Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2025-2026 учебный год. Отборочный этап

Задачи для 5 класса

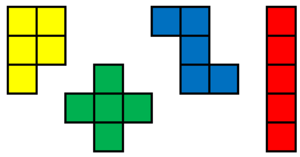
Работы сдаются в электронном виде (например, в виде сканов или doc-файлов с текстом), подробности на странице formulo.org/ru/olymp/2025-math-ru/.

Последний срок сдачи — **5 ноября 2025 в 23:59:59 по UTC** (т. е. 6 ноября в 02:59:59 по московскому времени).

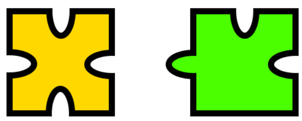
Работа должна быть сделана самостоятельно. В большинстве задач нужны не только ответы, но и полные обоснования. В работе не должно быть личных данных участника, то есть **подписывать работу не следует**.

---

1. Можно ли в равенстве $* + * + * + * + * + * + * = **$ расставить все ненулевые цифры так, чтобы равенство было верным? (В левой его части — сумма однозначных чисел, в правой — двузначное число.) (*С. П. Павлов*)

2. Русские программисты придумали новый «Тетрис-5». Фигуры (на рисунке) можно размещать на клетчатом поле в любом положении, чтобы они не накладывались друг на друга (как и в классическом тетрисе, фигуры можно поворачивать, но не переворачивать).

a) Докажите, что возможно покрыть поле 8×8, если из него удалены четыре угловые клетки.
b) Докажите, что невозможно покрыть поле 2026×2026, если из него удалены четыре угловые клетки. (*Л. С. Корешкова*)

3. Если в начало натурального числа дописать цифру 2, то получится квадрат этого числа. Чему может быть равно это число? Найдите все варианты и докажите, что других нет. (*П. Д. Муленко*)

4. Маленькой Маше на день рождения подарили прямоугольный пазл, собирающийся из нескольких равного размера квадратных кусочков, в каждом из которых на сторонах есть впадинки или выпуклости (при этом контур пазла ровный).

Известно, что в этом наборе есть такие два кусочка (см. рис.). Какое наименьшее количество деталей может быть в подаренном пазле? Не забудьте привести пример, а также объяснить, почему меньше деталей быть не может. (*П. Д. Муленко*)

5. Муравей прополз по туннелю длиной 28 см от левого края муравьиной фермы до правого. Туннель состоит из горизонтальных участков, подъёмов и спусков (уклоны всех подъёмов и спусков одинаковы по крутизне). На подъёме муравей ползёт со скоростью 3 см/мин, по горизонтали — 4 см/мин. Весь путь занял у муравья 7 минут. Туннель не полностью горизонтален, но в конце муравей оказался на той же высоте, что и в начале (то есть суммарный подъём равен суммарному спуску). Найдите скорость муравья на спуске (в см/мин). (*П. Д. Муленко*)

6. Попугай Роза знает все четыре звука своего имени и умеет произносить «слова» длиной от одного до трёх звуков. При этом она не умеет произносить два одинаковых звука подряд. Сколько разных «слов» может сказать Роза? (*О. С. Третьякова*)

7. Все десять цифр разбили на пары и в каждой вычислили разность (вычитая из большей цифры меньшую). Какой наибольшей степени двойки может равняться произведение всех этих разностей? (Степень двойки — это произведение нескольких двоек, например, пятая степень двойки равна $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$.) (*С. П. Павлов*)

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2025-2026 учебный год. Отборочный этап

Задачи для 6 класса

Работы сдаются в электронном виде (например, в виде сканов или doc-файлов с текстом), подробности на странице formulo.org/ru/olymp/2025-math-ru/.

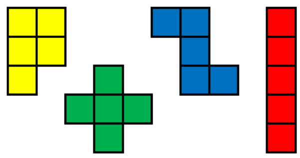
Последний срок сдачи — **5 ноября 2025 в 23:59:59 по UTC** (т. е. 6 ноября в 02:59:59 по московскому времени).

Работа должна быть сделана самостоятельно. В большинстве задач нужны не только ответы, но и полные обоснования. В работе не должно быть личных данных участника, то есть **подписывать работу не следует**.

---

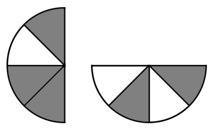
1. Можно ли в равенстве $* + * + * + * + * + * + * + * + * = **$ расставить все ненулевые цифры так, чтобы равенство было верным? (В левой его части — сумма однозначных чисел, в правой — двузначное число.) (*С. П. Павлов*)

2. Русские программисты придумали новый «Тетрис-5». Фигуры (на рисунке) можно размещать на клетчатом поле в любом положении, чтобы они не накладывались друг на друга (как и в классическом тетрисе, фигуры можно поворачивать, но не переворачивать).

