя сказать, что выгоднее А или что выгоднее Б).

1) Сравним среднее время поиска клада. Допустим, робот стоит на некой клетке, слева от него a клеток, а справа b клеток ($a + b = 99$). Пусть робот сначала идёт влево. Тогда для $a + 1$ левых клеток (включая начальную) время поиска будет равняться $0, 1, \ldots, a-1, a$. Если бы после этого робот телепортировался на исходную клетку, то для остальных b клеток время составило бы $a + 1, a + 2, \ldots, a + b = 99$, и сумма ста времён составила бы $0 + 1 + \ldots + 99$. Но когда робот дойдёт до левого края, он тратит a минут на возвращение на исходную позицию. В результате для каждой из оставшихся b клеток время увеличивается на a минут, и сумма времён поиска равна $(0 + 1 + \ldots + 99) + ab$.

Если же робот идёт сначала вправо, а не влево, то числа a и b меняются ролями, но формула для суммы времён (а значит, и для среднего времени) не меняется. Значит, по первому критерию обе стратегии всегда одинаковы.

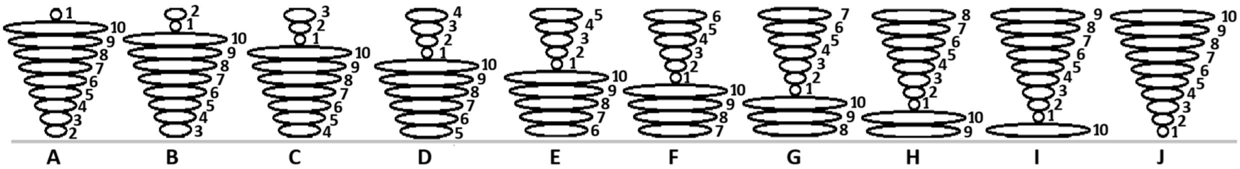
2) Если робот стоит в клетках 2–10 или 91–99, то при стратегии А некоторые из клеток, посещённых за первые 10 минут, совпадают, поэтому стратегия Б лучше по второму критерию. В остальных случаях стратегии одинаково эффективны по критерию 2, и нужно перейти к критерию 3.

3) Максимально возможное время поиска всегда меньше в стратегии А.

Критерии. Если решение в основном верное, то −1 балл за ошибку на ±1 (неверно обработаны клетки 10, 91 или 11, 90). Также −1 балл, если нет оговорки про клетки 1 и 100 (например, они учтены как клетки, для которых выгоднее Б). Если оговорка есть, но из неё сделан иной вывод (например, что для этих клеток выгоднее и А, и Б; или что в этих клетках стратегия А вообще невозможна) — баллов не снимать.

Доказано, что по критерию 1 стратегии всегда одинаковы — не менее 3 баллов.

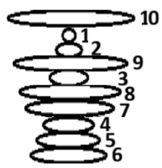
5. Лёша коллекционирует волчки, которые можно запускать так, чтобы они сталкивались друг с другом. Каждый волчок состоит из 10 колец разного радиуса (от 1 до 10), надетых на ось в определённом порядке. Сейчас у Лёши есть 10 волчков, показанных на рисунке, и ещё 10 колец, из которых можно собрать новый волчок. Для любой пары волчков Лёша называет *недружелюбностью* минимальное расстояние, на которое могут сблизиться их оси при движении (например, для пары B и F недружелюбность равна 16, поскольку кольцо радиуса 6 в B находится на том же уровне, что и кольцо радиуса 10 в F). *Агрессивностью* волчка Лёша называет сумму недружелюбностей между ним и каждым из остальных волчков. Лёша хочет сделать новый волчок так, чтобы его агрессивность по отношению к старым волчкам была... (a) как можно меньше; (b) как можно больше. Какого наилучшего результата он может добиться в каждом из случаев? (*А. А. Теслер*)



Ответ: (a) минимальная агресивность равна 155; (b) максимальная — 180.

Решение (a). Рассмотрим волчок, у которого диски увеличиваются сверху вниз, то есть радиус верхнего диска равен 1, следующего 2, ..., нижнего 10. У него сумма недружелюбностей с волчками A, B, ..., J равна $12+13+14+15+16+17+18+19+ +20+11 = 100+(1+\ldots+10) = 155$. Уменьшить эту сумму нельзя, потому что для каждого уровня есть волчок, у которого на этом уровне 10, и недружелюбность с ним будет не меньше $10+i$ (где i — радиус нового волчка на соответствующем уровне).

