Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2025-2026 учебный год. Отборочный этап

Решения задач для 5 класса

Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.
Оценка в 1–3 балла означает, что задача в целом не решена, но есть существенные продвижения; оценка в 4–6 баллов — задача в целом решена, но есть существенные недостатки.
Для некоторых задач есть частные критерии, указанные ниже.

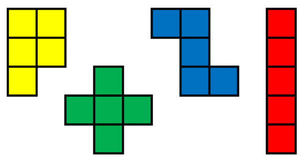
---

1. Можно ли в равенстве $* + * + * + * + * + * + * = **$ расставить все ненулевые цифры так, чтобы равенство было верным? (В левой его части — сумма однозначных чисел, в правой — двузначное число.) (*С. П. Павлов*)

Ответ: да; например, $1 + 2 + 4 + 5 + 7 + 8 + 9 = 36$.

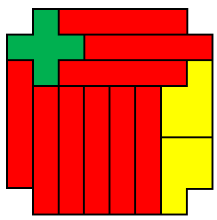
Критерии. Только ответ «да» или «нет» — 0 баллов. Пример — 7 баллов.

2. Русские программисты придумали новый «Тетрис-5». Фигуры (на рисунке) можно размещать на клетчатом поле в любом положении, чтобы они не накладывались друг на друга (как и в классическом тетрисе, фигуры можно поворачивать, но не переворачивать).



a) Докажите, что возможно покрыть поле 8×8, если из него удалены четыре угловые клетки.
b) Докажите, что невозможно покрыть поле 2026×2026, если из него удалены четыре угловые клетки. (*Л. С. Корешкова*)

Решение. a) Для доказательства достаточно любого примера (один из них показан справа).



b) Площадь поля 2026×2026 после удаления четырёх угловых клеток равна $2026 \cdot 2026 - 4$, последняя цифра этого числа равна $6 - 4 = 2$. Но каждая фигурка состоит из 5 клеток, то есть площадь покрытой фигуры должна делиться на 5. Следовательно, данный квадрат без угловых клеток заполнить невозможно.

Критерии. Правильно решён только пункт (a) — 3 балла. Если все фигуры отзеркалены (после отражения рисунка получается верный пример) — минус 1 балл. Если только часть фигур отзеркалена (то есть при отражении всей картинки проблема не исчезает) — 1 балл за пункт (a). «Можно, поскольку число клеток делится на 5» — 0 баллов (поскольку делимости на 5 недостаточно).
Правильно решён только пункт (b) — 3 балла. Правильно решены оба пункта — 7 баллов.

3. Если в начало натурального числа дописать цифру 2, то получится квадрат этого числа. Чему может быть равно это число? Найдите все варианты и докажите, что других нет. (*П. Д. Муленко*)

Ответ: только число 5.

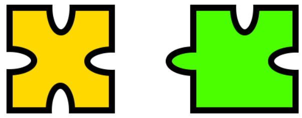
Решение. Если число однозначное, то его квадрат должен быть двузначным числом, начинающимся на 2. Есть только одно такое число 5: $5^2 = 25$.
Если число двузначное, то его квадрат должен быть трёхзначным числом, начинающимся на 2. Есть только три таких трёхзначных квадрата: $15^2 = 225$, $16^2 = 256$, $17^2 = 289$, но ни один из них не подходит.
Наконец, если число хотя бы трёхзначное, то его квадрат минимум на 2 цифры длиннее ($100^2 = 10\,000$). Поэтому единственное число, удовлетворяющее условию — это 5.

Критерии. Только ответ — 1 балл.

Полная проверка однозначных и двузначных чисел — 3 балла.

Доказательство того, что исходное число не может содержать более двух цифр — 4 балла.

4. Маленькой Маше на день рождения подарили прямоугольный пазл, собирающийся из нескольких равного размера квадратных кусочков, в каждом из которых на сторонах есть впадинки или выпуклости (при этом контур пазла ровный).



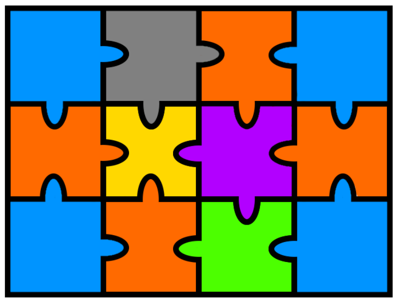
Известно, что в этом наборе есть такие два кусочка (см. рис.). Какое наименьшее количество деталей может быть в подаренном пазле? Не забудьте привести пример, а также объяснить, почему меньше деталей быть не может. (*П. Д. Муленко*)

Ответ: 12.

Решение. Жёлтый кусочек должен быть полностью внутри пазла, так как граница должна быть ровной (то есть без впадинок и выпуклостей). Значит, размер пазла не менее чем 3×3.

Однако, если он ровно 3×3, то в нём не может быть зелёного кусочка, так как его надо расположить в середине стороны из-за наличия ровной грани, но напротив этой ровной грани тогда должна быть выпуклость, чтобы он мог сцепиться с центральным жёлтым кусочком.

Значит, жёлтый и зелёный кусочки не могут быть в одной строке или столбце, то есть размер пазла должен быть хотя бы 3×4 (см. рисунок).



Критерии. Только правильный ответ («12 кусочков» или «это прямоугольник 3×4») — 1 балл.

Ответ с примером — 3 балла.

Ответ с доказательством и примером — 7 баллов.

Нет примера — минус 2 балла.

5. Муравей прополз по туннелю длиной 28 см от левого края муравьиной фермы до правого. Туннель состоит из горизонтальных участков, подъёмов и спусков (уклоны всех подъёмов и спусков одинаковы по крутизне). На подъёме муравей ползёт со скоростью 3 см/мин, по горизонтали — 4 см/мин. Весь путь занял у муравья 7 минут. Туннель не полностью горизонтален, но в конце муравей оказался на той же высоте, что и в начале (то есть суммарный подъём равен суммарному спуску). Найдите скорость муравья на спуске (в см/мин). (*П. Д. Муленко*)

Ответ: 6 см/мин.

Решение. Поскольку суммарный подъём равен суммарному спуску, весь маршрут муравья можно разбить на 3 части: общий подъём, общий спуск и общий горизонтальный участок.

Обозначим общее время, которое муравей поднимался, за t. Тогда длина подъёма (как и спуска) равна $3t$, а общее время спуска равно $3t/v$, где v — искомая скорость спуска.

Таким образом, время горизонтального движения равно $7 - t - 3t/v$, и мы можем выразить общий пройденный путь:

$$28 = 3t + 4\left(7 - t - 3 \cdot \frac{t}{v}\right) + 3t,$$

$$28 = 6t + 28 - 4t - 12 \cdot \frac{t}{v}, \quad 0 = 2t - 12 \cdot \frac{t}{v}, \quad 6 \cdot \frac{t}{v} = t, \quad v = 6.$$

Критерии. Только правильный ответ — 1 балл. Вывод уравнения — 2 балла. Доказательство на конкретном примере — не более 3 баллов.

6. Попугай Роза знает все четыре звука своего имени и умеет произносить «слова» длиной от одного до трёх звуков. При этом она не умеет произносить два одинаковых звука подряд. Сколько разных «слов» может сказать Роза? (*О. С. Третьякова*)

   Ответ: 52 слова.

   Решение. Роза может произнести 4 слова длиной в один звук.

   Если в слове 2 звука, то она может произнести $4 \cdot 3 = 12$ таких слов, так как второй звук не может быть равен первому.

   Наконец, если в слове 3 звука, то она может произнести $4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$ таких слов, так как второй звук не может быть равен первому, а третий — второму.

   Итого она может сказать $4 + 12 + 36 = 52$ различных слова.

   Критерии. Только правильный ответ — 1 балл. Арифметические ошибки — минус 1–2 балла. Также снимаются баллы, если нет достаточно полных объяснений (например, не объяснено, откуда берутся числа 12 и 36).

7. Все десять цифр разбили на пары и в каждой вычислили разность (вычитая из большей цифры меньшую). Какой наибольшей степени двойки может равняться произведение всех этих разностей? (Степень двойки — это произведение нескольких двоек, например, пятая степень двойки равна $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$.) (*С. П. Павлов*)

   Ответ: $2^{10} = 1024$.

   Решение. Десять цифр разбиваются на пять разностей. Чтобы их произведение равнялось степени двойки, каждая из них должна равняться степени двойки, то есть 1, 2, 4 или 8. Заметим, что поскольку чётных и нечётных цифр по 5, то хотя бы в одну из разностей попадут цифры разной чётности, и она должна равняться 1. Наибольшая степень двойки при указанном вычитании — это $2^3 = 8$, и она получается только в таких случаях: $9 - 1$ и $8 - 0$. Каждая из оставшихся двух разностей не больше, чем 2^2. Поэтому при умножении двойка получится не более, чем в $3 + 3 + 2 + 2 + 0 = 10$ степени.

   Пример: $(9 - 1) \cdot (8 - 0) \cdot (7 - 3) \cdot (6 - 2) \cdot (5 - 4) = 8 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 1 = 2^{10}$.

   Примечание. Пример единственен (с точностью до перестановки множителей).

   Критерии. За пример 3 балла, за оценку (то есть доказательство, что больше, чем 2^{10}, получить нельзя) — 4 балла.

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2025-2026 учебный год. Отборочный этап

Решения задач для 6 класса

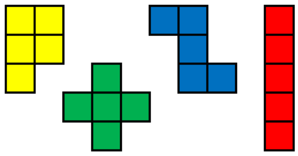
Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.
Оценка в 1–3 балла означает, что задача в целом не решена, но есть существенные продвижения; оценка в 4–6 баллов — задача в целом решена, но есть существенные недостатки.
Для некоторых задач есть частные критерии, указанные ниже.

1. Можно ли в равенстве $* + * + * + * + * + * + * = **$ расставить все ненулевые цифры так, чтобы равенство было верным? (В левой его части — сумма однозначных чисел, в правой — двузначное число.) (*С. П. Павлов*)

Ответ: да; например, $1 + 2 + 4 + 5 + 7 + 8 + 9 = 36$.

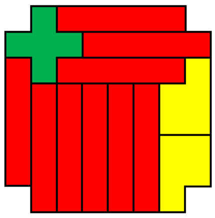
Критерии. Только ответ «да» или «нет» — 0 баллов. Пример — 7 баллов.

