



## Решения задач для 8 класса

**8.1. (5 баллов)** Дмитрий пришел с отцом в городской парк развлечений, в котором увидел оригинально организованный тир. В частности там был свинцовый шар подвешенный с помощью шнура, две части которого соединены мишенью. При попадании стрелка в мишень происходит её разрушение, и шар падает вниз. Отец предложил Дмитрию на два вопроса:

- [1] Какова скорость шара в конце его падения, если высота, на которой подвешен шар, равна 5 м? Ускорение свободного падения считать равным  $9,8 \text{ Н/кг}$ .
- [2] На сколько градусов нагреется шар, если, если на нагрев идёт половина от всей механической энергии шара. Удельная теплоёмкость свинца равна  $140 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}$ . Нить считать невесомой и нерастяжимой, разрушение мишени считать мгновенным, сопротивлением воздуха пренебречь.

(Л.С.Ласкавый)

**Ответ:** 10.

**Ответ:** 0,2.

**Решение.** При разрушении мишени шар начинает падать вниз без начальной скорости. Поскольку потерями механической энергии из-за отсутствия сопротивления воздуха пренебрегаем, воспользуемся законом сохранения механической энергии:

$$E_{к1} + E_{п1} = E_{к2} + E_{п2} = \text{const},$$

где кинетическая энергия равна  $E_{к} = mv^2/2$ , а потенциальная энергия  $E_{п} = mgh$ .

Пусть первое состояние - в момент разрушения мишени, второе - в конце падения. Поскольку в начале падения скорость равна нулю, то  $E_{к1} = 0$ . Взяв за нулевую отметку высоты поверхность, на которую падает шар, получим, что в конце падения высота равна нулю, значит  $E_{п2} = 0$ . В итоге закон сохранения выглядит следующим образом:

$$E_{п1} = E_{к2}.$$

Подставляя выражения для кинетической и потенциальной энергий, получим

$$mgh = mv_2^2/2$$

или

$$2gh = v_2^2.$$

В итоге

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9,8 \cdot 5} = \sqrt{98} \approx 9,89 \text{ м/с}.$$

Учитывая минимальное число значащих цифр в условии равное единице, проводим округление, так что  $v = 10 \text{ м/с}$ . Для нахождения разности температур при нагреве шара после его падения, учтём, что на нагрев идёт половина механической энергии шара:

$$\eta = Q/E_{\text{мех}}.$$

Учитывая, что потерь механической энергии не происходит, можем взять состояние энергии не в конце падения, а в его начале:

$$E_{\text{мех}} = E_{п} = mgh.$$

Количество теплоты, полученное телом при нагревании:

$$Q = cm\Delta T.$$

Подставив значения в формулу с КПД, получим

$$\eta = cm\Delta T / (mgh).$$

В итоге:

$$\Delta T = \eta gh / c = 0.5 \cdot 9.8 \cdot 5 / 140 = 0,175 K.$$

Учитывая минимальное число значащих цифр в условии равное единице, проводим округление, так что  $\Delta T = 0,2 K$ .

Ответ:  $v = 10 \text{ м/с}$ ,  $\Delta T = 0,2 K$ .

**8.2. (6 баллов)** В составе школьной команды Алексей пошел в зимний турпоход на Алтай. На привале Алексею поручили приготовить чай, растопив лед. Алексей использовал примус и чашку из нержавеющей стали массой 200,0 г., поместив в нее 1,5 кг льда. За процессом не уследили, и 150,0 г воды выкипело. КПД примуса 45,0 %. В результате на процесс ушло 97,0 мл бензина марки АИ-98, плотность которого 780,0 кг/м<sup>3</sup>, а удельная теплота сгорания  $4,50 \cdot 10^7$  Дж/кг.

**[3]** Найти начальную температуру льда. Ответ дать в градусах Цельсия.

**Замечание.** Удельные теплоёмкости воды 4200,0 Дж/(кг · К), льда 2100,0 Дж/(кг · К), стали 500,0 Дж/(кг · К), удельная теплота плавления льда  $3,30 \cdot 10^5$  Дж/кг, удельная теплота парообразования  $2,30 \cdot 10^6$  Дж/кг. (Л.С.Ласкавый)

**Ответ:** -16.

**Решение.** Переведём температуру в абсолютные показатели. Далее температура будет учтена как абсолютная. Будем искать  $T_{\text{нач}}$ .

Известно, что  $T_{\text{пл}} = 273 K$ ,  $T_{\text{кип}} = 373 K$ .

Примус преобразует внутреннюю энергию топлива в количество теплоты, получаемое телами при тепловых процессах. Формула для КПД:

$$\eta = Q_{\text{пол}} / Q_{\text{затр}}$$

где  $Q_{\text{пол}}$  — полезная энергия,  $Q_{\text{затр}}$  — затраченная энергия.

Раскроем каждое из слагаемых:

$$Q_{\text{затр}} = Q_{\text{сгор}} = qm_{\text{бенз}}$$

С учётом

$$m_{\text{бенз}} = \rho_{\text{бенз}} V$$

$$Q_{\text{затр}} = Q_{\text{сгор}} = q\rho_{\text{бенз}} V$$

Полезная энергия состоит из количества теплоты при нагреве льда ( $Q_1$ ), при плавлении льда ( $Q_2$ ), нагреве воды до кипения ( $Q_3$ ), кипении части воды ( $Q_4$ ) и нагреве стальной чашки от начальной температуры до 100 градусов ( $Q_5$ ), то есть

$$Q_{\text{пол}} = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5$$

Раскроем каждое слагаемое:

$$Q_1 = c_{\text{л}} m (T_{\text{пл}} - T_{\text{нач}})$$

$$Q_2 = \lambda m$$

$$Q_3 = c_{\text{в}} m (T_{\text{кип}} - T_{\text{пл}})$$

$$Q_4 = L m_{\text{пар}}$$

$$Q_5 = c_{\text{ст}} m_{\text{ст}} (T_{\text{кип}} - T_{\text{нач}})$$

Подставим выражения в формулу для полезной энергии:

$$Q_{\text{пол}} = c_{\text{л}}m(T_{\text{пл}} - T_{\text{нач}}) + \lambda m + c_{\text{в}}m(T_{\text{кип}} - T_{\text{пл}}) + Lm_{\text{пар}} + c_{\text{ст}}m_{\text{ст}}(T_{\text{кип}} - T_{\text{нач}})$$

Тогда формула КПД примет вид:

$$\eta = (c_{\text{л}}m(T_{\text{пл}} - T_{\text{нач}}) + \lambda m + c_{\text{в}}m(T_{\text{кип}} - T_{\text{пл}}) + Lm_{\text{пар}} + c_{\text{ст}}m_{\text{ст}}(T_{\text{кип}} - T_{\text{нач}}))/q\rho_{\text{бенз}}V$$

Выражая начальную температуру, получим в итоге

$$T_{\text{нач}} = (c_{\text{л}}mT_{\text{пл}} + \lambda m + c_{\text{в}}m(T_{\text{кип}} - T_{\text{пл}}) + Lm_{\text{пар}} + c_{\text{ст}}m_{\text{ст}}T_{\text{кип}} - \eta q\rho_{\text{бенз}}V)/(c_{\text{л}}m + c_{\text{ст}}m_{\text{ст}})$$

Подставляя значения, получим

$$T_{\text{нач}} = (2100 \cdot 1.5 \cdot 273 + 3.3 \cdot 10^5 \cdot 1.5 + 4200 \cdot 1.5 \cdot (373 - 273) + 2.3 \cdot 10^6 \cdot 0.15 + \\ + 500 \cdot 0.2 \cdot 373 - 0.45 \cdot 4.5 \cdot 10^7 \cdot 780 \cdot 97 \cdot 10^{-6})/(2100 \cdot 1.5 + 500 \cdot 0.2)$$

$$T_{\text{нач}} = 256,9646\text{K}$$

Учитывая минимальное число значащих цифр в условии равное двум, проводим округление, так что  $T_{\text{нач}} = 257\text{K}$ .

Переводя значение в градусы Цельсия, получим  $t_{\text{нач}} = -16^\circ\text{C}$ .

Ответ:  $t_{\text{нач}} = -16^\circ\text{C}$ .

**8.3. (7 баллов)** На школьную экскурсию в Эрмитаж выехали ученики двух классов на автобусах, имеющих форму прямоугольных параллелепипедов, отличающихся только длиной в два раза. Как обычно, в этот день в Санкт-Петербурге шел дождь. По пути до музея на автобусы упали  $1,0 \cdot 10^5$  и  $1,8 \cdot 10^5$  капель дождя, причем автобусы ехали с равными скоростями.

**[4]** Сколько капель дождя упало на длинный автобус на обратном пути, если он двигался вдвое медленнее, чем по пути в музей?

**Замечание.** При решении считать, что ветер не действует на капли и не отклоняет их, а интенсивность дождя постоянна.

(А.А. Черенков)

**Ответ:** 340000.

**Решение.** 1) Короткий автобус на пути «туда».

Число капель дождя, коснувшихся автобуса, пропорционально времени  $t$  рейса, концентрации  $n$  капель в воздухе, их скорости  $v_r$  относительно автобуса и эффективной площади  $S$  поверхности, находящейся под дождём:

$$N = nt v_r S. \quad (1)$$

Пусть  $L$  — расстояние от школы до музея,  $v$  — скорость автобуса,  $u$  — скорость падения капель относительно земли. Тогда

$$t = \frac{L}{v}. \quad (2)$$

Эффективную площадь поверхности, находящейся под дождём, можно найти как площадь проекции автобуса на плоскость, перпендикулярную скорости капель относительно автобуса. Пусть  $d, b, h$  — соответственно длина, ширина и высота автобуса,  $\alpha$  — угол наклона потока капель в системе отсчёта, связанной с автобусом, тогда суммарная площадь, проекций от крыши и лобовой поверхности автобуса имеет вид

$$S = b(d \cos \alpha + h \sin \alpha). \quad (3)$$

Подставляя равенства (2) и (3) в формулу (1) и используя выражения  $\cos \alpha = \frac{u}{v_r}$  и  $\sin \alpha = \frac{v}{v_r}$ ,

получаем

$$N = Lnb \left( \frac{du}{v} + h \right). \quad (4)$$

2) Длинный автобус на пути «туда».

Рассуждая аналогично или просто заменив  $N$  на  $1,8N$  и  $d$  на  $2d$  в формуле (4), получим

$$1,8N = Lnb \left( \frac{2du}{v} + h \right). \quad (5)$$

Из формул (4) и (5) находим соотношение между слагаемыми в скобках в формуле (4):

$$\frac{2du}{v} : h = 8 : 1.$$

3) Длинный автобус на пути «обратно»

Если в формуле (5) заменить  $v$  на  $v/2$ , то первое слагаемое, составляющее  $8/9$  от суммы, возрастёт в 2 раза, таким образом, искомое число капель составляет:

$$n = 17/9 \cdot 1,8N = 3,4 \cdot 10^5$$

Ответ:  $3,4 \cdot 10^5$

**8.4. (6 баллов)** Маша вместе с классом поехала на экскурсию в город Гусь-Хрустальный, где им показали процесс производства изделий из стекла. В одном из цехов Маша увидела, что в поступившем в обработку стеклянном бруске имелся достаточно большой воздушный пузырь в виде шара. При взвешивании бруса на динамометре его вес равен  $3,0 \cdot 10^3$  Н, а при погружении в воду — 1300 Н.