Решение (b). Недружелюбность 20 у нового волчка может быть только с одним из старых волчков (у которого 10 напротив 10 нового), 19 — максимум с двумя (9+10 и 10+9), 18 — с тремя (10+8, 9+9, 8+10), 17 — максимум с четырьмя. Заметим, что волчок вида $(10,*,*,9,*,8,7,*,*,*)$ (сверху вниз), где звёздочки заменяют числа от 1 до 6 в произвольном порядке, всё это реализует. (Один из таких волчков показан справа.) Ответ для него $20+19\cdot 2+18\cdot 3+17\cdot 4 = 180$.



Критерии. Минимизация — 3 балла (2 балла — оценка, 1 балл — ответ с примером).

Максимизация — 4 балла (2 балла — оценка, 2 балла — ответ с примером).

6. Буратино посадил на Поле Чудес монету, из которой прорастёт денежное дерево, на конце каждой веточки которого будет висеть по монете. Раз в месяц из каждой монеты прорастает «потомство» в виде 5 или 8 новых веточек с монетами (старые монеты при этом исчезают). Через некоторое количество месяцев Буратино собрал с дерева весь урожай. Мог ли этот урожай составить ровно 2027 монет? (*П. Д. Муленко*)

Ответ: нет.

Решение. За 5 месяцев будет минимум 3125 монет, за 3 месяца максимум 512 монет. Далее, остаток от деления на 3 после каждого хода умножается на 2; после первого хода он равен 2, после второго 1, после третьего 2, после четвёртого 1, поэтому после четырёх ходов 2027 получиться тоже не может.

Критерии. Указано (и обосновано), что трёх месяцев недостаточно, а пяти много — 2 балла.

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2025-2026 учебный год. Заключительный этап

Решения задач для 10 класса

Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.
Оценка в 1–3 балла означает, что задача в целом не решена, но есть существенные продвижения; оценка в 4–6 баллов — задача в целом решена, но есть существенные недостатки.
Для некоторых задач есть частные критерии, указанные ниже.

---

1. Найдите наибольшее натуральное число, в записи которого все цифры различны, а сумма всяких трёх соседних цифр — простое число. (*С. П. Павлов*)

Ответ: 98652470.

Решение. Число 98652470 удовлетворяет требованию условия о простоте.

Докажем, что указанное число — наибольшее возможное. Пусть a_i — i-я цифра числа N, и в нём не менее 9 цифр. По условию, $a_1+a_2+a_3$ и $a_2+a_3+a_4$ — простые. Так как обе эти суммы больше 2, то они нечётные, а их разность чётная. Значит, числа a_1 и a_4 одной чётности. Рассуждая аналогично, получаем, что числа одной и той же чётности в каждой из трёх групп: $\{a_1, a_4, a_7\}$, $\{a_2, a_5, a_8\}$, $\{a_3, a_6, a_9\}$. Поскольку любая цифра — чётная или нечётная, то чисел одной чётности должно быть не менее $3 + 3 = 6$, что невозможно. Значит, у числа N не более восьми цифр.

Предъявленное в ответе число 98652470 восьмизначное, и первые две его цифры — наибольшие возможные. Третья цифра числа N, очевидно, не равна 7. Итак, искомое число таково: $986\ldots$. Следующая цифра не равна 7, поэтому её значение не более 5. Пятая цифра не больше 2, и тогда наибольшее возможное значение шестой цифры — это 4. Далее ставим наибольшую оставшуюся цифру 7. На последнее место, соблюдая условие, можно поставить только 0.

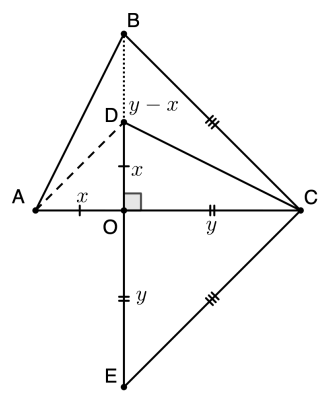
Критерии. Только ответ — 2 балла.

Доказано, что число не может быть девятизначным, — 2 балла.

2. На стороне AC остроугольного треугольника ABC отметили точку O. При повороте на 90° вокруг точки O этот треугольник перешёл в треугольник DCE. Оказалось, что площадь $ABCD$ в 4 раза меньше площади $ADCE$. Найдите отношение $AO : OC$. (*П. Д. Муленко*)

Ответ: 3:5.