2. Русские программисты придумали новый «Тетрис-5». Фигуры (на рисунке) можно размещать на клетчатом поле в любом положении, чтобы они не накладывались друг на друга (как и в классическом тетрисе, фигуры можно поворачивать, но не переворачивать).



a) Докажите, что возможно покрыть поле 8×8, если из него удалены четыре угловые клетки.
b) Докажите, что невозможно покрыть поле 2026×2026, если из него удалены четыре угловые клетки. (*Л. С. Корешкова*)

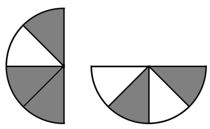
Решение. a) Для доказательства достаточно любого примера (один из них показан справа).



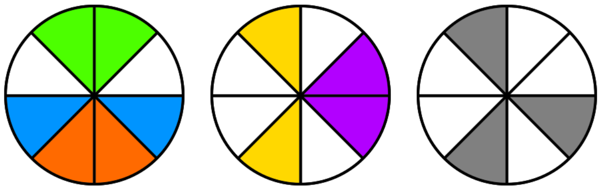
b) Площадь поля 2026×2026 после удаления четырёх угловых клеток равна $2026 \cdot 2026 - 4$, последняя цифра этого числа равна $6 - 4 = 2$. Но каждая фигурка состоит из 5 клеток, то есть площадь покрытой фигуры должна делиться на 5. Следовательно, данный квадрат без угловых клеток заполнить невозможно.

Критерии. Правильно решён только пункт (a) — 3 балла. Если все фигуры отзеркалены (после отражения рисунка получается верный пример) — минус 1 балл. Если только часть фигур отзеркалена (то есть при отражении всей картинки проблема не исчезает) — 1 балл за пункт (a). «Можно, поскольку число клеток делится на 5» — 0 баллов (поскольку делимости на 5 недостаточно).
Правильно решён только пункт (b) — 3 балла. Правильно решены оба пункта — 7 баллов.

3. Прозрачный круглый диск разделён на 8 равных секторов. Некоторые из секторов закрашены. Если сложить диск пополам по вертикальной оси, видно 3 закрашенных сектора. Если сложить диск пополам по горизонтальной оси, видно 2 закрашенных сектора. Сколько всего закрашено секторов? Найдите все варианты и докажите, что других нет. (*П. Д. Муленко*)



Решение. Так как в результате складывания пополам по вертикальной оси видно 3 закрашенных сектора, то и в самом диске должны быть закрашены не менее трёх секторов.
При этом, если мы развернём обратно каждый из двух полукругов, мы увидим три и две пары секторов соответственно, в каждой из которых должно быть закрашено не менее одного сектора (см. левые два рисунка).

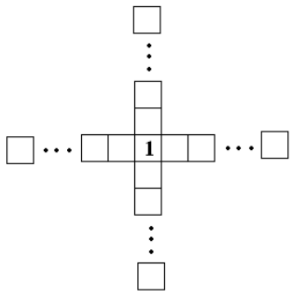


Сопоставляя эти две диаграммы, можно заметить, что верхний из правых секторов не может быть закрашен, а остальные три выделенных сектора центральной диаграммы обязаны быть закрашены.

Таким образом, в диске закрашены ровно 3 сектора, изображённые на правом рисунке.

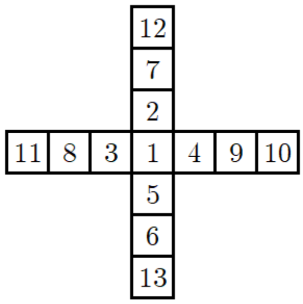
Критерии. Только ответ — 0 баллов. Ответ с примером — 2 балла. Доказано, что количество закрашенных секторов не может быть меньше 3 и больше 4 — по 1 баллу за оценку с каждой стороны.

4. На игровом поле в форме крестика из клеток (см. рисунок) два игрока по очереди делают ходы. В начале игры занята только центральная клетка, в которой написано число 1. Ход заключается в том, что игрок вписывает в четыре клетки, смежные с уже занятыми, следующие по порядку натуральные числа — первый игрок пишет числа 2, 3, 4, 5, потом второй пишет числа 6, 7, 8, 9, и так далее. Числа вписываются по одному в каждое направление креста так, чтобы любые два числа, стоящие в соседних клетках, были взаимно простыми (то есть не имели общих делителей, больших 1). Если кто-то из игроков не может сделать ход, то он проигрывает. Какой из игроков может обеспечить себе победу при правильной игре? (*С. П. Павлов*)



Ответ: первый.

Решение. В первые 3 хода игроки напишут числа 2–5, 6–9, и 10–13 (например, так, как на рисунке). После этого второму игроку необходимо написать числа 14, 15, 16, 17. Заметим, что число 15 не может стоять на поле рядом ни с 10, ни с 12, то есть это число второй игрок может расположить только рядом с числами 11 или 13. Но числа 14 и 16 тоже можно написать только рядом с нечётными (то есть тоже рядом с 11 и 13). Таким образом, второй игрок не сможет сделать свой второй ход и проиграет.



Критерии. Только ответ — 0 баллов. Указание, что чётные числа не могут быть в соседних клетках — 2 балла.

5. Попугай Роза знает все четыре звука своего имени и умеет произносить «слова» длиной от одного до четырёх звуков. При этом она не умеет произносить два одинаковых звука подряд. Сколько разных «слов» может сказать Роза? (*О. С. Третьякова*)

Ответ: 160 слов.

Решение. Роза может произнести 4 слова длиной в один звук.

Если в слове 2 звука, то она может произнести $4 \cdot 3 = 12$ таких слов, так как второй звук не может быть равен первому.

Если в слове 3 звука, то она может произнести $4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$ таких слов, так как второй звук не может быть равен первому, а третий — второму.

Наконец, если в слове 4 звука, то она может произнести $4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 108$ таких слов, так как второй звук не может быть равен первому, третий — второму, а четвёртый — третьему.

Итого, она может сказать $4 + 12 + 36 + 108 = 160$ различных слов.

Критерии. Только правильный ответ — 1 балл. Арифметические ошибки — минус 1–3 балла. Также снимаются баллы, если нет достаточно полных объяснений (например, не объяснено, откуда берутся числа 12, 36 и 108).

6. У Ирины есть 289 монет из нескольких стран. Она разложила их поровну в несколько коробок, причём в каждой коробке лежат монеты (более одной штуки) только одной страны. Известно, что белорусские монеты составляют более 6% от общего количества, испанские — более 12%, эквадорские — более 24%, и русские — более 36%. Сколько у Ирины может быть китайских монет? Найдите все варианты. (*Л. С. Корешкова*)

   Ответ: у Ирины не может быть ни одной монеты из Китая.

   Решение. Так как $289 = 17^2$, Ирина может разложить свои монеты только в 17 коробок по 17 штук в каждой (положить все монеты в одну коробку или в 289 коробок по одной монете запрещено условием):

   - белорусских монет больше $289 \cdot 0{,}06 = 17{,}34 > 17$, то есть их не менее 2 коробок;
   - испанских монет больше $289 \cdot 0{,}12 = 34{,}68 > 34 = 17 \cdot 2$, то есть их не менее 3 коробок;
   - эквадорских монет больше $289 \cdot 0{,}24 = 69{,}36 > 68 = 17 \cdot 4$, то есть их не менее 5 коробок;
   - русских монет больше $289 \cdot 0{,}36 = 104{,}04 > 102 = 17 \cdot 6$, то есть их не менее 7 коробок.

   Таким образом, у Ирины уже заняты $2 + 3 + 5 + 7 = 17$ коробок, то есть свободных коробок для монет других стран не осталось.

   Критерии. Только ответ — 1 балл. Разложение 289 на множители (замечание о том, что коробок 17) — +1 балл. Ошибки в подсчёте монет — минус 1 балл за каждую страну. Не учтено, что монеты лежат поровну — не более 2 баллов.

7. В стране Оз все города пронумерованы числами от 1 до N, причём N чётно, но не кратно 4. Каждые два города соединены или дорогой из жёлтого кирпича, или дорогой из зелёного изумруда. Главный Волшебник решил изменить нумерацию городов так, чтобы те номера, что соединялись жёлтой дорогой, теперь соединялись зелёной, и наоборот. Получится ли у Волшебника осуществить задуманное? (*Л. С. Корешкова*)

   Ответ: нет, не получится.

   Решение. Раз количество городов N чётно, но не делится на 4, его можно представить как $N = 4k + 2$. Тогда общее количество дорог в стране Оз равно

$$\frac{N \cdot (N-1)}{2} = \frac{(4k+2) \cdot (4k+1)}{2} = (2k+1) \cdot (4k+1).$$

   Оба числа $2k + 1$ и $4k + 1$ являются нечётными, то есть и общее количество дорог нечётно. Но тогда количество дорог из жёлтого кирпича не может быть равно количеству дорог из зелёного изумруда, поэтому какая-то пара номеров останется соединена дорогой того же цвета, что и до перенумерования.

   Критерии. Только ответ — 0 баллов. Доказано, что суммарное количество дорог нечётно — 5 баллов.

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2025-2026 учебный год. Отборочный этап

Решения задач для 7 класса

Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.
Оценка в 1–3 балла означает, что задача в целом не решена, но есть существенные продвижения; оценка в 4–6 баллов — задача в целом решена, но есть существенные недостатки.
Для некоторых задач есть частные критерии, указанные ниже.

1. Муравей прополз по туннелю длиной 28 см от левого края муравьиной фермы до правого. Туннель состоит из горизонтальных участков, подъёмов и спусков (уклоны всех подъёмов и спусков одинаковы по крутизне). На подъёме муравей ползёт со скоростью 3 см/мин, по горизонтали — 4 см/мин. Весь путь занял у муравья 7 минут. Туннель не полностью горизонтален, но в конце муравей оказался на той же высоте, что и в начале (то есть суммарный подъём равен суммарному спуску). Найдите скорость муравья на спуске (в см/мин). (*П. Д. Муленко*)

Ответ: 6 см/мин.

Решение. Поскольку суммарный подъём равен суммарному спуску, весь маршрут муравья можно разбить на 3 части: общий подъём, общий спуск и общий горизонтальный участок.
Обозначим общее время, которое муравей поднимался, за t. Тогда длина подъёма (как и спуска) равна $3t$, а общее время спуска равно $3t/v$, где v — искомая скорость спуска.
Таким образом, время горизонтального движения равно $7 - t - 3t/v$, и мы можем выразить общий пройденный путь:

$$28 = 3t + 4\left(7 - t - 3 \cdot \frac{t}{v}\right) + 3t,$$

$$28 = 6t + 28 - 4t - 12 \cdot \frac{t}{v}, \quad 0 = 2t - 12 \cdot \frac{t}{v}, \quad 6 \cdot \frac{t}{v} = t, \quad v = 6.$$

Критерии. Только правильный ответ — 1 балл. Вывод уравнения — 2 балла. Доказательство на конкретном примере — не более 3 баллов.