**[5]** Определите объём пузыря в бруске.

**Замечание.** Массу воздуха в пузыре считать пренебрежимо малой, влияние воздуха при взвешивании не учитывать. Плотность стекла принять равной  $2,5 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>. (*Л.С.Ласкавый*)

**Ответ:** 0,05.

**Решение.** В случае, когда брус взвешивается в воздухе, его вес равен силе тяжести, откуда можно найти массу бруса

$$P_1 = mg$$

$$m = P_1/g$$

С учётом

$$m = \rho c V_{\text{вещ}}$$

объём, занимаемый веществом (то есть стеклом), равен

$$V_{\text{вещ}} = m/\rho c$$

$$V_{\text{вещ}} = P_1/\rho c g.$$

При взвешивании бруса, опущенного в воду, сила тяжести компенсируется силой упругости со стороны динамометра (равной весу) и силой Архимеда со стороны жидкости, то есть

$$mg = P_2 + F_{\text{арх}}$$

Объём бруса — сумма объёма вещества (стекла) и объёма пузыря:

$$V = V_{\text{вещ}} + V_{\text{пуз}}$$

Подставив выражение для силы Архимеда, получим

$$mg = P_2 + \rho_v g(V_{\text{вещ}} + V_{\text{пуз}})$$

Выражая объём пузыря, получим

$$V_{\text{пуз}} = (mg - P_2)/\rho_v g - V_{\text{вещ}}$$

Заменив объём вещества и массу выражениями для них, получим в итоге:

$$V_{\text{пуз}} = (P_1 - P_2)/\rho_v g - P_1/\rho_c g = (3000 - -1300)/(1000 \cdot 10) - 3000/(2500 \cdot 10) = 0,05 \text{ м}^3$$

Учитывая минимальное число значащих цифр в условии равное единице, ответ остаётся без изменений.

Ответ:  $V_{\text{пуз}} = 0,05 \text{ м}^3$ .

**8.5. (6 баллов)** Однажды Саша простудился и не захотел рассказывать об этом родителям. Он решил вылечиться самостоятельно и нашел в интернете народную методику заварки лечебного чая. Для этого необходимо взять 5,0 грамм зеленого чая с ромашкой, высыпать в кастрюлю и последовательно заполнять его порциями воды по 50,0 мл. Каждая следующая порция на  $\Delta t = 1,0^\circ \text{ С}$  горячее предыдущей, а первая порция берется при температуре  $t = 20,0^\circ \text{ С}$ .

**[6]** Какой температуры получился лечебный чай, если Саша взял кастрюлю формы прямоугольного параллелепипеда с размерами 13,0 см  $\times$  15,0 см  $\times$  9,00 см, чья начальная температура была  $t_0 = 10,0^\circ \text{ С}$ , а теплоемкость 540 Дж/К ?

**Замечание.** Плотность воды принять равной  $\rho = 1,0 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ , теплоемкость  $c = 4200 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}$ .  
(А.А. Черенков)

**Ответ:** 310.

**Решение.** 1) Из величины объема кастрюли  $V = 15 \cdot 13 \cdot 9 = 1755 \text{ мл}$  следует, что Саша добавил  $n = [V/\Delta V] = [1755/50] = 35$  порций воды, а оставшееся место осталось для 5 грамм чая. Найдем среднюю температуру налитой воды:

$$t_{cp} = \frac{t_1 + t_n}{2} = \frac{t_1 + (t_1 + (n - 1))}{2} = 37^\circ \text{ С} = 310^\circ \text{ К}$$

2) Согласно уравнению теплового баланса:

$$Ct_0 + cn\rho\Delta V t_{cp} = Q = Ct + cn\rho\Delta V t$$

где  $t_0$  - начальная температура кастрюли,  $C$  - ее теплоёмкость,  $t$  - конечная температура системы. Выразим конечную температуру системы:

$$t = \frac{Ct_0 + cn\rho\Delta V t_{cp}}{C + cn\rho\Delta V} \approx 308 \text{ К}$$

Так как минимальное количество значащих цифр в условии равно двум, то округляем.

Ответ: 310 К

**8.6. (6 баллов)** В школьной химической лаборатории Наде поставили задачу определить плотность неизвестного газа в запаянной лабораторной колбе. Надя взвесила колбу и определила, что вес колбы с газом равен 58,3 Н. Колба имеет форму сферы с постоянной толщиной стенок в 0.20 см и внешним диаметром 60.0 см.

**[7]** Определите плотность неизвестного газа.

**Замечание.** Плотность стекла  $2500 \text{ кг/м}^3$ . Плотность воздуха принять равной  $1.224 \text{ кг/м}^3$ , а ускорение свободного падения  $10,0 \text{ м/с}^2$ .  
(Л.С. Ласкавый)

**Ответ:** 3,2.

**Решение.** При взвешивании колбы на колбу действуют сила упругости, равная весу, показыва-

емому на весах, силе тяжести, действующей на стекло и на газ в колбе, а также силе Архимеда, действующей на колбу со стороны воздуха. Соотношение уравнивания этих сил:

$$P + F_{\text{арх}} = m_c g + m_r g$$

Сила Архимеда

$$F_{\text{арх}} = \rho_{\text{возд}} g V_{\text{вн}} = \rho_{\text{возд}} g \cdot 4\pi R^3 / 3.$$

Радиус внутренности колбы

$$r = R - d.$$

Масса стекла

$$m_c = \rho_c V_c = \rho_c (V_{\text{внеш}} - V_{\text{внутр}}) = \rho_c \cdot 4\pi (R^3 - r^3) / 3.$$

Масса газа

$$m_r = \rho_r V_{\text{внутр}} = \rho_r \cdot 4\pi r^3 / 3.$$

Подставляя всё это в уравнение для сил, получим

$$P + \rho_{\text{возд}} g \cdot 4\pi R^3 / 3 = \rho_c \cdot 4\pi (R^3 - (R - d)^3) g / 3 + \rho_r \cdot 4\pi (R - d)^3 g / 3.$$

Выражая плотность газа, получим в итоге

$$\rho_g = \frac{3P}{4\pi (R - d)^3 g} + \frac{\rho_a R^3}{(R - d)^3} - \rho_{gl} \frac{R^3 - (R - d)^3}{(R - d)^3}.$$

Подставим значения:

$$\rho_g = \frac{3 \cdot 58,3}{4 \cdot 3,14 \cdot (0,3 - 0,002)^3 \cdot 10} + \frac{1,224 \cdot 0,3^3}{(0,3 - 0,002)^3} - 2500 \cdot \frac{0,3^3 - (0,3 - 0,002)^3}{(0,3 - 0,002)^3} \approx 3,195 \text{ кг/м}^3.$$

Учитывая минимальное число значащих цифр в условии равное двум, проводим округление, так что  $\rho_r = 3,2 \text{ кг/м}^3$ .

Ответ:  $\rho_r = 3,2 \text{ кг/м}^3$ .

**8.7. (7 баллов)** В школьной лаборатории Наталья проводит эксперимент по изучению процессов нагревания и охлаждения тел. Она кладёт нагретый стальной цилиндр радиусом и высотой по 5,0 см основанием на толстый слой льда при температуре плавления. В результате образовалась цилиндрическая лунка радиуса 5,5 см. Температура цилиндрика равна  $26,2^\circ \text{C}$ .

**[8]** Рассчитайте, сколько воды выплеснется из образовавшейся лунки.

**Замечание.** Считать, что потерь энергии в атмосферу не происходит, вся энергия цилиндрика идёт на нагрев льда. Удельная теплоёмкость стали равна  $0,50 \text{ кДж/(кг} \cdot \text{К)}$ , удельная теплота плавления льда  $3,3 \cdot 10^5 \text{ Дж/кг}$ , плотность стали  $7800 \text{ кг/м}^3$ , льда  $0,90 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ , воды  $1,0 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ .  
(Л.С.Ласкавый)

**Ответ:** 0,098.

**Решение.** Потерями энергии в атмосферу пренебрегаем. Составим уравнение теплового баланса:

$$Q_1 + \dots + Q_n = 0$$

Плавление льда обеспечивается за счёт количества теплоты, отдаваемого цилиндриком, так что:

$$Q_1 = \lambda m_{\text{л}}$$

$$Q_2 = c_{\text{ст}} m_{\text{ст}} (t_{\text{пл}} - t_{\text{ст}})$$

Таким образом, уравнение теплового баланса имеет вид:

$$\lambda m_{\text{л}} + c_{\text{ст}} m_{\text{ст}} (t_{\text{пл}} - t_{\text{ст}}) = 0$$

Раскроем массу цилиндрика. Объём цилиндрика:

$$V = Sh = \pi r^2 h$$

Тогда масса

$$m_{\text{ст}} = \rho_{\text{ст}} \pi r^2 h$$

Тогда новый вид уравнения теплового баланса:

$$\lambda m_{\text{л}} + c_{\text{ст}} \rho_{\text{ст}} \pi r^2 h (t_{\text{пл}} - t_{\text{ст}}) = 0$$

Выразим массу воды (равную массе растаявшего льда), в итоге:

$$m_{\text{л}} = -c_{\text{ст}} \rho_{\text{ст}} \pi r^2 h (t_{\text{пл}} - t_{\text{ст}}) / \lambda$$

Определим глубину лунки. Для этого найдём объём расплавившегося льда и через объём цилиндра найдём его высоту. Объём лунки:

$$V_{\text{лунк}} = \pi R^2 H$$

С другой стороны:

$$m_{\text{л}} = \rho_{\text{л}} V_{\text{лунк}}$$

$$V_{\text{лунк}} = m_{\text{л}} / \rho_{\text{л}}$$

Тогда глубина лунки:

$$H = \frac{m_{\text{л}}}{\rho_{\text{л}} \pi R^2}.$$

Подставляя выражение для массы льда, получим

$$H = - \frac{c_{\text{ст}} \rho_{\text{ст}} r^2 h (t_{\text{пл}} - t_{\text{ст}})}{\lambda \rho_{\text{л}} R^2}.$$

Вычисляя глубину лунки, получим:

$$H = - \frac{500 \cdot 7800 \cdot 0.05^2 \cdot 0.05 \cdot (0 - 26,2)}{3.3 \cdot 10^5 \cdot 900 \cdot 0.05^2} \approx 0.01422 \text{ м.}$$

Отсюда видно, что высота лунки меньше чем высота цилиндрика. Объём части цилиндрика, находящейся в лунке — это цилиндр радиусом  $r$  и высотой  $H$ :

$$V_{\text{ст\_в\_лунке}} = \pi \cdot r^2 \cdot H$$

объём в лунке, который может занять вода:

$$V_{\text{воды\_в\_лунке}} = V_{\text{лунк}} - V_{\text{ст\_в\_лунке}} = \pi \cdot H \cdot (R^2 - r^2)$$

Находим объём воды, получившейся из льда  $V_{\text{воды}}$

$$V_{\text{воды}} = m_{\text{л}} / \rho_{\text{в}}$$

Разница между ним и объёмом оставшейся воды — это и есть объём выплеснувшейся воды.

$$V_{\text{вып}} = V_{\text{воды}} - V_{\text{воды\_в\_лунке}} = V_{\text{воды}} - \pi \cdot H \cdot (R^2 - r^2)$$

Тогда

$$m_{\text{вып}} = \rho_{\text{в}} \cdot V_{\text{вып}}$$

Подставляем выражения для объема и получаем

$$m_{\text{вып}} = \rho_{\text{в}} \left( \frac{m_{\text{л}}}{\rho_{\text{в}}} - \frac{\pi m_{\text{л}} (R^2 - r^2)}{\rho_{\text{л}} \pi R^2} \right) = m_{\text{л}} \left( 1 - \frac{\rho_{\text{в}} (R^2 - r^2)}{\rho_{\text{л}} R^2} \right) = - \frac{\rho_{\text{ст}} c_{\text{ст}} \pi r^2 h (t_{\text{пл}} - t_{\text{ст}})}{\lambda} \left( 1 - \frac{\rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{л}}} \left( 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right) \right)$$

$$m_{\text{вып}} = - \frac{7800 \cdot 500 \cdot \pi \cdot 0,05^2 \cdot 0,05 (0 - 26,2)}{3,3 \cdot 10^5} \left( 1 - \frac{1000}{900} \left( 1 - \left( \frac{0,05}{0,055} \right)^2 \right) \right) \approx 0,09815$$

Учитывая минимальное число значащих цифр в условии равное двум, проводим округление, так что  $m_{\text{вып}} = 0,098 \text{ кг}$ .