Решение. Раз при повороте на 90° точка B перешла в точку C, то отрезок OB перешёл в отрезок OC. Значит, $OB \perp OC$ и $OB = OC$. Аналогично, $AO = OD$ и $OC = OE$.



Обозначим $AO = OD = x$, $OC = OB = OE = y$. Тогда $BD = OB - OD = y - x$, $DE = AC = x + y$ (отрезок OB меньше $OD = OC$, так как угол $\angle ABC$ должен быть острым).

Диагонали обоих данных четырёхугольников перпендикулярны, следовательно, их площади равны

$$S(ABCD) = \frac{BD \cdot AC}{2} = \frac{(x+y)(y-x)}{2}, \quad S(ADCE) = \frac{DE \cdot AC}{2} = \frac{(x+y)^2}{2}.$$

Получается, что отношение их площадей равно отношению длин BD и AC:

$$\frac{S(ABCD)}{S(ACDE)} = \frac{BD}{AC} = \frac{y-x}{x+y} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad 4(y-x) = x + y \quad \Rightarrow \quad 3y = 5x.$$

Отсюда искомое отношение $AO : OC = x : y = 3 : 5$.

3. У тетраэдра $ABCD$ все три плоских угла при вершине A равны 60°, а длина каждого ребра — целое число. Обязательно ли все грани тетраэдра равны? (*А. А. Теслер*)

Ответ: Нет. Например, пусть $AB = AD = BD = 5$, $AC = 8$, $BC = CD = 7$. В треугольнике со сторонами 5, 7, 8 угол, лежащий против стороны 7, равен 60° по теореме косинусов.

Критерии. Только ответ (нет) — 0 баллов.

Пример, устроенный разумным образом, имеющий разумное обоснование, но неверный из-за арифметической ошибки или проблем с тригонометрией — до 2 баллов.

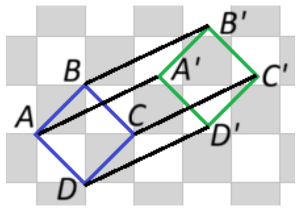
4. На шахматной доске лежит квадрат, площадь которого вдвое больше, чем площадь одной клетки, а стороны параллельны диагоналям клеток. Какую долю от площади квадрата может составлять та его часть, которая окрашена в чёрный цвет? (*А. А. Теслер*)

Ответ: Половину.

Решение. Заметим, что если вершины квадрата совпадают с узлами шахматной сетки, то площадь чёрной части, очевидно, составляет половину площади квадрата. Если же квадрат расположен произвольным образом (обозначим его $A'B'C'D'$), то его можно получить параллельным переносом из некоторого квадрата $ABCD$ с вершинами в узлах сетки. Докажем, что чёрная площадь в этих квадратах одинакова. Не умаляя общности, пусть точка A' лежит внутри или на границе угла BAC. Если обозначить через $S_b(F)$ площадь чёрного цвета в фигуре F, то

$$S_b(A'B'C'D') + S_b(AA'B'B) + S_b(AA'D'D) = S_b(ABB'C'D'D) = S_b(ABCD) + S_b(DD'C'C) + S_b(BB'C'C),$$

где часть параллелограммов может быть вырожденна. Остаётся заметить, что $S_b(AA'B'B) = S_b(DD'C'C)$ и $S_b(AA'D'D) = S_b(BB'C'C)$, так как эти параллелограммы получены друг из друга параллельным переносом на векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AB}$ соответственно, а такие переносы сохраняют раскраску точек.



Примечание. Возможно также рассуждение следующего рода. «Размножим» квадрат $A'B'C'D'$ по обоим измерениям до бесконечности (и шахматную раскраску тоже). Тогда все копии квадрата раскрашены одинаково, поскольку получены параллельными переносами, сохраняющими раскраску. Поэтому доля чёрного цвета во всех копиях одинакова. Но если взять достаточно большую квадратную область, составленную из копий квадрата $A'B'C'D'$, то почти вся она (кроме некоторой части вдоль границ, доля которой стремится к нулю при увеличении размера области) делится на доминошки, поэтому доля чёрного цвета в ней не может сильно отличаться от $1/2$. Подобные соображения, использующие стремление к бесконечности, называют асимптотическими. Однако их формализация требует знакомства с основами математического анализа.

Критерии. Недостаточно чётко формализованы асимптотические соображения (или соображение, что доля чёрного цвета сохраняется при параллельном переносе квадрата) — штраф не более 2 баллов.

Если считать, что квадрат может вылезать за пределы исходной доски, то ответ будет «от 0 до 1/2», но решение полностью аналогично. За такое понимание условия баллы не снимаются.