2. В каждой клетке таблицы 3×5 стоит натуральное число. При этом все числа различны, но суммы во всех строках одинаковы и во всех столбцах тоже одинаковы. Какова минимально возможная сумма чисел в таблице? (*А. А. Теслер*)

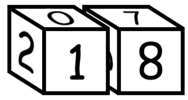
Ответ: 120.

Решение. Сумма будет минимальной при использовании минимальных возможных чисел. Сумма чисел от 1 до 15 равна $15 \cdot 16/2 = 120$, что кратно и 3, и 5 (то есть сумма в строке должна быть равна $120/3 = 40$, а в столбце — $120/5 = 24$.
Осталось привести пример заполненной таблицы:

15	3	6	4	12
1	7	13	9	10
8	14	5	11	2

Критерии. Только ответ — 1 балл. Дан ответ и приведен пример — 3 балла. Дан ответ и приведено доказательство того, что меньше 120 быть не может, но примера нет — 3 балла.

3. У Паши есть много деревянных кубиков и наклеек с цифрами. Из двух кубиков можно изготовить сувенирный календарь — для этого надо наклеить на каждую грань обоих кубиков по наклейке так, чтобы с их помощью можно было сложить любой день месяца (то есть любое число от 01 до 31; на рисунке представлен пример числа 18). Паша хочет сделать подарить каждому своему другу особую версию такого календаря. Сколько различных календарей он может сделать?
Паша считает два календаря различными, если в одном из них есть кубик с неким набором наклеек, а в другом кубика с таким же набором наклеек нет; расположение цифр на гранях Паша не учитывает. (*М. В. Карлукова*)



Ответ: 10 календарей.

Решение. Так как среди чисел присутствуют 11 и 22, цифры 1 и 2 должны быть на обоих кубиках. Более того, поскольку первые 9 дат от 01 до 09 содержат 0, цифра 0 тоже должна присутствовать на обоих кубиках (так как не все цифры от 3 до 9 поместятся на одном кубике).
Таким образом, на каждом кубике 3 грани заняты цифрами 0, 1 и 2, то есть остаётся 6 мест для остальных цифр от 3 до 9. Несмотря на то что это 7 различных цифр, Паша может справиться, если наклеит только одну из цифр 6 и 9 — действительно, одна цифра получается из другой переворотом.
Итак, Паше надо разместить на каждый из кубиков цифры 0, 1, 2 и три цифры из набора от 3 до 8. Поскольку расположение цифр на кубике Паше не важно, количество различных календарей ограничено количеством способов разделить цифры от 3 до 8 на две равные группы по 3 цифры на каждый из кубиков. Выбрать 3 цифры на первый кубик можно

$$C_6^3 = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$$

способами, но порядок кубиков нам не важен — например, разбиение цифр на $\{3, 4, 5\}$ для первого кубика и $\{6, 7, 8\}$ для второго равнозначно разбиению на $\{6, 7, 8\}$ для первого кубика и $\{3, 4, 5\}$ для второго — поэтому Паша может сделать всего $20/2 = 10$ различных календарей.

Критерии. Только ответ — 1 балл. Показано, что на обоих кубиках должны быть цифры 1 и 2 — +1 балл. Показано, что на обоих кубиках должна быть цифра 0 — +1 балл. Не учтено, что порядок кубиков не важен (получается 20 вместо 10) — −2 балла. Подсчитано число способов с учетом расположения цифр на гранях — −2 балла.

4. У Ирины есть 289 монет из нескольких стран. Она разложила их поровну в несколько коробок, причём в каждой коробке лежат монеты (более одной штуки) только одной страны. Известно, что белорусские монеты составляют более 6% от общего количества, испанские — более 12%, эквадорские — более 24%, и русские — более 36%. Сколько у Ирины может быть китайских монет? Найдите все варианты. (*Л. С. Корешкова*)

Ответ: у Ирины не может быть ни одной монеты из Китая.

Решение. Так как $289 = 17^2$, Ирина может разложить свои монеты только в 17 коробок по 17 штук в каждой (положить все монеты в одну коробку или в 289 коробок по одной монете запрещено условием):

- белорусских монет больше $289 \cdot 0{,}06 = 17{,}34 > 17$, то есть их не менее 2 коробок;
- испанских монет больше $289 \cdot 0{,}12 = 34{,}68 > 34 = 17 \cdot 2$, то есть их не менее 3 коробок;
- эквадорских монет больше $289 \cdot 0{,}24 = 69{,}36 > 68 = 17 \cdot 4$, то есть их не менее 5 коробок;
- русских монет больше $289 \cdot 0{,}36 = 104{,}04 > 102 = 17 \cdot 6$, то есть их не менее 7 коробок.

Таким образом, у Ирины уже заняты $2 + 3 + 5 + 7 = 17$ коробок, то есть свободных коробок для монет других стран не осталось.

Критерии. Только ответ — 1 балл. Разложение 289 на множители (замечание о том, что коробок 17) — +1 балл. Ошибки в подсчёте монет — минус 1 балл за каждую страну. Не учтено, что монеты лежат поровну — не более 2 баллов.

5. Если в волшебный автомат ввести натуральное число $n > 1$, то он строит клетчатый квадрат $n \times n$, удаляет из него одну клетку и добавляет доминошки 1×2 до тех пор, пока суммарная площадь фигур не станет равна площади какого-нибудь клетчатого квадрата. Сторону этого нового квадрата автомат возвращает обратно. Катя сто раз обменялась карточками с автоматом и получила 2025. С какого числа она начала? (*П. Д. Муленко*)

Ответ: 1925.

Решение. Рассмотрим одну операцию автомата с числом n:

- он строит квадрат $n \times n$ площадью n^2 клеток;
- убирает из него одну клетку, получая многоугольник площади $n^2 - 1$;
- добавляет к нему k доминошек, получая многоугольник площади $n^2 - 1 + 2k$, которая равна квадрату какого-то числа m;
- число m он возвращает обратно.

После добавления первой доминошки площадь многоугольника равна $n^2 - 1 + 2 \cdot 1 = n^2 + 1$, то есть фигура уже больше изначального квадрата, что означает, что $m > n$. При этом следующий возможный квадрат равен $(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$, и это число оказывается достижимо после добавления ещё n доминошек к уже имеющейся площади $n^2 + 1$.

Таким образом, каждый раз автомат будет выдавать следующее натуральное число. Раз Катя обменялась карточками 100 раз и получила 2025, она должна была начать с числа на 100 меньшего: $2025 - 100 = 1925$.

Критерии. Только ответ — 1 балл. Сформулировано утверждение о том, что автомат выдаст $n+1$ после ввода n — +1 балл. Доказано это утверждение — 5 баллов. Ошибка ± 1 при поиске ответа — -1 балл

6. В стране Оз все города пронумерованы числами от 1 до N, причём N чётно, но не кратно 4. Каждые два города соединены или дорогой из жёлтого кирпича, или дорогой из зелёного изумруда. Главный Волшебник решил изменить нумерацию городов так, чтобы те номера, что соединялись жёлтой дорогой, теперь соединялись зелёной, и наоборот. Получится ли у Волшебника осуществить задуманное? (*Л. С. Корешкова*)

Ответ: нет, не получится.

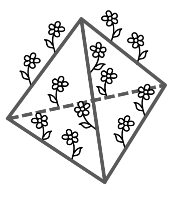
Решение. Раз количество городов N чётно, но не делится на 4, его можно представить как $N = 4k + 2$. Тогда общее количество дорог в стране Оз равно

$$\frac{N \cdot (N-1)}{2} = \frac{(4k+2) \cdot (4k+1)}{2} = (2k+1) \cdot (4k+1).$$

Оба числа $2k + 1$ и $4k + 1$ являются нечётными, то есть и общее количество дорог нечётно. Но тогда количество дорог из жёлтого кирпича не может быть равно количеству дорог из зелёного изумруда, поэтому какая-то пара номеров останется соединена дорогой того же цвета, что и до перенумерования.

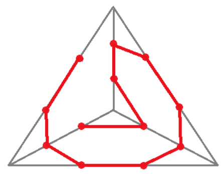
Критерии. Только ответ — 0 баллов. Доказано, что суммарное количество дорог нечётно — 5 баллов.

7. Земляной холм представляет из себя правильную треугольную пирамиду, все рёбра которой 3 м. На каждом ребре в двух точках, которые делят ребро на три равные части, растёт по цветку. Пчела, прилетев на один из цветков, хочет посетить все 12 цветков кратчайшим маршрутом. Какой длины этот маршрут? (*Л. С. Корешкова*)



Ответ: 11 метров.

Решение. Расстояние между любыми двумя цветками не менее 1 метра. Более того, на минимальном расстоянии находятся не только цветки на одном ребре, но и тройки ближайших цветков к каждой из вершин тетраэдра. Таким образом, чтобы попасть на каждый новый цветок, нужно не менее 1 метра, поэтому весь маршрут пчелы не может быть короче 11 метров. Пример маршрута длиной 11 метров показан на рисунке (вид сверху).



Примечание. Можно понимать вопрос задачи более строго — что для каждого начального цветка требуется найти кратчайшую длину пути, который начинается на этом цветке. Тогда верным ответом будет «11 или $10+\sqrt{3}$ в зависимости от того, на какой цветок прилетела пчела изначально». Поскольку условие можно понять обоими способами, жюри засчитывало решение в любой из этих трактовок.

Критерии. Только оценка — 3 балла. Только пример — 3 балла (если пример требует «полётов под землёй», то есть по нижней грани тетраэдра, то он оценивается в 1 балл вместо 3). Утверждение, что расстояние между определёнными точками 1 метр, а между остальными больше 1 метра, не требует доказательства.

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2025-2026 учебный год. Отборочный этап

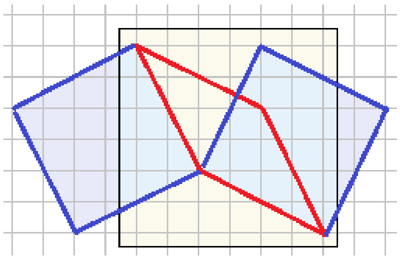
Решения задач для 8 класса

Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.
Оценка в 1–3 балла означает, что задача в целом не решена, но есть существенные продвижения; оценка в 4–6 баллов — задача в целом решена, но есть существенные недостатки.
Для некоторых задач есть частные критерии, указанные ниже.