Ответ:  $m_{\text{вып}} = 0,098 \text{ кг}$ .



## Решения задач для 9 класса

**9.1. (5 баллов)** Маша вместе с классом поехала на экскурсию в город Гусь-Хрустальный, где им показали процесс производства изделий из стекла. В одном из цехов Маша увидела, что в поступившем в обработку стеклянном бруске имелся достаточно большой воздушный пузырь в виде шара. При взвешивании бруса на динамометре его вес равен  $3,0 \cdot 10^3$  Н, а при погружении в воду — 1300 Н.

**[1]** Определите объём пузыря в бруске.

**Замечание.** Массу воздуха в пузыре считать пренебрежимо малой, влияние воздуха при взвешивании не учитывать. Плотность стекла принять равной  $2,5 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>. (Л.С.Ласкавый)

**Ответ:** 0,05.

**Решение.** В случае, когда брусок взвешивается в воздухе, его вес равен силе тяжести, откуда можно найти массу бруса

$$P_1 = mg$$

$$m = P_1/g$$

С учётом

$$m = \rho_{\text{ст}} V_{\text{вещ}}$$

объём, занимаемый веществом (то есть стеклом), равен

$$V_{\text{вещ}} = m/\rho_{\text{ст}}$$

$$V_{\text{вещ}} = P_1/\rho_{\text{ст}}g$$

При взвешивании бруса, опущенного в воду, сила тяжести компенсируется силой упругости со стороны динамометра (равной весу) и силой Архимеда со стороны жидкости, то есть

$$mg = P_2 + F_{\text{арх}}$$

Объём бруса — сумма объёма вещества (стекла) и объёма пузыря:

$$V = V_{\text{вещ}} + V_{\text{пуз}}$$

Подставив выражение для силы Архимеда, получим

$$mg = P_2 + \rho_{\text{в}}g(V_{\text{вещ}} + V_{\text{пуз}})$$

Выражая объём пузыря, получим

$$V_{\text{пуз}} = (mg - P_2)/\rho_{\text{в}}g - V_{\text{вещ}}$$

Заменив объём вещества и массу выражениями для них, получим в итоге:

$$V_{\text{пуз}} = (P_1 - P_2)/\rho_{\text{в}}g - P_1/\rho_{\text{ст}}g = (3000 - 1300)/(1000 \cdot 10) - 3000/(2500 \cdot 10) = 0,05 \text{ м}^3$$

Учитывая минимальное число значащих цифр в условии равное единице, ответ остаётся без изменений.

Ответ:  $V_{\text{пуз}} = 0,05 \text{ м}^3$ .

**9.2. (7 баллов)** В школьном кружке по физике зимой изучали реактивное движение. Учитель решил наглядно продемонстрировать физические принципы в действии. Для этого он взял бочку массой  $M = 5 \text{ кг}$  и площадью основания  $S = 2 \text{ м}^2$ , расположил ее на покрытой льдом дорожке и заполнил водой до уровня  $H = 1 \text{ м}$ . В бочке у самого основания было отверстие, закрытое пробкой, с сечением  $\sigma = 15 \text{ см}^2$ . Сразу же после извлечения пробки под напором воды бочка пришла в движение с ускорением  $a = 1 \text{ мм/с}^2$ .

**[2]** Оцените коэффициент трения между бочкой и поверхностью дорожки.

**Замечание.** Плотность воды  $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ .

(А.А. Черенков)

**Ответ:** 0,001.

**Решение.** 1) Ускорение  $a$  бочки возникает за счёт разницы между реактивной силой тяги  $F_{\text{тяг}}$  струи воды, выливающейся из отверстия, и силой трения скольжения  $F_{\text{тр}}$  бочки о поверхность стола.

2) За малый промежуток времени  $\Delta t$  через отверстие выльется вода массой  $\Delta m = \rho \sigma v \Delta t$ . Пренебрегая потерями энергии из-за явления вязкости и изменением кинетической энергии оставшейся в бочке воды, запишем закон сохранения энергии системы:

$$\Delta m g H = \frac{\Delta m}{2} v^2,$$

откуда

$$v^2 = 2gH.$$

Из закона изменения импульса вытекающей воды  $\Delta m v = F \Delta t$ , подставив выражение для  $\Delta m$ , найдём силу давления  $F = \rho \sigma v^2 = 2\rho g H \sigma$ , которая по третьему закону Ньютона равна искомой реактивной силе тяги, то есть  $F_{\text{тяг}} = F = 2\rho g H \sigma$ .

3) Сразу после выскакивания пробки масса воды в сосуде  $m = \rho H S$ , сила трения между сосудом и столом  $F_{\text{тр}} = \mu (M + m) g$ . Из второго закона Ньютона

$$(M + m) a = F_{\text{тяг}} - F_{\text{тр}}$$

находим

$$\mu = \frac{2\rho H \sigma}{M + \rho H S} - \frac{a}{g} \approx 0,001.$$

**Ответ:** 0,001

**9.3. (6 баллов)** В школьной лаборатории Наталья проводит эксперимент по изучению процессов нагревания и охлаждения тел. Она кладёт нагретый стальной цилиндр радиусом и высотой 5,0 см основанием на толстый слой льда при температуре плавления. В результате образовалась цилиндрическая лунка радиуса 5,5 см. Температура цилиндрика равна  $26,2^\circ \text{ С}$ .

**[3]** Рассчитайте, сколько воды выплеснется из образовавшейся лунки.

**Замечание.** Считать, что потерь энергии в атмосферу не происходит, вся энергия цилиндрика идёт на нагрев льда. Удельная теплоёмкость стали равна  $0,50 \text{ кДж/(кг} \cdot \text{К)}$ , удельная теплота плавления льда  $3,3 \cdot 10^5 \text{ Дж/кг}$ , плотность стали  $7800 \text{ кг/м}^3$ , льда  $0,90 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ , воды  $1,0 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ .

(Л.С. Ласкавый)

**Ответ:** 0,098.

**Решение.** Потерями энергии в атмосферу пренебрегаем. Составим уравнение теплового баланса:

$$Q_1 + \dots + Q_n = 0$$

Плавление льда обеспечивается за счёт количества теплоты, отдаваемого цилиндриком, так что:

$$Q_1 = \lambda m_{\text{л}}$$

$$Q_2 = c_{\text{ст}} m_{\text{ст}} (t_{\text{пл}} - t_{\text{ст}})$$

Таким образом, уравнение теплового баланса имеет вид:

$$\lambda m_{\text{л}} + c_{\text{ст}} m_{\text{ст}} (t_{\text{пл}} - t_{\text{ст}}) = 0$$

Раскроем массу цилиндрика. Объём цилиндрика:

$$V = Sh = \pi r^2 h$$

Тогда масса

$$m_{\text{ст}} = \rho_{\text{ст}} \pi r^2 h$$

Тогда новый вид уравнения теплового баланса:

$$\lambda m_{\text{л}} + c_{\text{ст}} \rho_{\text{ст}} \pi r^2 h (t_{\text{пл}} - t_{\text{ст}}) = 0$$

Выразим массу воды (равную массе растаявшего льда), в итоге:

$$m_{\text{л}} = -c_{\text{ст}} \rho_{\text{ст}} \pi r^2 h (t_{\text{пл}} - t_{\text{ст}}) / \lambda$$

Определим глубину лунки. Для этого найдём объём расплавившегося льда и через объём цилиндра найдём его высоту. Объём лунки:

$$V_{\text{лунк}} = \pi R^2 H$$

С другой стороны:

$$m_{\text{л}} = \rho_{\text{л}} V_{\text{лунк}}$$

$$V_{\text{лунк}} = m_{\text{л}} / \rho_{\text{л}}$$

Тогда глубина лунки:

$$H = \frac{m_{\text{л}}}{\rho_{\text{л}} \pi R^2}.$$

Подставляя выражение для массы льда, получим

$$H = - \frac{c_{\text{ст}} \rho_{\text{ст}} r^2 h (t_{\text{пл}} - t_{\text{ст}})}{\lambda \rho_{\text{л}} R^2}.$$

Вычисляя глубину лунки, получим:

$$H = - \frac{500 \cdot 7800 \cdot 0.05^2 \cdot 0.05 \cdot (0 - 26,2)}{3.3 \cdot 10^5 \cdot 900 \cdot 0.055^2} \approx 0.01422 \text{ м.}$$

Отсюда видно, что высота лунки меньше чем высота цилиндрика. Объём части цилиндрика, находящейся в лунке — это цилиндр радиусом  $r$  и высотой  $H$ :

$$V_{\text{ст\_в\_лунке}} = \pi \cdot r^2 \cdot H$$

объём в лунке<sup>\*\*, \*\*</sup> который может занять вода:

$$V_{\text{воды\_в\_лунке}} = V_{\text{лунк}} - V_{\text{ст\_в\_лунке}} = \pi \cdot H \cdot (R^2 - r^2)$$

Находим объём воды, получившейся из льда  $V_{\text{воды}}$

$$V_{\text{воды}} = m_{\text{л}} / \rho_{\text{в}}$$

Разница между ним и объёмом оставшейся воды — это и есть объём выплеснувшейся воды.

$$V_{\text{вып}} = V_{\text{воды}} - V_{\text{воды\_в\_лунке}} = V_{\text{воды}} - \pi \cdot H \cdot (R^2 - r^2)$$

Тогда

$$m_{\text{вып}} = \rho_{\text{в}} V_{\text{вып}}$$

Подставляем выражения для объема и получаем

$$m_{\text{вып}} = \rho_{\text{в}} \left( \frac{m_{\text{л}}}{\rho_{\text{в}}} - \frac{\pi m_{\text{л}} (R^2 - r^2)}{\rho_{\text{л}} \pi R^2} \right) = m_{\text{л}} \left( 1 - \frac{\rho_{\text{в}} (R^2 - r^2)}{\rho_{\text{л}} R^2} \right) =$$

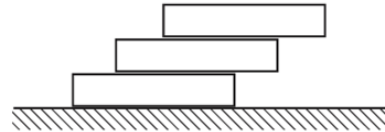
$$= - \frac{\rho_{\text{ст}} c_{\text{ст}} \pi r^2 h (t_{\text{пл}} - t_{\text{ст}})}{\lambda} \left( 1 - \frac{\rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{л}}} \left( 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right) \right)$$

$$m_{\text{вып}} = - \frac{7800 \cdot 500 \cdot \pi \cdot 0,05^2 \cdot 0,05 (0 - 26,2)}{3,3 \cdot 10^5} \left( 1 - \frac{1000}{900} \left( 1 - \left( \frac{0,05}{0,055} \right)^2 \right) \right) \approx 0,09815$$

Учитывая минимальное число значащих цифр в условии равное двум, проводим округление, так что  $m_{\text{вып}} = 0,098 \text{ кг}$ .

Ответ:  $m_{\text{вып}} = 0,098 \text{ кг}$ .