5. Инженер пишет программу для робота с металлоискателем, который будет искать клад в полоске из 100 клеток. Клад лежит в случайной клетке (все клетки равновероятны), также в случайную клетку высаживается робот (он может определить, в какой клетке находится). За одну минуту робот переходит в любую из соседних клеток. Когда робот оказывается в клетке с кладом, поиск завершён. Инженер понимает, что роботу нужно дойти сначала до одного из краёв

полоски, а потом пойти обратно. Но не уверен, к какому краю лучше идти сначала — к тому, который ближе к стартовой клетке (стратегия А), или к дальнему (стратегия Б). Инженер хочет для каждой начальной клетки выбрать лучшую из двух стратегий, исходя из следующего:

1) прежде всего нужно минимизировать среднее время поиска клада;
2) если оно одинаково — максимизировать вероятность того, что клад найдётся в течение первых 10 минут (то есть что роботу придётся совершить от 0 до 10 шагов);
3) если обе стратегии всё ещё одинаково эффективны, то минимизировать максимально возможное время поиска.

Для скольких начальных клеток выгоднее стратегия А, а для скольких — стратегия Б?

(*О. А. Пяйве, А. А. Теслер*)

Ответ: для 80 клеток (11–90) выгоднее стратегия А, а для 18 клеток (2–10 и 91–99) — стратегия Б.

Решение. 0) Для клеток 1 и 100 обе стратегии приводят к одной и той же последовательности действий, поэтому эти клетки не учитываются ни там, ни там (для них нельзя сказать, что выгоднее А или что выгоднее Б).

1) Сравним среднее время поиска клада. Допустим, робот стоит на некой клетке, слева от него a клеток, а справа b клеток ($a + b = 99$). Пусть робот сначала идёт влево. Тогда для $a + 1$ левых клеток (включая начальную) время поиска будет равняться $0, 1, \ldots, a-1, a$. Если бы после этого робот телепортировался на исходную клетку, то для остальных b клеток время составило бы $a + 1, a + 2, \ldots, a + b = 99$, и сумма ста времён составила бы $0 + 1 + \ldots + 99$. Но когда робот дойдёт до левого края, он тратит a минут на возвращение на исходную позицию. В результате для каждой из оставшихся b клеток время увеличивается на a минут, и сумма времён поиска равна $(0 + 1 + \ldots + 99) + ab$.

Если же робот идёт сначала вправо, а не влево, то числа a и b меняются ролями, но формула для суммы времён (а значит, и для среднего времени) не меняется. Значит, по первому критерию обе стратегии всегда одинаковы.

2) Если робот стоит в клетках 2–10 или 91–99, то при стратегии А некоторые из клеток, посещённых за первые 10 минут, совпадают, поэтому стратегия Б лучше по второму критерию. В остальных случаях стратегии одинаково эффективны по критерию 2, и нужно перейти к критерию 3.

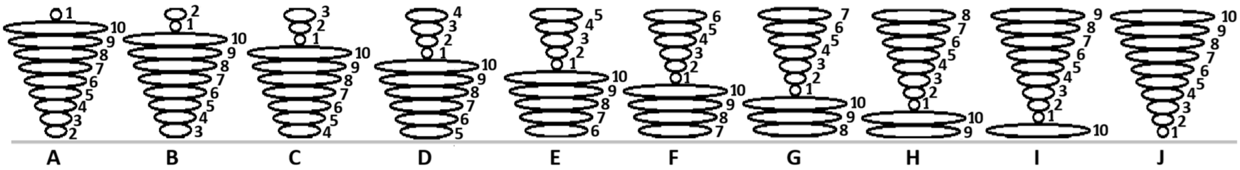
3) Максимально возможное время поиска всегда меньше в стратегии А.

Критерии. Если решение в основном верное, то −1 балл за ошибку на ±1 (неверно обработаны клетки 10, 91 или 11, 90). Также −1 балл, если нет оговорки про клетки 1 и 100 (например, они учтены как клетки, для которых выгоднее Б). Если оговорка есть, но из неё сделан иной вывод (например, что для этих клеток выгоднее и А, и Б; или что в этих клетках стратегия А вообще невозможна) — баллов не снимать.

Доказано, что по критерию 1 стратегии всегда одинаковы — не менее 3 баллов.