---

1. Петя нарисовал на квадратном листе бумаги ромб, который не является квадратом. Всегда ли Вася сумеет на том же листе нарисовать квадрат, две соседних вершины которого совпадают с двумя соседними вершинами ромба? (*А. А. Теслер*)

Ответ: нет — можно сделать так, чтобы каждый из восьми квадратов выходил за края листа (пример показан справа).



Критерии. Только ответ «не всегда» — 0 баллов.
Показан верный пример, но не объяснено, почему он подходит — 3 балла.
Показан подходящий пример и нарисованы все существенно различные виды квадратов, но то, что они выходят за границу листа, продемонстрировано только рисунком без расчётов, объяснений и без явной привязки к клетчатой сетке — 5 баллов.

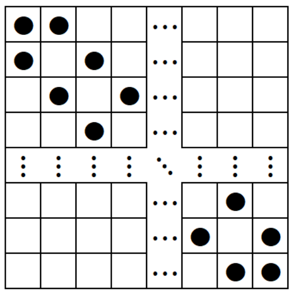
2. В некоторых клетках клетчатого поля $n \times n$ стоит по шашке так, что в каждой строке, каждом столбце и каждой из двух больших диагоналей шашек ровно две. При каких n такое возможно? (*С. П. Павлов*)

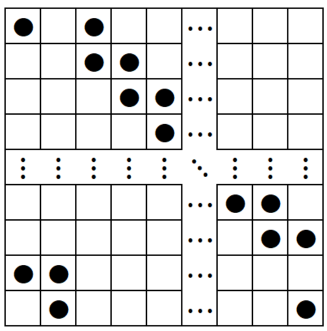
Ответ: при $n = 2$ и $n \geqslant 4$.

Решение. Очевидно, что n не может быть равно 1 и может быть равно 2.
Если $n = 3$, то необходимо поставить 6 шашек, то есть оставить пустыми всего 3:

- если центральная клетка пуста, то все 4 угла должны быть заняты (чтобы в диагоналях было по 2 шашки), но тогда по 2 шашки уже есть в крайних столбцах и строках, то есть больше шашек ставить нельзя;
- если центральная клетка занята, то только 2 угла из 4 заняты, причём смежные (вдоль одной стороны), но тогда у противоположной стороны 2 шашки поставить не получится.

Наконец, при всех остальных $n \geqslant 4$ расстановка существует:



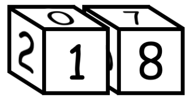


- если n чётно, то достаточно выбрать одну большую диагональ, поставить по шашке на её концах и заполнить шашками обе параллельные чуть более короткие диагонали (см. верхний рисунок);
- если n нечётно, то достаточно поставить по шашке в два противоположных угла, ещё три шашки вокруг третьего угла, а в остальном квадрате размером $(n-2) \times (n-2)$ поставить шашки «лесенкой» по двум параллельным диагоналям (см. нижний рисунок).

Критерии. Только пример для какого-то конкретного $n > 4$ — 1 балл.

Баллы за следующие продвижения суммируются: рассмотрены случаи $n \leqslant 2$ — 1 балл; $n = 3$ — 1 балл; $n > 3$ — по два балла за чётный и нечётный случаи; +1 балл за полное решение.

3. У Павла есть много деревянных кубиков и наклеек с цифрами. Из двух кубиков можно изготовить сувенирный календарь — для этого надо наклеить на каждую грань обоих кубиков по наклейке так, чтобы с их помощью можно было сложить любой день месяца (то есть любое число от 01 до 31; на рисунке представлен пример числа 18). Павел планирует открыть бизнес по производству сувенирных календарей, причём хочет, чтобы каждое изделие было уникальным. Сколько различных календарей он может сделать?



Павел считает два календаря одинаковыми, если для каждого кубика из первого календаря есть такой же кубик во втором. В свою очередь, два кубика одинаковы, если можно поставить их рядом так, чтобы с каждой из шести сторон наклейки на этих кубиках были одинаковыми (возможно, по-разному повёрнутыми). (*М. В. Карлукова*)

Ответ: 9000 календарей.

Решение. Так как среди чисел присутствуют 11 и 22, цифры 1 и 2 должны быть на обоих кубиках. Более того, поскольку первые 9 дат от 01 до 09 содержат 0, цифра 0 тоже должна присутствовать на обоих кубиках (так как не все цифры от 3 до 9 поместятся на одном кубике).
Таким образом, на каждом кубике 3 грани заняты цифрами 0, 1 и 2, то есть остаётся 6 мест для остальных цифр от 3 до 9. Несмотря на то что это 7 различных цифр, Павел может справиться, если наклеит только одну из цифр 6 и 9 — действительно, одна цифра получается из другой переворотом.
Итак, Павлу надо разместить на каждый из кубиков цифры 0, 1, 2 и три цифры из набора от 3 до 8. Поскольку расположение цифр на кубике Павлу не важно, количество различных календарей ограничено количеством способов разделить цифры от 3 до 8 на две равные группы по 3 цифры на каждый из кубиков. Выбрать 3 цифры на первый кубик можно

$$C_6^3 = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$$

способами, но порядок кубиков нам не важен — например, разбиение цифр на $\{3, 4, 5\}$ для первого кубика и $\{6, 7, 8\}$ для второго равнозначно разбиению на $\{6, 7, 8\}$ для первого кубика и $\{3, 4, 5\}$ для второго — поэтому у Павла есть всего $20/2 = 10$ различных способов выбрать цифры на каждый из кубиков.
Наконец, их осталось расставить. Наклеим на каждый из кубиков цифру 0 и поставим их так, чтобы календарь показывал 00. Тогда для противоложной цифры на задней грани есть 5 кандидатов, а остальные четыре цифры надо поставить вокруг «кольца» из 4 граней, то есть для каждой возможной расстановки есть 4 повтора из-за поворота кубика.
Итого у Павла есть $5 \cdot 4!/4 = 30$ способов расставить числа на каждом из кубиков, то есть он может сделать $10 \cdot 30^2 = 9000$ различных календарей.

Критерии. Баллы суммируются.

Цифры 0, 1, 2 должны быть на каждом кубике — 1 балл.

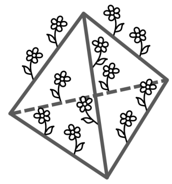
Вариантов выбрать цифры на кубик = 20 — 1 балл.

Учтено, что различных пар кубиков на самом деле 10 — +1 балл.

Оставшиеся 4 балла стоит понимание, что расставить числа на кубике можно 30 вариантами.

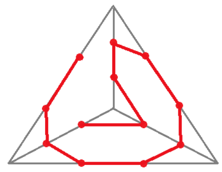
Таким образом, решение с ответом 18000 (а не 9000) стоит 6 баллов.

4. Земляной холм представляет из себя правильную треугольную пирамиду, все рёбра которой 3 м. На каждом ребре в двух точках, которые делят ребро на три равные части, растёт по цветку. Пчела, прилетев на один из цветков, хочет посетить все 12 цветков кратчайшим маршрутом. Какой длины этот маршрут? (*Л. С. Корешкова*)



Ответ: 11 метров.

Решение. Расстояние между любыми двумя цветками не менее 1 метра. Более того, на минимальном расстоянии находятся не только цветки на одном ребре, но и тройки ближайших цветков к каждой из вершин тетраэдра. Таким образом, чтобы попасть на каждый новый цветок, нужно не менее 1 метра, поэтому весь маршрут пчелы не может быть короче 11 метров. Пример маршрута длиной 11 метров показан на рисунке (вид сверху).



Примечание. Можно понимать вопрос задачи более строго — что для каждого начального цветка требуется найти кратчайшую длину пути, который начинается на этом цветке. Тогда верным ответом будет «11 или $10+\sqrt{3}$ в зависимости от того, на какой цветок прилетела пчела изначально». Поскольку условие можно понять обоими способами, жюри засчитывало решение в любой из этих трактовок.

Критерии. Только оценка — 3 балла. Только пример — 3 балла (если пример требует «полётов под землёй», то есть по нижней грани тетраэдра, то он оценивается в 1 балл вместо 3). Утверждение, что расстояние между определёнными точками 1 метр, а между остальными больше 1 метра, не требует доказательства.

5. Если в начало натурального числа дописать одну цифру, то получится квадрат этого числа. Найдите самое большое такое число. (*П. Д. Муленко*)

Ответ: 25.

Решение. Если число хотя бы трёхзначное, то его квадрат будет минимум на 2 цифры длиннее ($100^2 = 10\,000$), поэтому искомое число (пусть $\overline{ab}$) не более чем двузначное:

$$(\overline{ab})^2 = \overline{kab} \quad \Leftrightarrow \quad (\overline{ab})^2 = \overline{k00} + \overline{ab} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{ab} \cdot (\overline{ab} - 1) = 100k,$$

где k — дописанная цифра.

Чтобы произведение двух последовательных чисел делилось на 100, одно из них должно делиться на 25. При этом $\overline{ab} < 32$, так как $32^2 = 1024$ — уже четырёхзначное число. Таким образом, $\overline{ab}$ может быть равно 25 или 26, но только в первом случае квадрат отличается от самого числа только первой цифрой: $25^2 = 625$, $26^2 = 676$.

Таким образом, наибольшее такое число — 25.

Примечание. Более того, 25 — это единственное такое двузначное число.

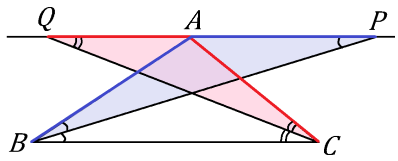
Критерии. Только ответ — 1 балл. Замечание о том, что исходное число не может содержать более двух цифр — 2 балла.

6. Дан разносторонний тупоугольный треугольник ABC с целыми сторонами. Через вершину тупого угла A провели прямую, параллельную BC, и отметили точки пересечения этой прямой с биссектрисами углов B и C как P и Q. Чему равно PQ, если $BC = 4$? (*П. Д. Муленко*)

Ответ: $PQ = 5$.

Решение. Из неравенств треугольника ABC следует, что $AB + AC > BC = 4$. А так как треугольник тупоугольный, то сторона BC, лежащая напротив тупого угла A, является наибольшей, то есть обе стороны AB и AC должны быть меньше 4. Наконец, так как треугольник ABC разносторонний, одна из сторон AB и AC равна 2, а другая — 3.

Поскольку BP является биссектрисой угла B, то $\angle PBC = \angle PBA$. Далее, прямая PQ параллельна BC, поэтому $\angle PBC = \angle BPA$. Значит, $\angle PBA = \angle BPA$, то есть треугольник BAP — равнобедренный, и $AP = AB$. Аналогично из равнобедренного треугольника QAC получаем, что $QA = AC$, а тогда искомая длина равна $PQ = PA + AQ = AB + AC = 2 + 3 = 5$.