**9.4. (7 баллов)** Однажды на школьный урок по физике зашел фокусник, чтобы прорекламирровать цирк, в котором он выступает. Фокусник взял несколько деревянных брусков плотностью  $\rho = 520 \text{ кг/м}^3$ , длиной  $L = 10 \text{ см}$ , шириной  $B = 5 \text{ см}$ , высотой  $H = 3 \text{ см}$  и начал класть их друг на друга, как показано на картинке. При этом каждый новый брусок он сдвигал на максимальное расстояние вдоль предыдущего бруска, не нарушая равновесия всей конструкции. В итоге самый верхний брусок оказался сдвинут относительно нижнего на  $10 \text{ см}$ .



**[4]** Сколько брусков для этого потребовалось фокуснику?

(А.А. Черенков)

**Ответ:** 5.

**Решение.** Координаты отсчитываются от края верхнего бруска. Брусок с номером  $i$  сдвинут относительно  $(i + 1)$ -го на величину  $\Delta_i$ . Координата  $x_{ci}$  центра масс стопки брусков, лежащих выше  $(i + 1)$ -го, определяется соотношением

$$x_{ci} = \frac{1}{i} (x_1 + x_2 + \dots + x_i),$$

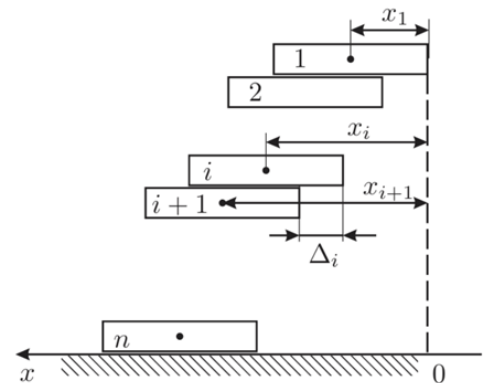
поскольку все бруски имеют одинаковые массы. Условие равновесия брусков для предельных сдвигов можно записать так:

$$x_{ci} = x_{i+1} - \frac{L}{2}, \quad \text{или} \quad x_{i+1} = \frac{L}{2} + \frac{1}{i} (x_1 + x_2 + \dots + x_i).$$

Находим смещение  $i$ -го бруска:

$$\Delta_i = \frac{1}{i} (x_1 + x_2 + \dots + x_i) - \frac{1}{i-1} (x_1 + x_2 + \dots + x_{i-1})$$

Преобразуем это выражение, используя выражение для  $x_{i+1}$ , полученное выше:



$$\begin{aligned}\Delta_i &= -\frac{1}{(i-1)i} (x_1 + x_2 + \dots + x_{i-1}) + \frac{x_i}{i} = \\ &= \frac{1}{i} \left( x_i - \frac{1}{i-1} (x_1 + x_2 + \dots + x_{i-1}) \right) = \\ &= \frac{1}{i} \left( \frac{L}{2} + \frac{1}{i-1} (x_1 + x_2 + \dots + x_{i-1}) - \frac{1}{i-1} (x_1 + x_2 + \dots + x_{i-1}) \right) = \frac{L}{2i}.\end{aligned}$$

Итак, смещения брусков, начиная с верхнего, образуют последовательность

$$\Delta_i = \frac{L}{2i} = \frac{L}{2}, \frac{L}{4}, \frac{L}{6}, \dots$$

Найдём смещение нижнего бруска с номером  $n$  относительно верхнего:

$$\Delta(n) = \Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_n.$$

В задаче требуется подобрать такое  $n$ , что  $\Delta(n) \geq L$ . Находя суммы для  $n = 2, 3, 4$ , получаем

$$\Delta(2) = 0,75L; \quad \Delta(3) = 0,92L; \quad \Delta(4) = 1,04L > L.$$

Таким образом, требованию задачи удовлетворяет стопка из пяти брусков, причем последний брусок был сдвинут на расстояние меньшее, чем предельный для него сдвиг.

Ответ: 5

**9.5. (7 баллов)** В безветренный день Паша отправился на озеро ловить рыбу. Выплыв на середину озера на лодке длиной  $L = 2,0$  м и массой  $m = 10,0$  кг, он решил перейти с носа на корму. Лодка при этом пришла в движение, испытывая силу сопротивления со стороны воды  $F = -ku$ , где  $u$  — скорость лодки,  $k$  — известный коэффициент пропорциональности. Масса Паши  $M = 80,0$  кг.

[5] Найдите смещение  $S_0$  лодки к моменту полной остановки при отсутствии силы сопротивления ( $k = 0$ )

[6] Найдите смещение  $S$  лодки к моменту полной остановки при наличии силы сопротивления ( $k = 0,50$  кг/с)

**Замечание.** При решении считать, что лодка перемещается вдоль одного направления.

(А.А. Черенков)

Ответ: 1,8.

Ответ: 0.

**Решение.** 1. Воспользуемся свойством сохранения положения центра масс изначально покоящейся системы при отсутствии внешних сил (внутренние силы не изменяют положение центра масс в силу третьего закона Ньютона). Изменение координаты центра масс системы из 2 тел массами  $m_1, m_2$  определяется через их соответствующие смещения  $\Delta x_1, \Delta x_2$ , следующим образом:

$$\Delta x_c = \frac{m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2}{m_1 + m_2}.$$

Применим эту формулу к нашему случаю:

$$\Delta x_c = \frac{m \cdot (-S_0) + M \cdot (L - S_0)}{M + m} = 0,$$

откуда

$$S_0 = \frac{ML}{M + m} \approx 1,8 \text{ м}$$

2. Пусть  $v$  и  $u$  — соответственно скорости человека и лодки относительно земли в некоторый мо-

мент времени,  $x$  — координата лодки в тот же момент времени, тогда закон изменения импульса ( $\Delta p / \Delta t = F$ ) для системы, состоящей из человека и лодки, имеет вид

$$\frac{\Delta}{\Delta t} (Mv + mu) = -ku,$$

откуда после подстановки  $u = \Delta x / \Delta t$  находим

$$\frac{\Delta}{\Delta t} (Mv + mu + kx) = 0.$$

Последнее уравнение означает, что величина в скобках не изменяется со временем, то есть её начальное и конечное значения равны между собой:

$$Mv_{\text{нач}} + mu_{\text{нач}} + kx_{\text{нач}} = \text{const} = Mv_{\text{кон}} + mu_{\text{кон}} + kx_{\text{кон}}.$$

Поскольку  $v_{\text{нач}} = u_{\text{нач}} = v_{\text{кон}} = u_{\text{кон}} = 0$ , после подстановки скоростей и деления на  $k$  получим  $x_{\text{кон}} = x_{\text{нач}}$ , то есть платформа вернётся в прежнее положение, а искомое смещение  $S = x_{\text{кон}} - x_{\text{нач}} = 0$ .

Ответ: 1,8 м; 0 м

**9.6. (6 баллов)** На уроке по физике, посвященному электрическим цепям, школьники проводили лабораторную работу. Ване достался комплект оборудования, в котором уже была собрана электрическая цепь с двумя выводами, состоящая только из источников постоянного напряжения и резисторов. После того как Ваня подключил к выводам цепи вольтметр, он показал напряжение  $U_0 = 20,0$  В. Затем он подключил к выводам цепи резистор с сопротивлением  $R = 5,0$  Ом, и вольтметр стал показывать напряжение  $U_1 = 10,0$  В.

**[7]** Какое напряжение будет показывать вольтметр, если к цепи подключить еще один такой же резистор?

**Замечание.** При решении считать вольтметр идеальным.

(А.А. Черенков)

**Ответ:** 6,7.

**Решение.** 1) Любая цепь, имеющая два вывода и состоящая только из источников постоянного напряжения и резисторов, эквивалентна одному неидеальному источнику постоянного напряжения с ЭДС  $\mathcal{E}$  и внутренним сопротивлением  $r$ .

При подключении к цепи только идеального вольтметра ток через эквивалентный источник не течёт, поэтому  $\mathcal{E} = U_0$ .

2) Пусть теперь к цепи подключен один резистор. Применим закон Ома для полной цепи и найдем силу тока:

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R + r}$$

Тогда по закону Ома для участка цепи напряжение на резисторе:

$$U_1 = I_1 \cdot R = \frac{\mathcal{E}}{R + r} \cdot R = \frac{U_0 R}{R + r}, \quad \text{откуда} \quad r = \frac{U_0 - U_1}{U_1} \cdot R;$$

2) Рассмотрим теперь случай, когда к цепи подключили второй резистор. Так как резисторы подключены параллельно, а их сопротивления равны, то их общее сопротивление  $R/2$ . Таким образом, по закону Ома для полной цепи можно найти ток:

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}}{\frac{R}{2} + r}$$

Тогда по закону Ома для участка цепи, найдем напряжение на резисторах:

$$U_2 = I_2 \cdot \frac{R}{2} = \frac{\mathcal{E}}{\frac{R}{2} + r} \cdot \frac{R}{2} =$$

$$= \frac{U_0}{\frac{R}{2} + \frac{U_0 - U_1}{U_1} \cdot R} \cdot \frac{R}{2} = \frac{U_0 U_1}{2U_0 - U_1} \approx 6,7B$$

Ответ: 6,7 В

**9.7. (7 баллов)** В школьной лаборатории изучали оптические системы. Учитель собрал установку, состоящую из двух плоских зеркал с общей стороной, образующих прямой двугранный угол. Между зеркалами расположена тонкая собирающая линза с фокусным расстоянием  $f = 10$  см и диаметром  $d = 20$  см. Линза касается обоих зеркал, а ее главная оптическая ось проходит через линию пересечения зеркал перпендикулярно ей.

**[8]** Найти расстояние до линзы, на котором будет находиться изображение маленькой лампочки, расположенной на главной оптической оси линзы на расстоянии  $l = 15$  см от ее центра.

(А.А. Черенков)

**Ответ:** 0,05.

**Решение.** 1) Из геометрических соображений следует, что предмет  $S$  находится перед передним фокусом  $F$  линзы, а задний её фокус совпадает с точкой касания зеркал  $C$  (рисунок 1). Интересующие нас световые лучи сначала проходят через линзу, затем отражаются от пары зеркал, после чего снова проходят через линзу в обратном направлении. Для нахождения изображения  $S'$  вычислим положения промежуточных изображений, даваемых по отдельности линзой и зеркалами по мере прохождения лучей через систему.

Для иллюстрации рассуждений на рис.2 показаны продолжения лучей, создающих промежуточные изображения  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_3$  и вспомогательные построения для поиска изображений. Точки  $O$ ,  $A$  и  $B$  — это соответственно оптический центр линзы и её точки касания с каждым из зеркал.

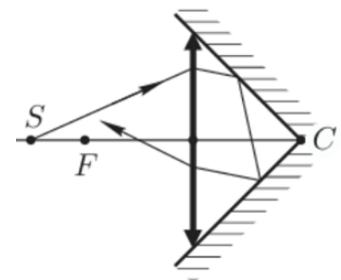


Рис. 1

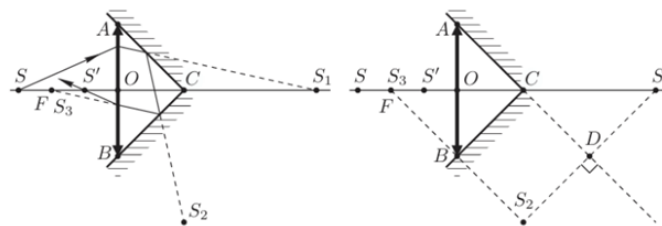


Рис. 2

2) Пусть  $a$  и  $b$  — расстояния от линзы до предмета и до изображения соответственно, тогда по формуле тонкой линзы

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f},$$

откуда

$$b = \frac{af}{a - f},$$

Точка  $S_1$  — изображение источника  $S$  в линзе без учёта зеркал, поэтому при  $a = SO = 1,5f$  получаем  $OS_1 = b = 3f$ .