6. Лёша коллекционирует волчки, которые можно запускать так, чтобы они сталкивались друг с другом. Каждый волчок состоит из 10 колец разного радиуса (от 1 до 10), надетых на ось в определённом порядке. Сейчас у Лёши есть 10 волчков, показанных на рисунке, и ещё 10 колец, из которых можно собрать новый волчок. Для любой пары волчков Лёша называет *недружелюбностью* минимальное расстояние, на которое могут сблизиться их оси при движении (например, для пары B и F недружелюбность равна 16, поскольку кольцо радиуса 6 в B находится на том же уровне, что и кольцо радиуса 10 в F). *Агрессивностью* волчка Лёша называет сумму недружелюбностей между ним и каждым из остальных волчков. Лёша хочет сделать новый волчок так, чтобы его агрессивность по отношению к старым волчкам была... (a) как можно меньше; (b) как можно больше. Какого наилучшего результата он может добиться в каждом из случаев?

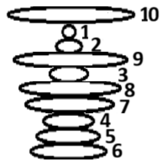
(*А. А. Теслер*)



Ответ: (a) минимальная агресивность равна 155; (b) максимальная — 180.

Решение (a). Рассмотрим волчок, у которого диски увеличиваются сверху вниз, то есть радиус верхнего диска равен 1, следующего 2, ..., нижнего 10. У него сумма недружелюбностей с волчками A, B, ..., J равна $12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + + 20 + 11 = 100 + (1 + \ldots + 10) = 155$. Уменьшить эту сумму нельзя, потому что для каждого уровня есть волчок, у которого на этом уровне 10, и недружелюбность с ним будет не меньше $10 + i$ (где i — радиус нового волчка на соответствующем уровне).

Решение (b). Недружелюбность 20 у нового волчка может быть только с одним из старых волчков (у которого 10 напротив 10 нового), 19 — максимум с двумя (9+10 и 10+9), 18 — с тремя (10+8, 9+9, 8+10), 17 — максимум с четырьмя. Заметим, что волчок вида $(10, *, *, 9, *, 8, 7, *, *, *)$ (сверху вниз), где звёздочки заменяют числа от 1 до 6 в произвольном порядке, всё это реализует. (Один из таких волчков показан справа.) Ответ для него $20 + 19 \cdot 2 + 18 \cdot 3 + 17 \cdot 4 = 180$.



Критерии. Минимизация — 3 балла (2 балла — оценка, 1 балл — ответ с примером). Максимизация — 4 балла (2 балла — оценка, 2 балла — ответ с примером).

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2025-2026 учебный год. Заключительный этап

Решения задач для 11 класса

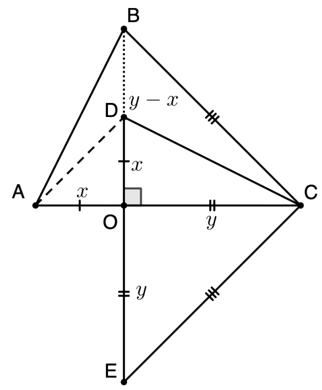
Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.
Оценка в 1–3 балла означает, что задача в целом не решена, но есть существенные продвижения; оценка в 4–6 баллов — задача в целом решена, но есть существенные недостатки.
Для некоторых задач есть частные критерии, указанные ниже.

---

1. На стороне AC остроугольного треугольника ABC отметили точку O. При повороте на 90° вокруг точки O этот треугольник перешёл в треугольник DCE. Оказалось, что площадь $ABCD$ в 4 раза меньше площади $ADCE$. Найдите отношение $AO : OC$. (*П. Д. Муленко*)

Ответ: 3:5.

Решение. Раз при повороте на 90° точка B перешла в точку C, то отрезок OB перешёл в отрезок OC. Значит, $OB \perp OC$ и $OB = OC$. Аналогично, $AO = OD$ и $OC = OE$.



Обозначим $AO = OD = x$, $OC = OB = OE = y$. Тогда $BD = OB - OD = y - x$, $DE = AC = x + y$ (отрезок OB меньше $OD = OC$, так как угол $\angle ABC$ должен быть острым).
Диагонали обоих данных четырёхугольников перпендикулярны, следовательно, их площади равны

$$S(ABCD) = \frac{BD \cdot AC}{2} = \frac{(x+y)(y-x)}{2}, \quad S(ADCE) = \frac{DE \cdot AC}{2} = \frac{(x+y)^2}{2}.$$

Получается, что отношение их площадей равно отношению длин BD и AC:

$$\frac{S(ABCD)}{S(ACDE)} = \frac{BD}{AC} = \frac{y-x}{x+y} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad 4(y-x) = x+y \quad \Rightarrow \quad 3y = 5x.$$

Отсюда искомое отношение $AO : OC = x : y = 3 : 5$.