Критерии. Замечено равенство накрест лежащих углов — 1 балл.
Доказано, что стороны AB и AC равны 2 и 3 — 3 балла.
Замечено, что на картинке два равнобедренных треугольника — 3 балла.

7. Квиз состоит из нескольких вопросов (более одного), причём в каждом вопросе одинаковое число вариантов ответа. Если на очередной вопрос выбирается неправильный ответ, вы проигрываете. Однако у вас есть одна «запасная жизнь» на весь квиз: при первом выборе неправильного ответа вы не выбываете, а можете исправиться и дать ещё один ответ на тот же вопрос (если и второй ответ неверен — вы проигрываете). Вероятность пройти квиз, выбирая ответы наугад, равна $2/81$. Сколько в квизе вопросов и сколько вариантов ответа в каждом вопросе? *(П. Д. Муленко)*

Ответ: в квизе 5 вопросов по 3 варианта ответа в каждом.

Решение. Обозначим количество вопросов за n, а количество вариантов ответа в каждом вопросе за k. Вероятность угадать ответ на очередной вопрос равна $1/k$, то есть вероятность угадать ответы на все n вопросов равна $1/k^n$.
Если же на какой-то вопрос вы сперва ответили неверно с вероятностью $\frac{k-1}{k}$, то вы можете исправить свой ответ и повторно угадать правильный среди $k-1$ оставшихся. Таким образом, полная вероятность угадать ответ на вопрос с ошибкой равна

$$\frac{k-1}{k} \cdot \frac{1}{k-1} = \frac{1}{k},$$

и есть n способов выбрать вопрос, на который вы ответите со второй попытки. Итого, полная вероятность успешно пройти квиз наугад равна

$$\frac{1}{k^n} + \frac{n}{k^n} = \frac{n+1}{k^n} = \frac{2}{81}.$$

Упрощая получившееся уравнение, получаем $81(n+1) = 2k^n$. Правая часть чётна, то есть $n+1$ чётно, откуда само n нечётно (и больше одного):
$\boldsymbol{n = 3}$**:** $81 \cdot (3+1) = 2k^3 \quad \Rightarrow \quad k^3 = 81 \cdot 4 / 2 = 162$ — не подходит, так как 162 не куб;
$\boldsymbol{n = 5}$**:** $81 \cdot (5+1) = 2k^5 \quad \Rightarrow \quad k^5 = 81 \cdot 6 / 2 = 243$ — подходит, $k = 3$.
Левая часть делится на 81, то есть k обязательно кратно 3. Поэтому при дальнейшем увеличении n левая часть будет каждый раз увеличиваться на 162, а правая — как минимум в 9 раз. Иными словами, при $n > 5$ правая часть всегда будет больше левой, и новых решений не найдётся.
Итого в квизе $n = 5$ вопросов, в каждом из которых по $k = 3$ варианта ответа.

Критерии. Вывод уравнения $\dfrac{n+1}{k^n} = \dfrac{2}{81}$ — 3 балла. Если решение этого уравнение угадано — +1 балл. Если не обосновано, что нет решений при $n > 5$ — 5 баллов.
Только ответ с проверкой, что для него вероятность равна $\dfrac{2}{81}$, — 2 балла.
Вместо верного составлено уравнение $\dfrac{2}{k^n} = \dfrac{2}{81}$ — 1 балл.

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2025-2026 учебный год. Отборочный этап

Решения задач для 9 класса

Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.
Оценка в 1–3 балла означает, что задача в целом не решена, но есть существенные продвижения; оценка в 4–6 баллов — задача в целом решена, но есть существенные недостатки.
Для некоторых задач есть частные критерии, указанные ниже.

1. У Ирины есть 289 монет из нескольких стран. Она разложила их поровну в несколько коробок, причём в каждой коробке лежат монеты (более одной штуки) только одной страны. Известно, что белорусские монеты составляют более 6% от общего количества, испанские — более 12%, эквадорские — более 24%, и русские — более 36%. Сколько у Ирины может быть китайских монет? Найдите все варианты. (*Л. С. Корешкова*)

   Ответ: у Ирины не может быть ни одной монеты из Китая.

   Решение. Так как $289 = 17^2$, Ирина может разложить свои монеты только в 17 коробок по 17 штук в каждой (положить все монеты в одну коробку или в 289 коробок по одной монете запрещено условием):
   - белорусских монет больше $289 \cdot 0{,}06 = 17{,}34 > 17$, то есть их не менее 2 коробок;
   - испанских монет больше $289 \cdot 0{,}12 = 34{,}68 > 34 = 17 \cdot 2$, то есть их не менее 3 коробок;
   - эквадорских монет больше $289 \cdot 0{,}24 = 69{,}36 > 68 = 17 \cdot 4$, то есть их не менее 5 коробок;
   - русских монет больше $289 \cdot 0{,}36 = 104{,}04 > 102 = 17 \cdot 6$, то есть их не менее 7 коробок.

   Таким образом, у Ирины уже заняты $2 + 3 + 5 + 7 = 17$ коробок, то есть свободных коробок для монет других стран не осталось.

   Критерии. Только ответ — 1 балл. Разложение 289 на множители (замечание о том, что коробок 17) — +1 балл. Ошибки в подсчёте монет — минус 1 балл за каждую страну. Не учтено, что монеты лежат поровну — не более 2 баллов.

2. В каждой клетке таблицы 3×5 стоит натуральное число. При этом все числа различны, но суммы во всех строках одинаковы и во всех столбцах тоже одинаковы. Какова минимально возможная сумма чисел в таблице? (*А. А. Теслер*)

   Ответ: 120.

   Решение. Сумма будет минимальной при использовании минимальных возможных чисел. Сумма чисел от 1 до 15 равна $15 \cdot 16/2 = 120$, что кратно и 3, и 5 (то есть сумма в строке должна быть равна $120/3 = 40$, а в столбце — $120/5 = 24$.

   Осталось привести пример заполненной таблицы:

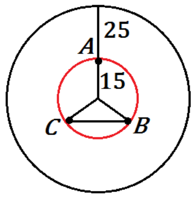
15	3	6	4	12
1	7	13	9	10
8	14	5	11	2

   Критерии. Только ответ — 1 балл. Дан ответ и приведен пример — 3 балла. Дан ответ и приведено доказательство того, что меньше 120 быть не может, но примера нет — 3 балла.

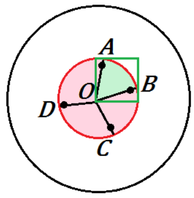
3. На острове радиусом 40 км находятся несколько колодцев. Колодец называется *отдалённым*, если на расстоянии ближе 25 км от него нет ни моря, ни другого колодца. Какое максимальное количество отдалённых колодцев может быть на острове? (*А. А. Теслер*)

   Ответ: 3.

Решение.



Пусть O — центр острова. Колодцы должны располагаться в круге с центром O и радиусом 15, иначе они будут слишком близко к морю. Если вписать в этот круг равносторонний треугольник, то расстояние между его вершинами будет $15\sqrt{3} > 25$, что даёт пример для трёх колодцев.



Докажем, что 4 колодца не поместятся. Четыре колодца, расположенные в круге, можно обозначить буквами A, B, C, D в таком порядке, что $\angle AOB + \angle BOC + \angle COD + \angle DOA = 360°$ (возможно, один из этих углов больше $180°$). Пусть, например, $\angle AOB$ — наименьший из этих углов, тогда $\angle AOB \leqslant 90°$. Тогда существует сектор с центром O и углом $90°$, содержащий точки A и B. Этот сектор помещается внутри квадрата со стороной 15, а расстояние между любыми двумя точками этого квадрата не больше $15\sqrt{2} < 25$.

Критерии. Только пример — 2 балла плюс ещё 1 балл за доказательство того, что он подходит. Только оценка — 4 балла.

4. Какому нечётному числу может быть равен НОД чисел $2025n+1$ и $5202n+1$, где n — натуральное число? Укажите все возможности и докажите, что других нет. (*С. П. Павлов*)

Ответ: 1 или 353.

Решение. Пусть d — общий делитель чисел $2025n+1$ и $5202n+1$. Тогда d является и делителем числа $5202n+1-(2025n+1) = 3177n = 9 \cdot 353 \cdot n$. Так как оба выражения $2025n+1$ и $5202n+1$ не кратны 3 и взаимно просты с n, то искомым общим делителем может быть только делитель числа 353, то есть 1 или 353 (оно простое).

Заметим, что ответ 353 возможен, например, при $n = 186$. (Можно вместо поиска конкретного значения n сослаться на следующий факт: поскольку 353 и 2025 взаимно просты, то остатки от деления $2025n$ на 353 принимают все возможные значения, в том числе и 352 при неком значении n. А если $2025n+1$ кратно 353, то и $5202n+1$ тоже, поскольку их разность кратна 353.)

Критерии. Только ответ $n = 1$ — 0 баллов.

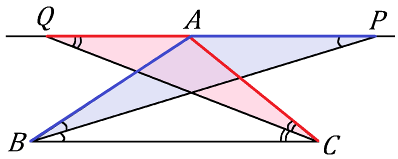
Если найдено, что НОД теоретически НОД может равняться 353, но не доказано, что такое n существует — 5 баллов.

5. Дан разносторонний тупоугольный треугольник ABC с целыми сторонами. Через вершину тупого угла A провели прямую, параллельную BC, и отметили точки пересечения этой прямой с биссектрисами углов B и C как P и Q. Чему равно PQ, если $BC = 4$? (*П. Д. Муленко*)

Ответ: $PQ = 5$.

Решение. Из неравенств треугольника ABC следует, что $AB + AC > BC = 4$. А так как треугольник тупоугольный, то сторона BC, лежащая напротив тупого угла A, является наибольшей, то есть обе стороны AB и AC должны быть меньше 4. Наконец, так как треугольник ABC разносторонний, одна из сторон AB и AC равна 2, а другая — 3.

Поскольку BP является биссектрисой угла B, то $\angle PBC = \angle PBA$. Далее, прямая PQ параллельна BC, поэтому $\angle PBC = \angle BPA$. Значит, $\angle PBA = \angle BPA$, то есть треугольник BAP — равнобедренный, и $AP = AB$. Аналогично из равнобедренного треугольника QAC получаем, что $QA = AC$, а тогда искомая длина равна $PQ = PA + AQ = AB + AC = 2 + 3 = 5$.



Критерии. Замечено равенство накрест лежащих углов — 1 балл.