3) Зеркало даёт изображение, симметричное предмету относительно плоскости зеркала, причём это свойство применимо как к действительным, так и к мнимым предметам. Точка  $S_2$  — изображение предмета  $S_1$  в зеркале  $AC$  без учёта второго зеркала, значит, построив в плоскости зеркала  $AC$  перпендикуляр  $S_1D$  и продолжив его на такое же расстояние, находим  $S_2$ .

4) Рассуждая аналогично, строим точку  $S_3$  — изображение предмета  $S_2$  в зеркале  $BC$  без учёта линзы. Последовательное применение двух отражений относительно взаимно перпендикулярных прямых эквивалентно одному отражению относительно их точки пересечения (вспомним свойство центральной симметрии графика нечётной функции), поэтому  $S_3C = CS_1$ , откуда

$$S_3O = S_3C - OC = CS_1 - OC = OS_1 - 2OC = 3f - 2f = f,$$

то есть изображение  $S_3$  совпадает с передним фокусом  $F$  линзы.

5) Искомая точка  $S'$  является действительным изображением мнимого предмета  $S_3$ , поэтому из формулы тонкой линзы при  $a = -S_3O = -f$  получаем  $S'O = b = f/2$ .

В самом начале решения был выбран луч, который сперва отражается от зеркала  $AC$ , а потом от  $BC$ , однако существуют лучи, которые испытывают отражения в обратном порядке. В данном случае из симметрии ясно, что они пересекутся в той же точке, однако при другом расположении зеркал могли бы возникнуть два конечных изображения. Таким образом, окончательный ответ: изображение будет на расстоянии  $f/2 = 5$  см перед линзой.

Ответ: 5 см



## Решения задач для 10 класса

**10.1. (7 баллов)** Экспериментатор Василий в своей лаборатории совершил над одноатомным идеальным газом необычный цикл: в  $PV$  координатах при выбранном масштабе по осям он состоит из двух дуг окружностей разного радиуса с центрами в точках  $(2V, 2P)$  и  $(V, (2+\sqrt{3})P)$ , где  $P = 300$  Па,  $V = 5$  м<sup>3</sup>. Участок цикла 1-2 представляет из себя треть окружности.  
**[1]** Найдите термодинамический КПД в процентах.

(А.А. Черенков)

**Ответ:** 6.

**Решение.** 1) Обозначим центры окружностей  $O_1(V, (2+\sqrt{3})P)$  и  $O_2(2V, 2P)$ , а также обозначим точку 1 за А, точку 2 за В. Из условия задачи следует, что А имеет координаты  $(V, 2P)$ , угол смежный с углом  $\angle AO_2B$  равен  $60^\circ$ , а значит координаты точки В  $(2.5V, (2+\sqrt{3}/2)P)$ . Таким образом, проведем отрезок АВ. Из рассмотрения равнобедренных треугольников  $AO_1B$  и  $AO_2B$  находим, что  $\angle AO_1B = 60^\circ$ , а значит участок 2-1 представляет из себя шестую часть окружности. 2) Работа газа на каждом из участков 1-2 и 2-1 представляет из себя площадь под соответствующим участком графика. Найдем работы:

$$A_{12} = 1/3\pi PV + 1/2 \cdot \sqrt{3}/2P \cdot 1/2V + 2P \cdot 3/2V = (8\pi + 3\sqrt{3} + 72) / 24 \cdot PV$$

$$A_{21} = - \left( \sqrt{3}P \cdot 3/2V - 1/2 \cdot 3/2V \cdot \sqrt{3}/2P - 3\pi PV/6 + 3/2V \cdot 2P \right) = - (9\sqrt{3} - 4\pi + 24) / 8 \cdot PV$$

Таким образом, работа газа за цикл:

$$A = A_{12} + A_{21} = 5/6\pi - \sqrt{3}$$

3) Найдем изменение внутренней энергии газа на участке 1-2:

$$\Delta U = 3/2\nu R\Delta T = 3/2\Delta(PV) = 3/2 \left( 5/2V \cdot (2 + \sqrt{3})P - 2PV \right) = (18 + 15\sqrt{3}) / 4 \cdot PV$$

В соответствии с первым началом термодинамики, на участке 1-2 газ получил количество теплоты равное:  $Q = \Delta U + A_{12} = (8\pi + 93\sqrt{3} + 180) / 24 \cdot PV$

Рассуждая аналогично, заметим, что на участке 2-1 газ отдает некоторое количество теплоты, так как  $\Delta U_{21} = -\Delta U_{12} < 0$ ,  $A_{12} < 0$ , значит  $Q_{21} = \Delta U_{21} + A_{21} < 0$

4) Таким образом, КПД газа за цикл:

$$\eta = \frac{A}{Q} * 100\% \approx 6\%$$

**Ответ:** 6%

**10.2. (8 баллов)** В одной лаборатории инженеры рассчитывают макет купола здания в виде усеченного конуса с радиусами оснований  $R = 2$  м,  $r = 1$  м и высотой  $H = 2$  м, который будет использован при постройке подводных сооружений. Интерес для инженеров представляет случай, когда купол размещен под водой плотностью  $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup> так, что центр его меньшего основания находится на глубине  $L = 10$  м, а ось наклонена под углом  $\alpha = 30^\circ$  к поверхности воды. Большее основание купола погружено в воду глубже, чем меньшее.

**[2]** Определите силу, действующую на боковую поверхность купола со стороны воды, если давление воздуха над поверхностью воды  $P_0 = 10^5$  Па. Ответ дайте в меганьютонах.

**Ответ: 2.**

**Решение.** 1) Площадь основания конуса  $S = \pi R^2$ , его объём  $V = SH/3 = \pi R^2 H/3$ . Объём усеченного конуса можно найти, если достроить его до полного конуса и из его объема вычесть объём достроенной части.

$$V = V_R - V_r = \frac{1}{3}\pi (R^2 (H + h) - r^2 h)$$

где  $h$  - высота достроенной части. Найдем  $h$ . Рассмотрим сечение конуса, образованного плоскостью, проходящей через его ось. Тогда из подобия треугольников, представляющих из себя сечения всего конуса и достроенной части, получаем:

$$\frac{h}{H + h} = \frac{r}{R}$$

откуда

$$h = \frac{rH}{R - r}$$

Подставляя полученное выражение для  $h$  в формулу для объема усеченного конуса, получим:

$$V = \frac{1}{3}\pi H (R^2 + rR + r^2)$$

Тогда сила Архимеда, действующая на конус:  $F_A = \rho g V = \rho g \pi H (R^2 + rR + r^2) / 3$ .

Из геометрических соображений также найдем, что нижнее основание погружено на глубину  $L + H \sin \alpha$

2) По своей природе сила Архимеда равна векторной сумме сил давления жидкости на поверхность помещённого в неё тела, то есть в нашем случае

$$\vec{F}_A = \vec{F} + \vec{F}_r + \vec{F}_R,$$

где  $F$  — искомая сила, а  $F_r$  и  $F_R$  — силы давления жидкости на меньшее и большее основание конуса.

В силу симметрии оснований и однородности поля тяжести среднее давление  $P_{cp}$  на основание равно давлению на уровне центра основания, поэтому

$$F_r = P_{cp}^r S = (P_0 + \rho g L) \pi r^2, \quad F_R = P_{cp}^R S = (P_0 + \rho g (L + H \sin \alpha)) \pi R^2$$

Сила  $F_A$  направлена вертикально вверх, а  $F_r, F_R$  — перпендикулярно основаниям конуса, то есть вдоль его оси, под углом  $\alpha$  к горизонту. Введем обозначение  $\vec{F}_0 = \vec{F}_r + \vec{F}_R$ . Так как силы давления жидкости на основания конуса сонаправлены, то  $F_0 = -F_r + F_R$ . Применим теорему косинусов к треугольнику, составленному из векторов сил  $\vec{F}_A, \vec{F}_0$ , получим

$$F^2 = F_A^2 + F_0^2 - 2F_A F_0 \cos \left( \frac{\pi}{2} + \alpha \right),$$

откуда

$$F = \sqrt{F_A^2 + F_0^2 + 2F_A F_0 \sin \alpha} \approx 2MH.$$

Ответ: 2 МН

**10.3. (6 баллов)** На спортивной площадке Маша и Даша играли с теннисными мячиками. Они одновременно бросили свои мячи с одинаковыми скоростями  $v = 10,0$  м/с под углами  $30,0^\circ$  и  $60,0^\circ$  к горизонту.

**[3]** Через сколько времени после начала движения скорости мячей окажутся сонаправленными?

**Замечание.** При решении считать, что начальные скорости мячей лежат в одной вертикальной плоскости, ускорение свободного падения принять равным  $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ . (А.А. Черенков)

**Ответ:** 1,4.

**Решение.** 1) Пусть  $\alpha = 30^\circ$ . Оба мяча, рассматриваемые в задаче, движутся с постоянными ускорениями, равными ускорению свободного падения  $g$ . Проекции их скоростей на горизонтальную  $x$  и вертикальную  $y$  оси следующие:

$$v_{1x} = v_0 \cos \alpha, \quad v_{1y} = v_0 \sin \alpha - g\tau,$$

$$v_{2x} = v_0 \cos 2\alpha, \quad v_{2y} = v_0 \sin 2\alpha - g\tau.$$

Индекс 1 относится к мячу Маши, а индекс 2 — к мячу Даши. Так как скорости в момент времени  $\tau$  оказались сонаправленными, получаем

$$\frac{v_{1y}}{v_{1x}} = \frac{v_{2y}}{v_{2x}},$$

подставим выражения для проекций скоростей:

$$tg\alpha - \frac{g\tau}{v_0 \cos \alpha} = tg2\alpha - \frac{g\tau}{v_0 \cos 2\alpha}.$$

Из этого уравнения выразим время:

$$\tau = \frac{v_0}{g} \cdot \frac{tg2\alpha - tg\alpha}{\frac{1}{\cos 2\alpha} - \frac{1}{\cos \alpha}},$$

Проведем тригонометрические преобразования:

$$tg2\alpha - tg\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos 2\alpha \cos \alpha},$$

$$\frac{1}{\cos 2\alpha} - \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{2 \sin (\alpha/2) \sin (3\alpha/2)}{\cos 2\alpha \cos \alpha},$$

Тогда окончательно получаем:

$$\tau = \frac{v_0 \cos (\alpha/2)}{g \sin (3\alpha/2)} \approx 1,4c$$

2) Задачу можно решить и другим способом, не требующим тригонометрических преобразований. Для этого нужно рассмотреть движение одного мяча относительно другого. Из закона сложения ускорений (аналогично закону сложения скоростей) следует, что мячи движутся друг относительно друга с постоянной скоростью. Скорость  $\vec{v}_{12}$  мяча Маши относительно мяча Даши составляет

$$\vec{v}_{12} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{v}_{10} - \vec{v}_{20},$$

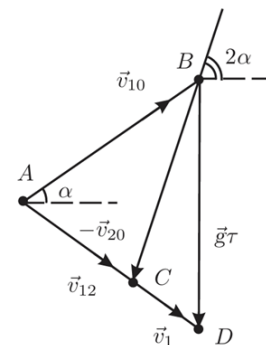
где индексом 0 отмечены начальные значения скоростей. В момент времени  $\tau$  скорости  $\vec{v}_1$ ,  $\vec{v}_2$  и  $\vec{v}_{12}$  сонаправлены. Имея это в виду, изобразим (см рис) треугольник скоростей  $ABC$ , соответствующий формуле для  $\vec{v}_{12}$ , а также треугольник  $ABD$ , отражающий равенство

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_{10} + \vec{g}\tau.$$

Так как  $AB = BC = v_0$ , имеем  $\angle BAC = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ , а  $\angle ADB = \frac{3\alpha}{2}$ .  
Применяем к  $\triangle ABD$  теорему синусов:

$$\frac{v_0}{\sin\left(\frac{3\alpha}{2}\right)} = \frac{g\tau}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Отсюда сразу следует полученный ранее ответ. Таким образом, переход к другой системе отсчёта позволил использовать геометрические методы вместо проведения тригонометрических преобразований.