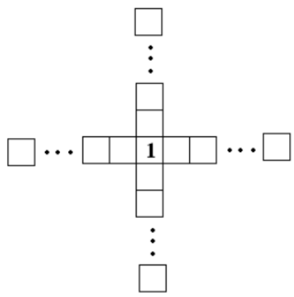


a) Докажите, что возможно покрыть поле 8×8, если из него удалены четыре угловые клетки.
b) Докажите, что невозможно покрыть поле 2026×2026, если из него удалены четыре угловые клетки. (*Л. С. Корешкова*)

3. Прозрачный круглый диск разделён на 8 равных секторов. Некоторые из секторов закрашены. Если сложить диск пополам по вертикальной оси, видно 3 закрашенных сектора. Если сложить диск пополам по горизонтальной оси, видно 2 закрашенных сектора. Сколько всего закрашено секторов? Найдите все варианты и докажите, что других нет. (*П. Д. Муленко*)



4. На игровом поле в форме крестика из клеток (см. рисунок) два игрока по очереди делают ходы. В начале игры занята только центральная клетка, в которой написано число 1. Ход заключается в том, что игрок вписывает в четыре клетки, смежные с уже занятыми, следующие по порядку натуральные числа — первый игрок пишет числа 2, 3, 4, 5, потом второй пишет числа 6, 7, 8, 9, и так далее. Числа вписываются по одному в каждое направление креста так, чтобы любые два числа, стоящие в соседних клетках, были взаимно простыми (то есть не имели общих делителей, больших 1). Если кто-то из игроков не может сделать ход, то он проигрывает. Какой из игроков может обеспечить себе победу при правильной игре? (*С. П. Павлов*)



5. Попугай Роза знает все четыре звука своего имени и умеет произносить «слова» длиной от одного до четырёх звуков. При этом она не умеет произносить два одинаковых звука подряд. Сколько разных «слов» может сказать Роза? (*О. С. Третьякова*)

6. У Ирины есть 289 монет из нескольких стран. Она разложила их поровну в несколько коробок, причём в каждой коробке лежат монеты (более одной штуки) только одной страны. Известно, что белорусские монеты составляют более 6% от общего количества, испанские — более 12%, эквадорские — более 24%, и русские — более 36%. Сколько у Ирины может быть китайских монет? Найдите все варианты. (*Л. С. Корешкова*)

7. В стране Оз все города пронумерованы числами от 1 до N, причём N чётно, но не кратно 4. Каждые два города соединены или дорогой из жёлтого кирпича, или дорогой из зелёного изумруда. Главный Волшебник решил изменить нумерацию городов так, чтобы те номера, что соединялись жёлтой дорогой, теперь соединялись зелёной, и наоборот. Получится ли у Волшебника осуществить задуманное? (*Л. С. Корешкова*)

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2025-2026 учебный год. Отборочный этап

Задачи для 7 класса

Работы сдаются в электронном виде (например, в виде сканов или doc-файлов с текстом), подробности на странице formulo.org/ru/olymp/2025-math-ru/.

Последний срок сдачи — **5 ноября 2025 в 23:59:59 по UTC** (т. е. 6 ноября в 02:59:59 по московскому времени).

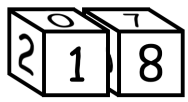
Работа должна быть сделана самостоятельно. В большинстве задач нужны не только ответы, но и полные обоснования. В работе не должно быть личных данных участника, то есть **подписывать работу не следует**.

---

1. Муравей прополз по туннелю длиной 28 см от левого края муравьиной фермы до правого. Туннель состоит из горизонтальных участков, подъёмов и спусков (уклоны всех подъёмов и спусков одинаковы по крутизне). На подъёме муравей ползёт со скоростью 3 см/мин, по горизонтали — 4 см/мин. Весь путь занял у муравья 7 минут. Туннель не полностью горизонтален, но в конце муравей оказался на той же высоте, что и в начале (то есть суммарный подъём равен суммарному спуску). Найдите скорость муравья на спуске (в см/мин). (*П. Д. Муленко*)

2. В каждой клетке таблицы 3×5 стоит натуральное число. При этом все числа различны, но суммы во всех строках одинаковы и во всех столбцах тоже одинаковы. Какова минимально возможная сумма чисел в таблице? (*А. А. Теслер*)