Доказано, что стороны AB и AC равны 2 и 3 — 3 балла.

Замечено, что на картинке два равнобедренных треугольника — 3 балла.

6. Квиз состоит из нескольких вопросов (более одного), причём в каждом вопросе одинаковое число вариантов ответа. Если на очередной вопрос выбирается неправильный ответ, вы проигрываете. Однако у вас есть одна «запасная жизнь» на весь квиз: при первом выборе неправильного ответа вы не выбываете, а можете исправиться и дать ещё один ответ на тот же вопрос (если и второй ответ неверен — вы проигрываете). Вероятность пройти квиз, выбирая ответы наугад, равна 2/81. Сколько в квизе вопросов и сколько вариантов ответа в каждом вопросе? (*П. Д. Муленко*)

   Ответ: в квизе 5 вопросов по 3 варианта ответа в каждом.

   Решение. Обозначим количество вопросов за n, а количество вариантов ответа в каждом вопросе за k. Вероятность угадать ответ на очередной вопрос равна $1/k$, то есть вероятность угадать ответы на все n вопросов равна $1/k^n$.
   Если же на какой-то вопрос вы сперва ответили неверно с вероятностью $\frac{k-1}{k}$, то вы можете исправить свой ответ и повторно угадать правильный среди $k-1$ оставшихся. Таким образом, полная вероятность угадать ответ на вопрос с ошибкой равна

$$\frac{k-1}{k} \cdot \frac{1}{k-1} = \frac{1}{k},$$

   и есть n способов выбрать вопрос, на который вы ответите со второй попытки. Итого, полная вероятность успешно пройти квиз наугад равна

$$\frac{1}{k^n} + \frac{n}{k^n} = \frac{n+1}{k^n} = \frac{2}{81}.$$

   Упрощая получившееся уравнение, получаем $81(n+1) = 2k^n$. Правая часть чётна, то есть $n+1$ чётно, откуда само n нечётно (и больше одного):
   $\boldsymbol{n = 3}$**:** $81 \cdot (3+1) = 2k^3 \quad \Rightarrow \quad k^3 = 81 \cdot 4 \,/\, 2 = 162$ — не подходит, так как 162 не куб;
   $\boldsymbol{n = 5}$**:** $81 \cdot (5+1) = 2k^5 \quad \Rightarrow \quad k^5 = 81 \cdot 6 \,/\, 2 = 243$ — подходит, $k = 3$.
   Левая часть делится на 81, то есть k обязательно кратно 3. Поэтому при дальнейшем увеличении n левая часть будет каждый раз увеличиваться на 162, а правая — как минимум в 9 раз. Иными словами, при $n > 5$ правая часть всегда будет больше левой, и новых решений не найдётся.
   Итого в квизе $n = 5$ вопросов, в каждом из которых по $k = 3$ варианта ответа.

   Критерии. Вывод уравнения $\dfrac{n+1}{k^n} = \dfrac{2}{81}$ — 3 балла. Если решение этого уравнение угадано — +1 балл. Если не обосновано, что нет решений при $n > 5$ — 5 баллов.
   Только ответ с проверкой, что для него вероятность равна $\dfrac{2}{81}$, — 2 балла.
   Вместо верного составлено уравнение $\dfrac{2}{k^n} = \dfrac{2}{81}$ — 1 балл.

7. Павел Дмитриевич владеет заводом по производству сувенирных календарей. Календарь изготавливается из двух кубиков и наклеек с цифрами: надо наклеить на каждую грань обоих кубиков по наклейке так, чтобы с их помощью можно было сложить любой день месяца (то есть любое число от 01 до 31; на рисунке представлен пример числа 18). Завод гордится тем, что каждое его изделие отличается от других. Сколько всего различных календарей может выпустить завод?

   Два календаря считаются одинаковыми, если для каждого кубика из первого календаря есть такой же кубик во втором. В свою очередь, два кубика одинаковы, если можно поставить их рядом так, чтобы с каждой из шести сторон они выглядели одинаково, то есть на них были одинаковые наклейки в одинаковом положении. Наклейки с цифрами 0 и 8 имеют центр симметрии, остальные — нет. (*М. В. Карлукова*)

Решение. Так как среди чисел присутствуют 11 и 22, цифры 1 и 2 должны быть на обоих кубиках. Более того, поскольку первые 9 дат от 01 до 09 содержат 0, цифра 0 тоже должна присутствовать на обоих кубиках (так как не все цифры от 3 до 9 поместятся на одном кубике). Таким образом, на каждом кубике 3 грани заняты цифрами 0, 1 и 2, то есть остаётся 6 мест для остальных цифр от 3 до 9. Это 7 различных цифр, но две из них — 6 и 9 — можно заменить одной, поскольку другая получается из неё переворотом.

Итак, нужно распределить цифры от 3 до 8 по двум кубам (на каждом по три цифры). Выбрать 3 цифры на первый кубик можно $C_6^3 = \dfrac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$ способами, но порядок кубиков нам не важен — например, разбиение цифр на $\{3, 4, 5\}$ для первого кубика и $\{6, 7, 8\}$ для второго равнозначно разбиению на $\{6, 7, 8\}$ для первого кубика и $\{3, 4, 5\}$ для второго — поэтому есть всего $20/2 = 10$ различных способов выбрать цифры на каждый из кубиков.

Рассмотрим один из кубиков. На нём где-то написана цифра 1, и есть только один способ поставить кубик так, чтобы она была спереди в правильном положении. Остальные 5 граней можно заполнить $5! = 120$ способами без учёта вращения цифр. На каждой грани есть 4 способа повернуть цифру, кроме двух цифр 0 и одной цифры 8, для которых таких способов по 2.

Ответ: $10 \cdot 120^2 \cdot 4^7 \cdot 2^3 = 18\,874\,368\,000$ способов.

Критерии. Если ответ найден как арифметическое выражение, но не посчитан до конца, то не больше 6 баллов. Если найден ответ без учёта вращений цифр на гранях (9000), то ставится 3 балла. За ошибку в 2 раза (20 способов распределения цифр по кубикам вместо 10) снимается балл.

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2025-2026 учебный год. Отборочный этап

Решения задач для 10 класса

Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.
Оценка в 1–3 балла означает, что задача в целом не решена, но есть существенные продвижения; оценка в 4–6 баллов — задача в целом решена, но есть существенные недостатки.
Для некоторых задач есть частные критерии, указанные ниже.

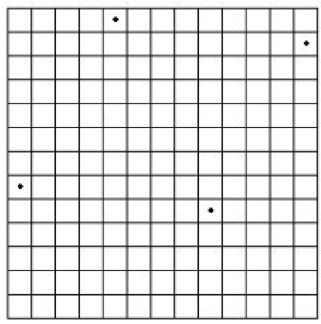
1. Укажите все номера годов текущего десятилетия (с 2021 по 2030), которые можно представить суммой одно-, двух-, трёх- и четырёхзначного чисел так, чтобы каждая цифра была использована один раз. (*С. П. Павлов*)

   Ответ: только 2025.

   Решение. На основании признака делимости на 9 приходим к выводу, что сумма указанных в условии четырёх слагаемых имеет тот же остаток при делении на 9, что и сумма всех цифр, которая равна 45 и имеет остаток 0. Значит, число с указанным в условии свойством должно быть кратно 9. В текущем десятилетии такое только одно — это 2025. И оно действительно представимо в требуемом виде: $2025 = 0 + 42 + 386 + 1597$.

   Критерии. 4 балла за пример и 3 за доказательство, что других вариантов нет.

2. Клетчатое поле 13×13 состоит из 169 единичных клеток. Сергей поставил на нём четырёх не бьющих друг друга ферзей. Оказалось, что центры клеток, в которых стоят ферзи, образуют ромб. Обязательно ли этот ромб является квадратом? (*С. П. Павлов*)

   Ответ: Нет (см. рисунок). То, что это ромб, можно доказать через равенство сторон (с помощью теоремы Пифагора: $7^2 + 4^2 = 8^2 + 1^2 = 65$), а можно удостовериться, что диагонали перпендикулярны (их угловые коэффициенты равны $\frac{2}{3}$ и $-\frac{3}{2}$) и делятся пополам точкой пересечения.

   Критерии. 6 баллов, если приведён верный пример, но не объяснено, почему это ромб.

3. В каждой клетке таблицы 4×5 стоит натуральное число. При этом все числа различны, но суммы во всех строках одинаковы и во всех столбцах тоже одинаковы. Какова минимально возможная сумма чисел в таблице? (*А. А. Теслер*)

   Ответ: $1 + 2 + \dots + 10 + 12 + 13 + \dots + 21 = 220$.

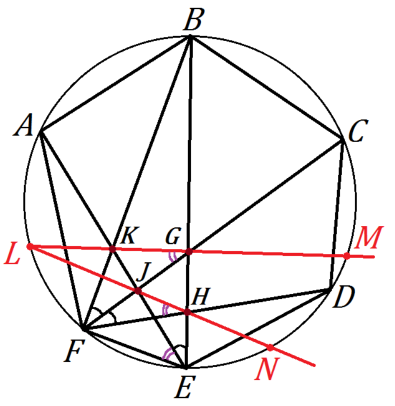
   Решение. Меньше нельзя из соображений делимости. Действительно, сумма чисел от 1 до 20 равна 210. Но сумма чисел в таблице должна делиться на 4 и на 5, то есть на 20; минимальная подходящая сумма, не меньшая 210, равна 220. Пример таблицы с суммой 220:

21	1	17	9	7
2	20	5	12	16
18	4	9	10	15
3	19	14	13	6

   Критерии. 5 баллов за пример и 2 балла за доказательство, что меньше не получится.

4. В окружность ω вписан шестиугольник $ABCDEF$, в котором $AB = BC = CD$. Отрезок BE пересекает CF и DF в точках G и H соответственно, а отрезок AE пересекает CF и BF в точках J и

K соответственно. Оказалось, что прямые GK и HJ пересекаются в точке L, лежащей на ω, а также пересекают эту окружность в точках M и N. Докажите, что $MN = AB$. (*О. А. Пяйве*)



Решение.
Углы BFC, CFD и AEB равны, поскольку опираются на равные хорды. Значит, четырёхугольники $EFJH$ и $EFKG$ вписанные. Из первого получаем $\angle JEF = \angle JHF$, а из второго — $\angle JEF = \angle KGF$.
Значит, $\angle JHF = \angle KGF$, поэтому $FHGL$ вписанный, отсюда $\angle GLH = \angle GFH$. Значит, дуги MN и CD, на которые опираются эти углы, равны, поэтому $MN = CD = AB$.