Ответ: 1,4 с

**10.4. (5 баллов)** В лаборатории микроклимата исследуют поведение влажного воздуха. Для этого два резервуара объёмами  $V_1 = 5,0$  л и  $V_2 = 2,0$  л соединяют короткой трубкой с вентилем, который изначально закрыт. Первый резервуар заполняется влажным воздухом под давлением  $P_1 = 3,0$  атм и относительной влажностью  $\phi = 80,0\%$ , а второй — водяным паром при давлении  $P_2 = 0,75$  атм. Благодаря теплоизолирующему покрытию в сосудах все время поддерживается постоянная температура  $T = 100,0^\circ$ . Вентиль открывают и ждут, когда в сосудах установится термодинамическое равновесие.

**[4]** Определите давление в атмосферах и относительную влажность в сосудах в процентах после установления равновесия, если давление насыщенного пара при температуре  $100^\circ$  равно  $P_0 = 1,0$  атм.

(А.А. Черенков)

**Ответ:** 2,4;78,6.

**Решение.** 1) Запишем уравнение Менделеева-Клапейрона для газов в сосудах до открытия вентиля:

$$P_1 V_1 = \nu_1 R T, \quad P_2 V_2 = \nu_2 R T$$

Сложим полученные уравнения:

$$P_1 V_1 + P_2 V_2 = (\nu_1 + \nu_2) R T$$

2) Запишем уравнение Менделеева-Клапейрона для газов в сосудах после открытия вентиля:

$$P (V_1 + V_2) = (\nu_1 + \nu_2) R T$$

Таким образом, получаем:

$$P (V_1 + V_2) = P_1 V_1 + P_2 V_2$$

откуда находим искомое давление:

$$P = \frac{P_1 V_1 + P_2 V_2}{V_1 + V_2} = 2,4 \text{ атм.}$$

3) Для вычисления установившейся влажности в сосудах найдем парциальное давление водяного пара. Из уравнения Менделеева-Клапейрона для водяного пара во втором сосуде до открытия вентиля выразим его количество:

$$\nu_2 = \frac{P_2 V_2}{R T}$$

Воспользуемся определением относительной влажности, чтобы вычислить парциальное давление водяного пара в первом сосуде до открытия вентиля:

$$P_{01} = \varphi P_0$$

Таким образом, количество водяного пара в первом сосуде до открытия вентиля:

$$\nu_{01} = \frac{P_{01}V_1}{RT} = \frac{\varphi P_0 V_1}{RT}$$

Запишем уравнение Менделеева-Клапейрона после открытия вентиля для водяного пара:

$$P_{02}(V_1 + V_2) = (\nu_{01} + \nu_2)RT$$

Откуда находим парциальное давление водяного пара:

$$P_{02} = \frac{(\nu_{01} + \nu_2)RT}{V_1 + V_2} = \frac{\varphi P_0 V_1 + P_2 V_2}{V_1 + V_2}$$

4) Таким образом, вычислим относительную влажность в сосудах после открытия вентиля:

$$\varphi_1 = \frac{P_{02}}{P_0} \cdot 100\% = \frac{\varphi P_0 V_1 + P_2 V_2}{P_0(V_1 + V_2)} \cdot 100\% \approx 78,6\%$$

Ответ: 2,4; 78,6%

**10.5. (6 баллов)** В безветренный день Паша отправился на озеро ловить рыбу. Выплыв на середину озера на лодке длиной  $L = 2,0$  м и массой  $m = 10,0$  кг, он решил перейти с носа на корму. Лодка при этом пришла в движение, испытывая силу сопротивления со стороны воды  $F = -ku$ , где  $u$  — скорость лодки,  $k$  — известный коэффициент пропорциональности. Масса Паши  $M = 80,0$  кг.

[5] Найдите смещение  $S_0$  лодки к моменту полной остановки при отсутствии силы сопротивления ( $k = 0$ )

[6] Найдите смещение  $S$  лодки к моменту полной остановки при наличии силы сопротивления ( $k = 0,50$  кг/с)

**Замечание.** При решении считать, что лодка перемещается вдоль одного направления.

(А.А. Черенков)

**Ответ:** 1,8.

**Ответ:** 0.

**Решение.** 1. Воспользуемся свойством сохранения положения центра масс изначально покоящейся системы при отсутствии внешних сил (внутренние силы не изменяют положение центра масс в силу третьего закона Ньютона). Изменение координаты центра масс системы из 2 тел массами  $m_1, m_2$  определяется через их соответствующие смещения  $\Delta x_1, \Delta x_2$ , следующим образом:

$$\Delta x_c = \frac{m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2}{m_1 + m_2}.$$

Применим эту формулу к нашему случаю:

$$\Delta x_c = \frac{m \cdot (-S_0) + M \cdot (L - S_0)}{M + m} = 0,$$

откуда

$$S_0 = \frac{ML}{M + m} \approx 1,8 \text{ м}$$

2. Пусть  $v$  и  $u$  — соответственно скорости человека и лодки относительно земли в некоторый момент времени,  $x$  — координата лодки в тот же момент времени, тогда закон изменения импульса ( $\Delta p / \Delta t = F$ ) для системы, состоящей из человека и лодки, имеет вид

$$\frac{\Delta}{\Delta t} (Mv + mu) = -ku,$$

откуда после подстановки  $u = \Delta x / \Delta t$  находим

$$\frac{\Delta}{\Delta t} (Mv + mu + kx) = 0.$$

Последнее уравнение означает, что величина в скобках не изменяется со временем, то есть её начальное и конечное значения равны между собой:

$$Mv_{\text{нач}} + mu_{\text{нач}} + kx_{\text{нач}} = \text{const} = Mv_{\text{кон}} + mu_{\text{кон}} + kx_{\text{кон}}.$$

Поскольку  $v_{\text{нач}} = u_{\text{нач}} = v_{\text{кон}} = u_{\text{кон}} = 0$ , после подстановки скоростей и деления на  $k$  получим  $x_{\text{кон}} = x_{\text{нач}}$ , то есть платформа вернётся в прежнее положение, а искомое смещение  $S = x_{\text{кон}} - x_{\text{нач}} = 0$ .

Ответ: 1,8 м; 0 м

**10.6. (6 баллов)** К открытию Олимпийских игр любитель-электрик собрал светящуюся гирлянду в форме олимпийской эмблемы из пяти одинаковых колец сопротивлением  $r = 33$  Ом. Кольца были спаяны в местах, отмеченных на рисунке жирными точками. Места спайки и точка А разделяют центральное кольцо на 6 равных частей.

[7] Какое сопротивление имеет гирлянда между точками А и В?

**Замечание.** Сопротивлением в местах спайки пренебречь.

(А.А. Черенков)

**Ответ:** 7.

**Решение.** В силу симметрии схемы относительно оси АВ узел С можно разделить на два (см рис). Изобразим эквивалентную схему (см рис), на которой буквами обозначены соответствующие узлы, а численные значения сопротивлений указаны в единицах  $r$ . Пользуясь свойствами последовательного и параллельного соединений, найдём сопротивления участков цепи.

$$R_{AE_1} = R_{AE_2} = \frac{1}{6}r,$$

$$R_{E_1D_1} = R_{E_2D_2} = \frac{1}{\frac{1}{6}r + \frac{1}{\frac{1}{6}r} + \frac{1}{\frac{5}{6}r}} = \frac{5}{66}r$$

Заметим, что два сопротивления по  $1/6r$ , подключенные параллельно, имеют общее сопротивление  $1/12r$ . Тогда

$$R_{D_1B} = R_{D_2B} = \frac{1}{\frac{1}{2}r + \frac{1}{\frac{1}{12}r + \frac{1}{6}r}} = \frac{2}{11}r.$$

общее сопротивление:

$$R = \frac{1}{2} (R_{AE_1} + R_{E_1D_1} + R_{D_1B}) = \frac{7}{33}r = 7 \text{ Ом}.$$

Ответ: 7

**10.7. (7 баллов)** На одном уроке по физике школьники выполняли лабораторную работу. Вася справился с заданием самый первый и, чтобы не скучать без дела, начал экспериментировать. Он взял две наклонные плоскости с углами  $\alpha_1 = 45,0^\circ$  и  $\alpha_2 = 30,0^\circ$  и массами  $m_1 = 100,0$  г и  $m_2 = 500,0$  г соответственно. На легкий стержень он надевал грузики и клал его горизонтально на плоскости. Его задача заключалась в подборе такой массы груза, чтобы при падении стержня на стол он одновременно коснулся его обоими концами.

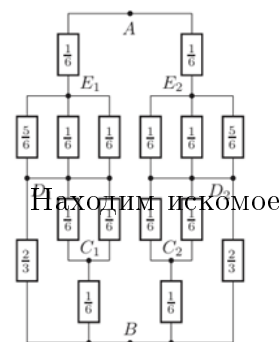
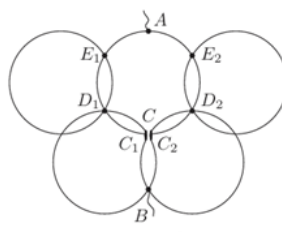
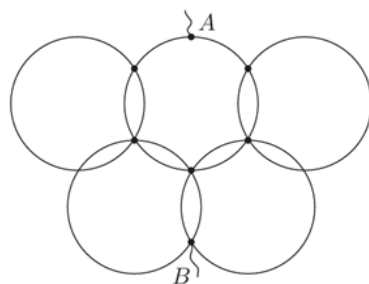
[8] При какой массе груза это возможно, если груз делит стержень в отношении 2:1 считая от левого конца?

**Замечание.** Трением пренебречь.

(А.А. Черенков)

**Ответ:** 0,0282.

**Решение.** 1) Концы палочки ударятся о плоскость одновременно, только если палочка всё



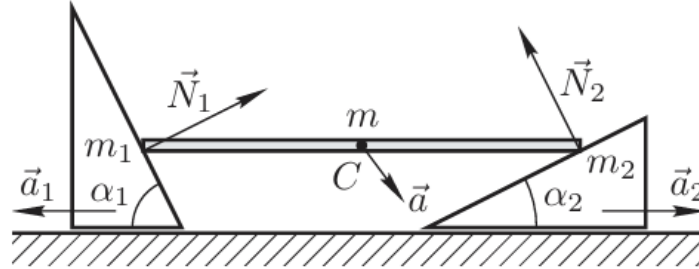
время будет опускаться горизонтально. Для этого необходимо и достаточно, чтобы отсутствовало вращение палочки в вертикальной плоскости, в которой лежит палочка, то есть сумма моментов сил, действующих на палочку, была равна нулю (см рис):

$$N_1 \cos \alpha_1 \cdot 2 \cdot L - N_2 \cos \alpha_2 \cdot L = 0,$$

откуда

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{2 \cos \alpha_1}{\cos \alpha_2}$$

где  $L$  — расстояние от грузика  $C$  до правого клина, а моменты вычислены относительно точки, к которой прикреплен груз.