2. У тетраэдра $ABCD$ все три плоских угла при вершине A равны 60°, а длина каждого ребра — целое число. Обязательно ли все грани тетраэдра равны? (*А. А. Теслер*)

Ответ: Нет. Например, пусть $AB = AD = BD = 5$, $AC = 8$, $BC = CD = 7$. В треугольнике со сторонами 5, 7, 8 угол, лежащий против стороны 7, равен 60° по теореме косинусов.

Критерии. Только ответ (нет) — 0 баллов.

Пример, устроенный разумным образом, имеющий разумное обоснование, но неверный из-за арифметической ошибки или проблем с тригонометрией — до 2 баллов.

3. В школе есть Директор, Учитель и 50 детей. На новогодний праздник к детям придёт Дед Мороз, в мешке у которого от 0 до 100 конфет включительно. Дед Мороз будет по очереди вызывать всех детей на сцену. Оказавшись на сцене, ребёнок задаёт вопрос Деду Морозу, а потом ещё один вопрос одному из друзей. Все вопросы должны подразумевать только ответы «да» и «нет»; нельзя спрашивать о том, чего собеседник не знает; все отвечают друг другу правду. Учитель считает общее количество поступивших ответов «да» и сообщает его Директору. Придумайте, как действовать детям, чтобы по числу, полученному от Учителя, Директор смог определить, сколько конфет у Деда Мороза. (*И. М. Туманова, А. А. Теслер*)

Решение. Например, так. За первые 7 (или меньше) вопросов Деду Морозу дети дихотомией определяют количество конфет, задавая вопросы вида «У вас больше n конфет?». То есть если ребёнок знает, что у Деда Мороза от a до b конфет включительно и $a < b$, то он спрашивает, больше ли у него $\lfloor \frac{a+b}{2} \rfloor$ конфет. Остальные вопросы имеют вид «Дважды два четыре?» и «Дважды два пять?» и задаются так, чтобы суммарное количество ответов «да» совпало с числом конфет. Поначалу это число неизвестно, но если конфет оказалось больше 50, то можно до выяснения точного количества задавать вопросы с ответом «да», а если меньше, то с ответом «нет».

Критерии. 2 балла за стратегию детей по нахождению количества конфет.

4. У Васи есть калькулятор с красной кнопкой. Если на экране написано число x, то при нажатии на кнопку калькулятор с вероятностью 50% заменит его на x^2, а с вероятностью 50% попытается заменить на $\log_2 x$ (и взорвётся, если $\log_2 x$ не определён). Вася решил испытать удачу: он ввёл в калькулятор число 4 и хочет десять раз подряд нажать красную кнопку. Какова вероятность, что Вася сумеет это сделать и калькулятор не взорвётся? (*А. А. Теслер*)

Ответ: 297/512.