5. Попугай Роза знает все четыре звука своего имени и умеет произносить «слова» длиной от 1 до n звуков. При этом она не умеет произносить два одинаковых звука подряд. Сколько разных «слов» может сказать Роза? Запишите ответ в замкнутой форме (без многоточий и знаков суммирования). (*О. С. Третьякова*)

Ответ: $2 \cdot 3^n - 2$ слов.

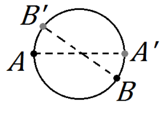
Решение. Рассмотрим слова длины k. Первый звук может быть любой из 4; второй — любой из 3, так как не может быть равен первому; третий — тоже любой из 3, так как не может быть равен второму; и так далее.
Таким образом, Роза может сказать $4 \cdot 3^{k-1}$ слов длины k, а общее количество слов длины от 1 до n равно сумме таких слагаемых для всех значений k:

$$\sum_{k=1}^{n} 4 \cdot 3^{k-1} = 4 \cdot 3^0 + 4 \cdot 3^1 + 4 \cdot 3^2 + \cdots + 4 \cdot 3^{n-1} = 4 \cdot (3^0 + 3^1 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1}) = 4 \cdot \frac{3^n - 1}{3 - 1} = 2 \cdot (3^n - 1).$$

Критерии. Если найден ответ в незамкнутой форме, то ставится 4 балла.

6. В окружность вписаны три различных остроугольных треугольника (общих вершин у треугольников нет). Докажите, что можно выбрать по одной вершине из каждого треугольника так, чтобы три выбранные точки образовали треугольник, у которого все углы не превышают 90 градусов. (*Л. С. Корешкова*)

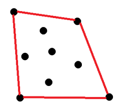
Решение. Пусть A и B — вершины разных треугольников на наибольшем расстоянии друг от друга. Если AB — диаметр, то любая вершина третьего треугольника подходит. Иначе пусть A' и B' — диаметрально противоположные точки к A и B. Вершины третьего треугольника не могут быть на дугах $A'B$ и AB', включая концы, так как отрезок AB наибольший возможный. Кроме того, все вершины третьего треугольника не могут одновременно лежать на дуге AB, так как он остроугольный. Значит, на дуге $A'B'$ найдётся вершина C третьего треугольника, а тогда ABC остроугольный.



Критерии. За упоминание того, что вписанный треугольник остроугольный тогда и только тогда, когда он не содержится в полукруге, даётся 1 балл. Если в целом решение полное, но не рассмотрены какие-то случаи, когда противоположные точки являются вершинами разных треугольников, то снимается 1 балл.

7. Паша и Варя играют в такую игру. Каждый игрок своим ходом отмечает на плоскости точку, пока не будут отмечены 2025 точек (начинает и заканчивает игру Паша). После этого Варя должна заплатить Паше столько рублей, сколько вершин имеет выпуклая оболочка полученного множества точек. Для какого максимального N у Паши существует стратегия, позволяющая получить не менее N рублей при любой игре Вари?

Выпуклая оболочка конечного множества точек — это наименьший по включению многоугольник, содержащий их. Справа показано множество из 9 точек и его выпуклая оболочка — четырёхугольник. (*А. А. Теслер*)

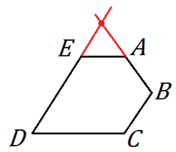


Ответ: 5.

Решение. Сначала докажем несколько лемм.

Лемма 1. За один ход число вершин выпуклой оболочки (обозначим его k) не может увеличиться более чем на 1. (К вершинам выпуклой оболочки добавиться может только новая точка; часть прежних вершин может исчезнуть.)

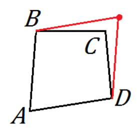
Лемма 2. Если $k = 5$, то за один ход можно сделать его равным 4. (Действительно, если дан пятиугольник $ABCDE$, то стороны AB и CD или AB и DE не параллельны; отметив точку пересечения их продолжений, получим четырёхугольник.)



Лемма 3. Из любого 4-угольника, кроме параллелограмма, можно за один ход сделать треугольник. (Аналогично: отметим точку пересечения двух несмежных непараллельных сторон.)

Лемма 4. Из любого четырёхугольника можно сделать параллелограмм. Действительно, если он ещё не является параллелограммом, то либо это трапеция (и можно продлить меньшую из параллельных сторон так, чтобы она сравнялась с большей), либо у него нет параллельных сторон.

Во втором случае одна из пар углов $A + B$ и $C + D$ меньше 180°, а вторая больше; то же верно для пар $B + C$ и $D + A$. Значит, есть единственная вершина (пусть, например, A), для которой каждая из пар $A + B$ и $A + D$ меньше 180°, и можно построить параллелограмм на сторонах AB и AD.



Лемма 5. Из любого треугольника можно сделать параллелограмм (очевидно).

Теперь опишем стратегии игроков, которые приводят к получению пятиугольника.

Стратегия Вари по недопущению $N \geqslant 6$. Если после хода Пети стало $k \geqslant 5$ (а до этого не было), значит, $k = 5$ и можно сделать его равным 4. Если $k < 5$, то можно оставить его прежним (поставив точку внутрь). Таким образом, после хода Вари $k \leqslant 4$, и Паша за последний ход не сделает его больше 5.

Стратегия Паши, позволяющая сделать $N = 5$. На 3-м ходу сделать треугольник. Варя сделает 4-угольник или оставит треугольник — в обоих случаях превратить его в параллелограмм. После этого достаточно сохранять центральную симметрию выпуклой оболочки вплоть до 2023-го хода (она гарантирует $k \geqslant 4$ и невозможность превращения в треугольник за один ход). Варя 2024-м ходом сделает k не меньше 4, после чего Паша увеличит k на 1.

Критерии. Если сформулирована лемма 2, лемма 3 или другое похожее утверждение, то даётся 2 балла. Ещё по 2 балла за стратегии каждого игрока.

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2025-2026 учебный год. Отборочный этап

Решения задач для 11 класса

Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.
Оценка в 1–3 балла означает, что задача в целом не решена, но есть существенные продвижения; оценка в 4–6 баллов — задача в целом решена, но есть существенные недостатки.
Для некоторых задач есть частные критерии, указанные ниже.

---

1. Все десять цифр разбили на пары и в каждой вычислили разность (вычитая из большей цифры меньшую). Какой наибольшей степени двойки может равняться произведение всех этих разностей? (*С. П. Павлов*)

Ответ: $2^{10} = 1024$.

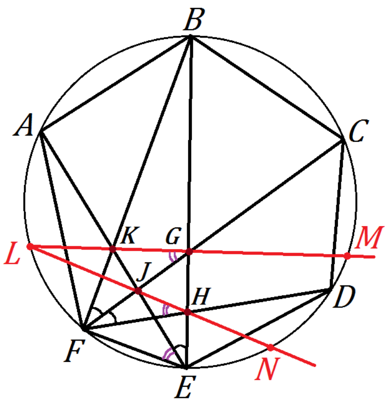
Решение. Десять цифр разбиваются на пять разностей. Чтобы их произведение равнялось степени двойки, каждая из них должна равняться степени двойки, то есть 1, 2, 4 или 8. Заметим, что поскольку чётных и нечётных цифр по 5, то хотя бы в одну из разностей попадут цифры разной чётности, и она должна равняться 1. Наибольшая степень двойки при указанном вычитании — это $2^3 = 8$, и она получается только в таких случаях: $9-1$ и $8-0$. Каждая из оставшихся двух разностей не больше, чем 2^2. Поэтому при умножении двойка получится не более, чем в $3+3+2+2+0 = 10$ степени.
Пример: $(9-1)\cdot(8-0)\cdot(7-3)\cdot(6-2)\cdot(5-4) = 8\cdot 8\cdot 4\cdot 4\cdot 1 = 2^{10}$.

Примечание. Пример единственен (с точностью до перестановки множителей).

Критерии. За пример 3 балла, за оценку 4.

2. В окружность ω вписан шестиугольник $ABCDEF$, в котором $AB = BC = CD$. Отрезок BE пересекает CF и DF в точках G и H соответственно, а отрезок AE пересекает CF и BF в точках J и K соответственно. Оказалось, что прямые GK и HJ пересекаются в точке L, лежащей на ω, а также пересекают эту окружность в точках M и N. Докажите, что $MN = AB$. (*О. А. Пяйве*)

Решение.
Углы BFC, CFD и AEB равны, поскольку опираются на равные хорды. Значит, четырёхугольники $EFJH$ и $EFKG$ вписанные. Из первого получаем $\angle JEF = \angle JHF$, а из второго — $\angle JEF = \angle KGF$.
Значит, $\angle JHF = \angle KGF$, поэтому $FHGL$ вписанный, отсюда $\angle GLH = \angle GFH$. Значит, дуги MN и CD, на которые опираются эти углы, равны, поэтому $MN = CD = AB$.



3. Один и тот же прямоугольник является сечением двух разных кубов. Каково максимально возможное отношение объёмов этих кубов? (*А. А. Теслер*)

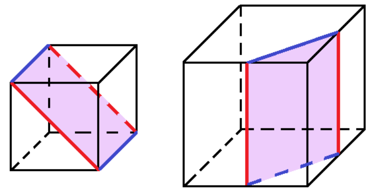
Ответ: $2\sqrt{2}$.

Решение. Сначала докажем, что любое прямоугольное сечение α перпендикулярно одной из граней куба. Обозначим через β и γ грани куба, пересекающие α по соседним сторонам, тогда обязательно $\beta \perp \gamma$. Если $\alpha \cap \beta \perp \gamma$, то $\alpha \perp \gamma$. Иначе проведём прямую ℓ через точку $\alpha\cap\beta\cap\gamma$ в плоскости β перпендикулярно $\beta\cap\gamma$. Тогда пересекающиеся прямые ℓ и $\alpha\cap\beta$ ортогональны

$\alpha \cap \gamma$, поэтому $\alpha \cap \gamma$ — прямая, ортогональная всей плоскости β (проходящей через ℓ и $\alpha \cap \beta$), откуда $\alpha \perp \beta$.

Теперь посмотрим в проекции на грань куба, перпендикулярную сечению. Одна из сторон прямоугольника равна ребру куба (a), а другая от 0 до $a\sqrt{2}$. Если у прямоугольника отношение сторон больше $\sqrt{2}$, то ребро куба равно длинной стороне (то есть единственно, что не соответствует условию), а если нет, то два варианта ребра (равно либо длинной, либо короткой стороне сечения). Максимальное отношение этих вариантов равно $\sqrt{2}$, откуда отношение объёмов — $2\sqrt{2}$.