Палочка на клиньях

2) Используя второй закон Ньютона, выразим ускорения  $a_1$  и  $a_2$  клиньев и горизонтальную составляющую  $a_x$  ускорения палочки:

$$a_1 = \frac{N_1 \sin \alpha_1}{m_1}, \quad a_2 = \frac{N_2 \sin \alpha_2}{m_2}, \quad a_x = \frac{N_1 \sin \alpha_1 - N_2 \sin \alpha_2}{m}.$$

Запишем горизонтальные смещения клиньев относительно палочки к моменту  $t$ :

$$\Delta x_1 = \frac{(a_1 + a_x) t^2}{2}, \quad \Delta x_2 = \frac{(a_2 - a_x) t^2}{2}.$$

3) Вертикальное смещение  $\Delta y$  палочки одно и то же для обоих концов:

$$\Delta x_1 \tan \alpha_1 = \Delta y = \Delta x_2 \tan \alpha_2,$$

откуда после подстановки выражений для  $\Delta x_1, \Delta x_2$  и сокращения получаем

$$(a_1 + a_x) \tan \alpha_1 = (a_2 - a_x) \tan \alpha_2.$$

Таким образом, подставим выражения для ускорений:

$$\left( \frac{N_1 \sin \alpha_1}{m_1} + \frac{N_1 \sin \alpha_1 - N_2 \sin \alpha_2}{m} \right) \tan \alpha_1 = \left( \frac{N_2 \sin \alpha_2}{m_2} - \frac{N_1 \sin \alpha_1 - N_2 \sin \alpha_2}{m} \right) \tan \alpha_2,$$

Разделим все уравнение на  $N_1$ , подставим выражение для  $N_2/N_1$  и перегруппируем слагаемые:

$$\frac{1}{m} (\sin \alpha_1 - 2 \cos \alpha_1 \tan \alpha_2) (\tan \alpha_1 + \tan \alpha_2) = \frac{2 \cos \alpha_1 \tan^2 \alpha_2}{m_2} - \frac{\sin \alpha_1 \tan \alpha_1}{m_1}$$

Наконец, разделим уравнение на  $\cos \alpha_1$  и выразим искомую массу:

$$m = \frac{(\tan \alpha_1 - 2 \tan \alpha_2) (\tan \alpha_1 + \tan \alpha_2)}{\frac{2 \tan^2 \alpha_2}{m_2} - \frac{\tan^2 \alpha_1}{m_1}} \approx 28,2 \text{ г}$$

Ответ: 28,2 г



## Решения задач для 11 класса

**11.1. (9 баллов)** На детской площадке школьники играли в снежки. Петя, стоя на горке высотой  $H = 3,00$  м, бросил снежок с начальной скоростью  $v = 10,0$  м/с под углом  $\alpha = 60,0^\circ$  к горизонту. В этот же момент с поверхности земли свой снежок вдогонку бросил Юра, находясь на расстоянии  $L = 5,00$  м от горки.

**[1]** С какой минимальной скоростью и под каким углом должен был бросить снежок Юра, чтобы снежки столкнулись?

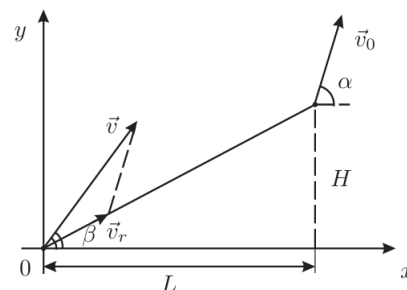
**Замечание.** При решении считать, что начальные скорости снежков лежат в одной вертикальной плоскости, сопротивлением воздуха пренебречь. (А.А. Черенков)

**Ответ:** 8,25;67,0.

**Решение.** 1) Оба снежка движутся с постоянным ускорением, равным ускорению свободного падения  $\vec{g}$ . Для описания их движения введём декартову систему координат так, как показано на рисунке. Пусть Юра бросил снежок под углом  $\beta$  к горизонту со скоростью  $v$ . Тогда уравнения движения снежков в проекции на оси координат:

$$\begin{cases} x_1(t) = L + v_0 t \cos \alpha \\ y_1(t) = H + v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2(t) = vt \cos \beta \\ y_2(t) = vt \sin \beta - \frac{gt^2}{2} \end{cases}$$



2) Если через промежуток времени  $t$  снежки столкнутся, то можно приравнять их координаты:

$$vt \cos \beta = L + v_0 t \cos \alpha,$$

$$vt \sin \beta - \frac{gt^2}{2} = H + v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}.$$

Из этих уравнений найдём

$$v = v_0 \frac{\sin \alpha - \frac{H}{L} \cos \alpha}{\sin \beta - \frac{H}{L} \cos \beta},$$

$$t = \frac{L}{v_0 \cos \alpha} \left( \frac{\frac{H}{L} - tg\alpha}{\frac{H}{L} - tg\beta} - 1 \right)^{-1}.$$

Время движения до столкновения удобно выразить через скорость  $\vec{v}_r$  движения одного камня относительно другого. Так как ускорения снежков одинаковые, то относительная скорость постоянна, и время выражается следующим образом:

$$t = \frac{\sqrt{L^2 + H^2}}{v_r}.$$

При фиксированных величине и направлении вектора  $\vec{v}_0$  и заданном направлении вектора  $\vec{v}$  из векторного треугольника скоростей, показанного на рисунке, видно, что меньшим  $v_r$  соответствует меньшая скорость  $v$ . Таким образом, минимальной скорости  $v$  соответствует минимальное значение  $v_r$  и, следовательно, максимальное время  $t$ . Ещё одно условие ограничивает возможность столкновения камней. Камень, пущенный вдогонку, должен удалиться от начала

координат по горизонтали на расстояние, большее  $L$ . Дальность его полёта равна  $v^2 \sin 2\beta / g$ . Поэтому должно быть обеспечено условие

$$v^2 \sin 2\beta \geq Lg.$$

Итак, нужно найти такие значения  $v$  и  $\beta$ , которые удовлетворяют равенству (1), неравенству (3) и обеспечивают наибольшее значение (2). Подставляя выражение (1) в (3), получим неравенство

$$2 \frac{v_0^2}{Lg} \left( \sin \alpha - \frac{H}{L} \cos \alpha \right)^2 \operatorname{tg} \beta - \left( \operatorname{tg} \beta - \frac{H}{L} \right)^2 \geq 0.$$

Обозначив

$$\frac{v_0^2}{Lg} \left( \sin \alpha - \frac{H}{L} \cos \alpha \right)^2 = a$$

и  $\operatorname{tg} \beta = \xi$ , получим

$$\xi^2 - 2 \left( \frac{H}{L} + a \right) \xi + \frac{H^2}{L^2} \leq 0.$$

Это неравенство выполняется, если

$$\frac{H}{L} + a - \sqrt{a^2 + 2a \frac{H}{L}} \leq \xi \leq \frac{H}{L} + a + \sqrt{a^2 + 2a \frac{H}{L}}.$$

Как видно из формулы (2) при  $\alpha = 60^\circ$ , большие значения  $t$  обеспечиваются большими значениями  $\xi = \operatorname{tg} \beta$ . Поэтому нужно выбрать для  $\xi$  большее значение. Получим

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{H}{L} + a + \sqrt{a^2 + 2a \frac{H}{L}} \quad \text{при } \alpha = 60^\circ.$$

Таким образом, подставляя численные значения в выведенные формулы, находим

$$\beta \approx 67,0^\circ, \quad v \approx 8,25 \text{ м/с}.$$

Ответ: 8,25; 67,0°

**11.2. (6 баллов)** На стройке рабочим было поручено протянуть кабель линейной плотности  $\rho = 1,0 \text{ кг/м}$  с верхних этажей на нижние. Кабель намотан на катушку радиуса  $R = 20,0 \text{ см}$ , имеющей момент инерции  $I = 0,20 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$  относительно своей оси. На верхнем этаже катушку закрепляют так, чтобы она могла свободно вращаться вокруг своей оси без трения при размотке кабеля.

**[2]** Какое ускорение приобретет кабель, после того как его отпустят без начальной скорости, и он разматывается на  $L = 3,0 \text{ м}$ ?

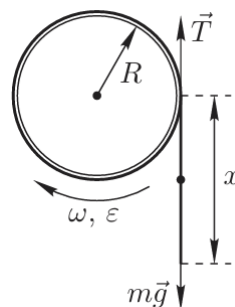
**Замечание.** При решении толщиной кабеля пренебречь.

(А.А. Черенков)

**Ответ:** 3,7.

**Решение.**

Пусть  $T$  — сила натяжения кабеля в верхней точке его вертикальной части (см рис),  $\varepsilon$  — угловое ускорение катушки,  $m = \rho x$  — масса свисающей части кабеля,  $I_x = \rho (L - x) R^2$  — момент инерции кабеля, намотанного на катушку. Тогда второй закон Ньютона для свисающей части кабеля, уравнение вращательного движения катушки с намотанным на неё кабелем и кинематическая связь имеют соответственно вид



$$ma = mg - T, \quad (I + I_x) \varepsilon = TR, \quad a = \varepsilon R.$$

Решая записанную систему, получаем

$$a(x) = \frac{gR^2 \rho x}{I + R^2 \rho L}.$$

Тогда к моменту, когда кабель разматывается на  $L$  метров, его ускорение составит:

$$a(L) = \frac{gR^2 \rho L}{I + R^2 \rho L} \approx 3,7 \text{ м/с}^2$$

Ответ: 3,7

**11.3. (5 баллов)** У семьи Ивановых есть уютный загородный дом, в котором они часто проводят выходные зимой. В один из таких дней, когда на улице была температура  $t_1 = -25^\circ \text{С}$ , они заметили, что комнатный термометр показывает температуру  $T_1 = 10^\circ \text{С}$ . Семья решила, что переедет жить в дом, когда наступит потепление и дома будет поддерживаться постоянная температура  $T_2 = 20^\circ \text{С}$ . Отопление в доме работает стабильно: батареи всегда нагреваются до  $\tau = 80^\circ \text{С}$ , независимо от погоды на улице.

**[3]** Какая температура должна быть на улице, чтобы Ивановы смогли переехать жить в дом?

(А.А. Черенков)

**Ответ:** -10.

**Решение.** Пусть  $T$  и  $t$  — текущие температуры в доме и на улице соответственно, тогда мощности потоков тепла от батарей в комнату и из дома на улицу составляют

$$P = \alpha (\tau - T) \quad \text{и} \quad N = \beta (T - t),$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — некоторые константы. В установившемся режиме эти мощности равны между собой, поэтому для первого и второго случаев можно записать соответственно

$$\alpha (\tau - T_1) = \beta (T_1 - t_1) \quad \text{и} \quad \alpha (\tau - T_2) = \beta (T_2 - t_2),$$

откуда

$$t_2 = \tau - \frac{(\tau - T_2)(\tau - t_1)}{\tau - T_1} = -10^\circ \text{С}$$

Ответ:  $-10^\circ \text{С}$

**11.4. (7 баллов)** Однажды Вова зашел в магазин головных уборов и примерил смешную высокую шляпу. Когда он ее надел, оказалось, что верхний край шляпы выше уровня глаз Вовы на  $h = 25$  см. Он подошел к плоскому зеркалу, стоящему на полу, и заметил, что не видит в отражении пол, хотя себя он видит целиком.

**[4]** На каком при этом расстоянии от пола Вова видит верхушку шляпы, если он перестал видеть свои глаза в зеркале, когда отошел от него в 2,5 раза дальше?