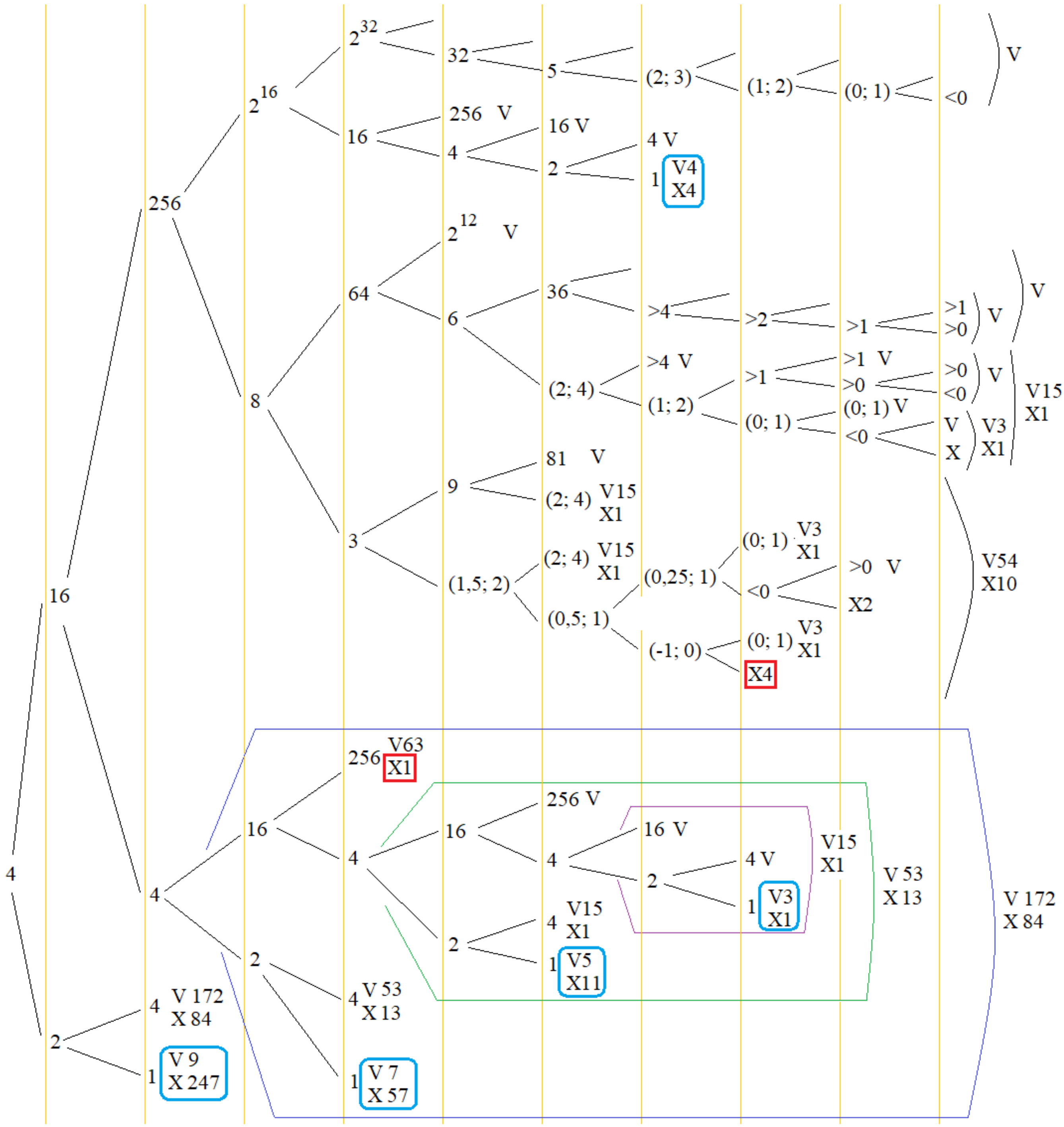
Решение. Дерево возможных вариантов показано на схеме на следующей странице (ребро вправо-вверх — возведение в квадрат, вправо-вниз — логарифмирование).

Галочкой (V) отмечены ветви, соответствующие успеху, крестиком (X) — неудаче. Если в ветви больше одного варианта, то указано количество успешных и неудачных (считаем, что всего возможны 1024 равновероятных варианта, то есть продолжаем нажимать кнопку даже после взрыва для удобства подсчёта). Если ветвь аналогична той, которая уже встречается в дереве выше, то она не дублируется, а просто переписывается результат.

В голубых рамочках указано количество успешных и неудачных вариантов после числа 1. Взрыв происходит, если и только если логарифм будет взят хотя бы два раза (возведение 1 в квадрат не меняет её; после первого логарифмирования получаем 0, возведение в квадрат его вновь не меняет; после второго логарифмирования получаем взрыв). Значит, если осталось n ходов, то количество успешных вариантов равно $C_n^0 + C_n^1 = n + 1$, а остальные $2^n - (n + 1)$ неудачные.

Оценки логарифмов очевидны, кроме ветви, начинающейся с числа 3. Там надо заметить, что $2^{1,5} = 2\sqrt{2} < 3 < 2^2$, поэтому $\log_2 3 \in (1{,}5; 2)$. Далее $2^{0,5} = \sqrt{2} < 1{,}5 < 2^1$, поэтому $\log_2(\log_2 3) \in (0{,}5; 1)$. Это важно, чтобы понять, после скольких логарифмирований от числа 256 мы приходим ко взрыву (получается, что после шести). Соответствующая ветвь отмечена красной рамочкой; она повторяется и ниже (где 256 получено после четырёх ходов), где неудачна только одна траектория (вторая красная рамочка). Остальные ветви с началом 256 не приводят ко взрыву за 6 или менее ходов.

Критерии. 2 балла — правильная формула для количества успехов и неудач после получения единицы (или верные расчёты для ВСЕХ ветвей, начинающихся с 1).
2 балла — правильная оценка логарифмов в наиболее сложном случае (то есть обоснованно найдено, что 256 взрывается после шести логарифмирований).
3 балла — остальная работа с деревом (в том числе 1 балл, если указано, что ветвь, начинающаяся с $x > 2^{2^{\cdots}}$, точно не приведёт к взрыву за n ходов, где в башне ровно $n - 2$ двоек).