Такие сечения действительно существуют. В меньшем кубе возьмём сечение, проходящее через пару противоположных рёбер, а в большем — сечение, проходящее через середины двух рёбер с общей вершиной и параллельное третьему ребру с этой же вершиной.



Критерии. Существование примера оценивается в 1 балл, оценка в 5 баллов. Если в оценке используется, что любое прямоугольное сечение параллельно ребру куба, то доказательство этого факта стоит 3 балла.

4. В каждой клетке таблицы 4×2025 стоит натуральное число. При этом все числа различны, но суммы во всех строках одинаковы и во всех столбцах тоже одинаковы. Какова минимально возможная сумма чисел в таблице? (*А. А. Теслер*)

Ответ: $4 \cdot 2025 \cdot 4051 = 32\,813\,100$.

Решение. Числа от 1 до $4 \cdot 2025$ взять нельзя, потому что их сумма равна $4 \cdot 2025 \cdot \dfrac{4 \cdot 2025 + 1}{2}$, что не делится на $4 \cdot 2025$. Ближайшая бóльшая сумма, делящаяся на $4 \cdot 2025$, — это $4 \cdot 2025 \cdot 4051$, и её можно получить из чисел от 1 до $4 \cdot 2025 + 1$, кроме числа $2 \cdot 2025 + 1 = 4051$.

Для построения примера рассмотрим таблицу, показанную ниже. В ней среднее арифметическое чисел в каждой строке и в каждом столбце равно 0. Если к каждому числу прибавить 4051, то числа попадут в нужный диапазон, а среднее в каждом столбце и в каждой строке станет равно 4051, что обеспечивает равенство сумм в строках и равенство сумм в столбцах.

$+2$	-5	$+3$	$+7$	-7	$+11$	-11	...	$+(4k+3)$	$-(4k+3)$	...	$+4047$	-4047
-1	$+4$	-3	-8	$+8$	-12	$+12$		$-(4k+4)$	$+(4k+4)$		-4048	$+4048$
$+1$	$+5$	-6	-9	$+9$	-13	$+13$		$-(4k+5)$	$+(4k+5)$		-4049	$+4049$
-2	-4	$+6$	$+10$	-10	$+14$	-14		$+(4k+6)$	$-(4k+6)$		$+4050$	-4050

Критерии. 5 баллов за пример и 2 балла за доказательство, что меньше не получится.

5. Если в волшебный автомат ввести натуральное число $n > 1$, то он строит клетчатый квадрат $n \times n$, удаляет из него одну клетку и рисует такие фигуры до тех пор, пока их суммарная площадь не станет равна площади какого-нибудь клетчатого квадрата. Сторону этого нового квадрата автомат возвращает обратно. Например, по карточке с цифрой 5 автомат строит квадрат 5×5 без одной клетки, повторяет его 6 раз (получается 144 клетки, что равно 12^2) и возвращает число 12. Всего автомат работал 10 раз. Может ли количество цифр в числе на последней получившейся карточке быть в 1024 раза больше, чем на изначальной? (*П. Д. Муленко, А. А. Теслер*)

Решение.

Если при каком-то срабатывании автомата из числа a получается $a^2 - 1$ и это срабатывание не последнее, то при следующем срабатывании получится число не больше

$$\sqrt{(a^2-1)((a^2-1)^2-1)} = a^3 - a < a^3.$$

Если же из a получается меньшее число, то оно будет не больше $\dfrac{a^2-1}{2} < \dfrac{a^2}{2}$.

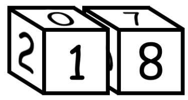
Пусть изначально было k-значное число $10^{k-1} \leqslant a_0 < 10^k$ (где $k \geqslant 1$), а через 10 срабатываний автомата получилось $1024k$-значное число. Тогда на каждом шаге количество цифр обязано удваиваться. Если на каком-то шаге из a_s получилось $a_{s+1} = a_s^2 - 1$ и $s < 9$, то

$$a_{s+2} < a_s^3 < 10^{3\cdot 2^s k} \leqslant 10^{4\cdot 2^s k-1},$$

чего не может быть. Тогда $a_{s+1} < \dfrac{a_s^2}{2}$ для всех $0 \leqslant s \leqslant 9$, то есть $a_3 < \dfrac{a_0^8}{2^7} < 10^{8k-1}$.

Критерии. За оценки на результат одного или двух срабатываний автомата (кроме тривиальной $\leqslant a^2 - 1$) даётся от 1 до 3 баллов.

6. Павел Дмитриевич владеет заводом по производству сувенирных календарей. Календарь изготавливается из двух кубиков и наклеек с цифрами: надо наклеить на каждую грань обоих кубиков по наклейке так, чтобы с их помощью можно было сложить любой день месяца (то есть любое число от 01 до 31; на рисунке представлен пример числа 18). Завод гордится тем, что каждое его изделие отличается от других. Сколько всего различных календарей может выпустить завод?



Два календаря считаются одинаковыми, если для каждого кубика из первого календаря есть такой же кубик во втором. В свою очередь, два кубика одинаковы, если можно поставить их рядом так, чтобы с каждой из шести сторон они выглядели одинаково, то есть на них были одинаковые наклейки в одинаковом положении. Наклейки с цифрами 0 и 8 имеют центр симметрии, остальные — нет. (*М. В. Карлукова*)

Решение. Так как среди чисел присутствуют 11 и 22, цифры 1 и 2 должны быть на обоих кубиках. Более того, поскольку первые 9 дат от 01 до 09 содержат 0, цифра 0 тоже должна присутствовать на обоих кубиках (так как не все цифры от 3 до 9 поместятся на одном кубике). Таким образом, на каждом кубике 3 грани заняты цифрами 0, 1 и 2, то есть остаётся 6 мест для остальных цифр от 3 до 9. Это 7 различных цифр, но две из них — 6 и 9 — можно заменить одной, поскольку другая получается из неё переворотом.

Итак, нужно распределить цифры от 3 до 8 по двум кубам (на каждом по три цифры). Выбрать 3 цифры на первый кубик можно $C_6^3 = \dfrac{6!}{3!\cdot 3!} = 20$ способами, но порядок кубиков нам не важен — например, разбиение цифр на $\{3, 4, 5\}$ для первого кубика и $\{6, 7, 8\}$ для второго равнозначно разбиению на $\{6, 7, 8\}$ для первого кубика и $\{3, 4, 5\}$ для второго — поэтому есть всего $20/2 = 10$ различных способов выбрать цифры на каждый из кубиков.

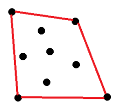
Рассмотрим один из кубиков. На нём где-то написана цифра 1, и есть только один способ поставить кубик так, чтобы она была спереди в правильном положении. Остальные 5 граней можно заполнить $5! = 120$ способами без учёта вращения цифр. На каждой грани есть 4 способа повернуть цифру, кроме двух цифр 0 и одной цифры 8, для которых таких способов по 2.

Ответ: $10 \cdot 120^2 \cdot 4^7 \cdot 2^3 = 18\,874\,368\,000$ способов.

Критерии. Если ответ найден как арифметическое выражение, но не посчитан до конца, то не больше 6 баллов. Если найден ответ без учёта вращений цифр на гранях (9000), то ставится 3 балла. За ошибку в 2 раза (20 способов распределения цифр по кубикам вместо 10) снимается балл.

7. Паша и Варя играют в такую игру. Каждый игрок своим ходом отмечает на плоскости точку, пока не будут отмечены 2025 точек (начинает и заканчивает игру Паша). После этого Варя должна заплатить Паше столько рублей, сколько вершин имеет выпуклая оболочка полученного множества точек. Для какого максимального N у Паши существует стратегия, позволяющая получить не менее N рублей при любой игре Вари?

Выпуклая оболочка конечного множества точек — это наименьший по включению многоугольник, содержащий их. Справа показано множество из 9 точек и его выпуклая оболочка — четырёхугольник. (*А. А. Теслер*)

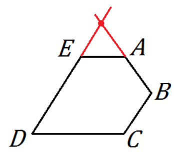


Ответ: 5.

Решение. Сначала докажем несколько лемм.

Лемма 1. За один ход число вершин выпуклой оболочки (обозначим его k) не может увеличиться более чем на 1. (К вершинам выпуклой оболочки добавиться может только новая точка; часть прежних вершин может исчезнуть.)

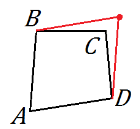
Лемма 2. Если $k = 5$, то за один ход можно сделать его равным 4. (Действительно, если дан пятиугольник $ABCDE$, то стороны AB и CD или AB и DE не параллельны; отметив точку пересечения их продолжений, получим четырёхугольник.)



Лемма 3. Из любого 4-угольника, кроме параллелограмма, можно за один ход сделать треугольник. (Аналогично: отметим точку пересечения двух несмежных непараллельных сторон.)

Лемма 4. Из любого четырёхугольника можно сделать параллелограмм. Действительно, если он ещё не является параллелограммом, то либо это трапеция (и можно продлить меньшую из параллельных сторон так, чтобы она сравнялась с большей), либо у него нет параллельных сторон.

Во втором случае одна из пар углов $A + B$ и $C + D$ меньше $180°$, а вторая больше; то же верно для пар $B + C$ и $D + A$. Значит, есть единственная вершина (пусть, например, A), для которой каждая из пар $A + B$ и $A + D$ меньше $180°$, и можно построить параллелограмм на сторонах AB и AD.



Лемма 5. Из любого треугольника можно сделать параллелограмм (очевидно).

Теперь опишем стратегии игроков, которые приводят к получению пятиугольника.

Стратегия Вари по недопущению $N \geqslant 6$. Если после хода Пети стало $k \geqslant 5$ (а до этого не было), значит, $k = 5$ и можно сделать его равным 4. Если $k < 5$, то можно оставить его прежним (поставив точку внутрь). Таким образом, после хода Вари $k \leqslant 4$, и Паша за последний ход не сделает его больше 5.

Стратегия Паши, позволяющая сделать $N = 5$. На 3-м ходу сделать треугольник. Варя сделает 4-угольник или оставит треугольник — в обоих случаях превратить его в параллелограмм. После этого достаточно сохранять центральную симметрию выпуклой оболочки вплоть до 2023-го хода (она гарантирует $k \geqslant 4$ и невозможность превращения в треугольник за один ход). Варя 2024-м ходом сделает k не меньше 4, после чего Паша увеличит k на 1.

Критерии. Если сформулирована лемма 2, лемма 3 или другое похожее утверждение, то даётся 2 балла. Ещё по 2 балла за стратегии каждого игрока.