(А.А. Черенков)

**Ответ:** 0,17.

**Решение.**

Вова не увидел в зеркале пола, значит, луч, идущий от низа ботинок и попавший в глаз, отразился от нижнего края зеркала, а до отражения шёл горизонтально на очень малой высоте над полом. Это возможно, только если плоскость зеркала составляет некий угол  $\varphi$  с вертикалью. Исходя из этого построим изображение Вовы  $AB$  и шляпы  $BC$  в зеркале (рис.1). Изображение  $B'C'$  шляпы образует угол  $2\varphi$  с вертикалью, следовательно,

$$x = h \cos 2\varphi = h \cdot \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}.$$

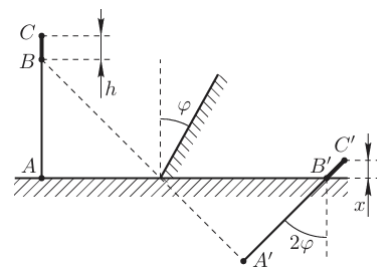


Рисунок 1

Для нахождения угла  $\varphi$  рассмотрим дополнительно положение, когда Вова перестал видеть себя ниже уровня глаз (рис. 2), отойдя от зеркала на расстояние  $L = nl$ , где  $l$  — расстояние от него до зеркала в первом случае,  $n = 2,5$ . Во втором положении луч, идущий от глаза и попавший в глаз, отразился от нижнего края зеркала, так как в противном случае мальчик увидел бы своё изображение ниже уровня глаз. Поскольку этот луч возвращается в исходную точку, он перпендикулярен зеркалу. Пусть  $H$  — высота глаз Вовы над уровнем пола, тогда из геометрических соображений в первом и втором положениях выражаем

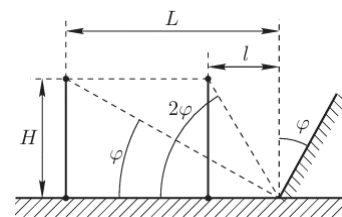


Рисунок 2

$$\frac{H}{l} = \operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2 \operatorname{tg} \varphi}{1 - \operatorname{tg}^2 \varphi}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{H}{L} = \frac{H}{nl},$$

откуда

$$\operatorname{tg}^2 \varphi = 1 - \frac{2}{n}.$$

Подставив это выражение в формулу для  $x$ , находим

$$x = \frac{h}{n-1} \approx 17 \text{ см.}$$

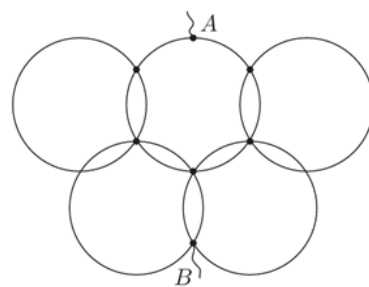
Ответ: 17 см

**11.5. (6 баллов)** К открытию Олимпийских игр любитель-электрик собрал светящуюся гирлянду в форме олимпийской эмблемы из пяти одинаковых колец сопротивлением  $r = 33$  Ом. Кольца были спаяны в местах, отмеченных на рисунке жирными точками. Места спайки и точка  $A$  разделяют центральное кольцо на 6 равных частей.

**[5]** Какое сопротивление имеет гирлянда между точками  $A$  и  $B$ ?

**Замечание.** Сопротивлением в местах спайки пренебречь.

(А.А. Черенков)



Ответ: 7.

**Решение.** В силу симметрии схемы относительно оси  $AB$  узел  $C$  можно разделить на два (см рис). Изобразим эквивалентную схему (см рис), на которой буквами обозначены соответствующие узлы, а численные значения сопротивлений указаны в единицах  $r$ . Пользуясь свойствами последовательного и параллельного соединений, найдём сопротивления участков цепи.

$$R_{AE_1} = R_{AE_2} = \frac{1}{6}r,$$

$$R_{E_1D_1} = R_{E_2D_2} = \frac{1}{\frac{1}{6}r + \frac{1}{6}r + \frac{1}{6}r} = \frac{5}{66}r$$

Заметим, что два сопротивления по  $1/6r$ , подключенные параллельно, имеют общее сопротивление  $1/12r$ . Тогда

$$R_{D_1B} = R_{D_2B} = \frac{1}{\frac{2}{3}r + \frac{1}{12}r + \frac{1}{6}r} = \frac{2}{11}r.$$

Находим искомое общее сопротивление:

$$R = \frac{1}{2} (R_{AE_1} + R_{E_1D_1} + R_{D_1B}) = \frac{7}{33}r = 7 \text{ Ом}.$$

Ответ: 7

**11.6. (6 баллов)** На факультативном занятии по физике Алексей познакомился с решением задачи об определении сопротивления между точками А и В бесконечной электрической цепи (см. рисунок). Алексей решил экспериментально проверить полученный ответ, собрав конечную схему с использованием только сопротивлений в 10 Ом.

**[6]** Какое наименьшее количество таких сопротивлений он должен спаять, чтобы экспериментальный результат не отличался от теоретического больше чем на 20%?

(А.Б. Яковлев)

Ответ: 12.

**Решение.** 1) Заметим, что цепь состоит из блоков сопротивлений  $R - 3R - 2R$ , соединенных последовательно. Далее каждый следующий блок присоединяется параллельно к сопротивлению  $3R$ . Пусть мы знаем сопротивление  $R_n$  цепочки из  $n$  блоков. Тогда присоединяя к цепи новый блок получим, что сопротивления  $R_n$  и  $3R$  соединены параллельно, их общее сопротивление  $R_0 = \frac{3RR_n}{3R+R_n}$ . Этот участок соединен последовательно с сопротивлениями  $R$  и  $2R$ , значит:

$$R_{n+1} = R + 2R + R_0 = 3R \left( 1 + \frac{R_n}{3R + R_n} \right)$$

2) При неограниченном увеличении числа присоединенных к цепи блоков получим, что  $R_n, R_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} R_\infty$ , где  $R_\infty$  - сопротивление всей цепи. Тогда устремляя  $n$  к бесконечности в (1), получаем уравнение для определения  $R_\infty$ :

$$R_\infty = 3R \left( 1 + \frac{R_\infty}{3R + R_\infty} \right)$$

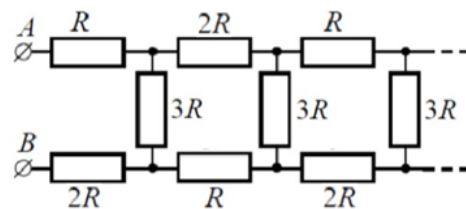
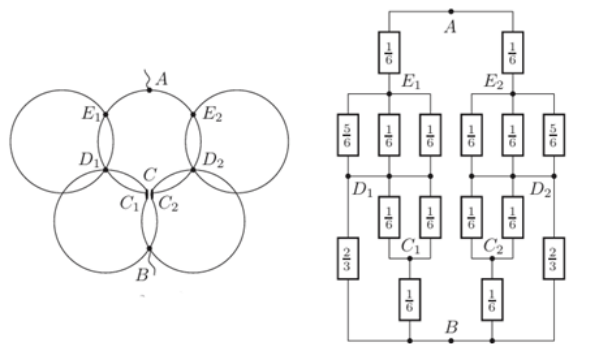
Разделим все уравнение на  $3R$ , числитель и знаменатель дроби в скобках разделим на  $R_\infty$  и введем замену  $x = \frac{3R}{R_\infty}$  0 Получаем:

$$\frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{1+x}$$

Домножим уравнение на  $x(x+1) \neq 0$ :

$$x+1 = x^2 + x + x$$

После преобразований получаем квадратное уравнение для определения  $x$ :



$$x^2 + x - 1 = 0$$

С учётом, что  $x > 0$ , получаем

$$x = \frac{-1 + \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

По определению  $x = \frac{3R}{R_\infty}$ , поэтому

$$R_\infty = \frac{3R}{x} = \frac{3R}{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{6R}{\sqrt{5}-1}.$$

Домножая числитель и знаменатель на  $(\sqrt{5} + 1)$ , имеем

$$R_\infty = \frac{3R}{2} (\sqrt{5} + 1).$$

3) Воспользуемся рекуррентным соотношением для  $R_n$ , чтобы найти эквивалентное сопротивление цепи, состоящей из  $n$  блоков. При  $n = 1$  имеем один блок, чье сопротивление  $R_1 = 6R$ . Заметим, что  $R_1/R_{\text{inf}} \approx 1,23$ , то есть погрешность больше, чем 20%. Далее находим, что  $R_2 = 5R$ , причем  $R_1/R_{\text{inf}} \approx 1,03$ , то есть погрешность 3%. Таким образом, двух блоков достаточно, чтобы удовлетворить условию задачи. Каждый такой блок состоит из сопротивлений  $R - 3R - 2R$ , что эквивалентно 6 сопротивлениям по  $R$ . Значит, всего понадобится 12 сопротивлений.

Ответ: 12

**11.7. (7 баллов)** Через вершины правильного треугольника ABC со стороной 20 см проведены перпендикулярно его плоскости прямые линии, вдоль которых могут бегать 3 разноцветные лампочки (красная, зеленая и синяя). Известно, что в начальный момент времени все лампочки находились в вершинах треугольника ABC и имели одинаковые скорости 0,50 м/с, направленные в одном направлении. Далее красная лампочка продолжала двигаться с постоянной скоростью, зеленая и синяя — равноускоренно, соответственно с ускорениями 2,0 м/с<sup>2</sup> и -3,0 м/с<sup>2</sup>.

[7] Определите скорость центра масс треугольника, образуемого лампочками, в момент времени 3,0 секунды.

(А.Б.Яковлев)

**Ответ:** -0,5.

**Решение.** 1) Пусть масса каждой лампочки равна  $m$ . Все лампочки движутся строго вертикально, поэтому центр масс по горизонтали неподвижен, и нас интересует только вертикальная составляющая его скорости.

2) Сначала все три лампочки поднялись на высоту  $h_0$ , при этом в конце подъема все три лампочки имеют одинаковую скорость  $v_0 = 0.5$  м/с, направленную вверх.

3) Опишем дальнейшее движение лампочек. Для этого начнем отсчет времени заново с нуля и направим ось  $Oz$  вертикально вверх. Уравнения движения лампочек:

$$\begin{cases} z_1(t) = h_0 + v_0 t \\ z_2(t) = h_0 + v_0 t + \frac{a_2 t^2}{2} \\ z_3(t) = h_0 + v_0 t + \frac{a_3 t^2}{2} \end{cases}$$

где индексы 1,2,3 относятся к красной, синей и зеленой лампочке соответственно.

4) Запишем выражение для нахождения координаты  $z_c$  центра масс:

$$z_c(t) = \frac{mz_1(t) + mz_2(t) + mz_3(t)}{3m} = \frac{z_1(t) + z_2(t) + z_3(t)}{3}.$$

Скорость центра масс — это производная его координаты по времени:

$$v_c(t) = \dot{z}_c(t) = \frac{\dot{z}_1(t) + \dot{z}_2(t) + \dot{z}_3(t)}{3} = \frac{1}{3}(v_0 + (v_0 + a_2t) + (v_0 + a_3t)) = v_0 + \frac{(a_2 + a_3)t}{3}$$

Из условия задачи следует, что нас интересует скорость при  $t = 3\text{с}$ :

$$v_c(3) = v_0 + \frac{3(a_2 + a_3)}{3} = v_0 + (a_2 + a_3) = 0,5 + 2 - 3 = -0,5 \quad \text{м/с}$$

Ответ: -0,5 м/с