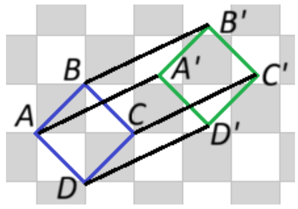
X : 4+11+84+84+247=430. V: 1024-430=594. P(V)=594/1024=297/512.

5. На шахматной доске лежит квадрат, площадь которого вдвое больше, чем площадь одной клетки, а стороны параллельны диагоналям клеток. Какую долю от площади квадрата может составлять та его часть, которая окрашена в чёрный цвет? (*А. А. Теслер*)

Ответ: Половину.

Решение. Заметим, что если вершины квадрата совпадают с узлами шахматной сетки, то площадь чёрной части, очевидно, составляет половину площади квадрата. Если же квадрат расположен произвольным образом (обозначим его $A'B'C'D'$), то его можно получить параллельным переносом из некоторого квадрата $ABCD$ с вершинами в узлах сетки. Докажем, что чёрная площадь в этих квадратах одинакова. Не умаляя общности, пусть точка A' лежит внутри или на границе угла BAC. Если обозначить через $S_b(F)$ площадь чёрного цвета в фигуре F, то

$$S_b(A'B'C'D') + S_b(AA'B'B) + S_b(AA'D'D) = S_b(ABB'C'D'D) = S_b(ABCD) + S_b(DD'C'C) + S_b(BB'C'C),$$



где часть параллелограммов может быть вырожденна. Остаётся заметить, что $S_b(AA'B'B) = S_b(DD'C'C)$ и $S_b(AA'D'D) = S_b(BB'C'C)$, так как эти параллелограммы получены друг из друга параллельным переносом на векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AB}$ соответственно, а такие переносы сохраняют раскраску точек.

Примечание. Возможно также рассуждение следующего рода. «Размножим» квадрат $A'B'C'D'$ по обоим измерениям до бесконечности (и шахматную раскраску тоже). Тогда все копии квадрата раскрашены одинаково, поскольку получены параллельными переносами, сохраняющими раскраску. Поэтому доля чёрного цвета во всех копиях одинакова. Но если взять достаточно большую квадратную область, составленную из копий квадрата $A'B'C'D'$, то почти вся она (кроме некоторой части вдоль границ, доля которой стремится к нулю при увеличении размера области) делится на доминошки, поэтому доля чёрного цвета в ней не может сильно отличаться от $1/2$. Подобные соображения, использующие стремление к бесконечности, называют асимптотическими. Однако их формализация требует знакомства с основами математического анализа.

Критерии. Недостаточно чётко формализованы асимптотические соображения (или соображение, что доля чёрного цвета сохраняется при параллельном переносе квадрата) — штраф не более 2 баллов.
Если считать, что квадрат может вылезать за пределы исходной доски, то ответ будет «от 0 до 1/2», но решение полностью аналогично. За такое понимание условия баллы не снимаются.

6. Многочлен $P(x)$ на интервале $x \in (0; 1)$ дважды принимает значение 0 и дважды — значение 1. Докажите, что существует такая точка $a \in (0; 1)$, что $|P''(a)| > 2$. (*А. А. Теслер*)

Решение. Значения 0, 0, 1, 1 могут приниматься в различном порядке. Рассмотрим все 6 вариантов.
а) 0, 0, 1, 1. Тогда между первыми двумя нулями есть точка с производной 0 (экстремум), между 0 и 1 — с производной больше 1 (поскольку приращение составило 1 на отрезке длиной менее 1), между 1 и 1 — снова с производной 0. Расстояние от второй точки до первой или до третьей меньше $1/2$, а P' успевает вырасти более чем на 1, значит, где-то $P'' > 2$.
б) 0, 1, 1, 0. Между первыми двумя точками есть точка с $P' > 1$, между третьей и четвёртой — точка с $P' < -1$. Где-то между этими точками $P'' < -2$.
в) 0, 1, 0, 1. Работает то же рассуждение, что и в пункте (б), причём четвёртая точка не нужна.
г, д, е) Для порядков, начинающихся с единицы, всё аналогично (поскольку многочлен P можно заменить многочленом $1 - P$).

Критерии. Если рассмотрены не все порядки расположения точек, то не больше 5 баллов. За наиболее существенный случай 0, 0, 1, 1 (или 1, 1, 0, 0) даётся 4 балла.