3. У Паши есть много деревянных кубиков и наклеек с цифрами. Из двух кубиков можно изготовить сувенирный календарь — для этого надо наклеить на каждую грань обоих кубиков по наклейке так, чтобы с их помощью можно было сложить любой день месяца (то есть любое число от 01 до 31; на рисунке представлен пример числа 18). Паша хочет сделать подарить каждому своему другу особую версию такого календаря. Сколько различных календарей он может сделать? Паша считает два календаря различными, если в одном из них есть кубик с неким набором наклеек, а в другом кубика с таким же набором наклеек нет; расположение цифр на гранях Паша не учитывает. (*М. В. Карлукова*)

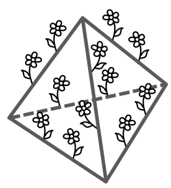


4. У Ирины есть 289 монет из нескольких стран. Она разложила их поровну в несколько коробок, причём в каждой коробке лежат монеты (более одной штуки) только одной страны. Известно, что белорусские монеты составляют более 6% от общего количества, испанские — более 12%, эквадорские — более 24%, и русские — более 36%. Сколько у Ирины может быть китайских монет? Найдите все варианты. (*Л. С. Корешкова*)

5. Если в волшебный автомат ввести натуральное число $n > 1$, то он строит клетчатый квадрат $n \times n$, удаляет из него одну клетку и добавляет доминошки 1×2 до тех пор, пока суммарная площадь фигур не станет равна площади какого-нибудь клетчатого квадрата. Сторону этого нового квадрата автомат возвращает обратно. Катя сто раз обменялась карточками с автоматом и получила 2025. С какого числа она начала? (*П. Д. Муленко*)

6. В стране Оз все города пронумерованы числами от 1 до N, причём N чётно, но не кратно 4. Каждые два города соединены или дорогой из жёлтого кирпича, или дорогой из зелёного изумруда. Главный Волшебник решил изменить нумерацию городов так, чтобы те номера, что соединялись жёлтой дорогой, теперь соединялись зелёной, и наоборот. Получится ли у Волшебника осуществить задуманное? (*Л. С. Корешкова*)

7. Земляной холм представляет из себя правильную треугольную пирамиду, все рёбра которой 3 м. На каждом ребре в двух точках, которые делят ребро на три равные части, растёт по цветку. Пчела, прилетев на один из цветков, хочет посетить все 12 цветков кратчайшим маршрутом. Какой длины этот маршрут? (*Л. С. Корешкова*)



Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2025-2026 учебный год. Отборочный этап

Задачи для 8 класса

Работы сдаются в электронном виде (например, в виде сканов или doc-файлов с текстом), подробности на странице formulo.org/ru/olymp/2025-math-ru/.

Последний срок сдачи — **5 ноября 2025 в 23:59:59 по UTC** (т. е. 6 ноября в 02:59:59 по московскому времени).

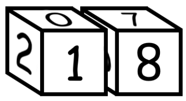
Работа должна быть сделана самостоятельно. В большинстве задач нужны не только ответы, но и полные обоснования. В работе не должно быть личных данных участника, то есть **подписывать работу не следует**.

---

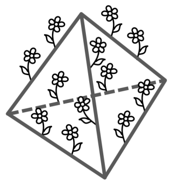
1. Петя нарисовал на квадратном листе бумаги ромб, который не является квадратом. Всегда ли Вася сумеет на том же листе нарисовать квадрат, две соседних вершины которого совпадают с двумя соседними вершинами ромба? (*А. А. Теслер*)

2. В некоторых клетках клетчатого поля $n \times n$ стоит по шашке так, что в каждой строке, каждом столбце и каждой из двух больших диагоналей шашек ровно две. При каких n такое возможно? (*С. П. Павлов*)

3. У Павла есть много деревянных кубиков и наклеек с цифрами. Из двух кубиков можно изготовить сувенирный календарь — для этого надо наклеить на каждую грань обоих кубиков по наклейке так, чтобы с их помощью можно было сложить любой день месяца (то есть любое число от 01 до 31; на рисунке представлен пример числа 18). Павел планирует открыть бизнес по производству сувенирных календарей, причём хочет, чтобы каждое изделие было уникальным. Сколько различных календарей он может сделать?
Павел считает два календаря одинаковыми, если для каждого кубика из первого календаря есть такой же кубик во втором. В свою очередь, два кубика одинаковы, если можно поставить их рядом так, чтобы с каждой из шести сторон наклейки на этих кубиках были одинаковыми (возможно, по-разному повёрнутыми). (*М. В. Карлукова*)



4. Земляной холм представляет из себя правильную треугольную пирамиду, все рёбра которой 3 м. На каждом ребре в двух точках, которые делят ребро на три равные части, растёт по цветку. Пчела, прилетев на один из цветков, хочет посетить все 12 цветков кратчайшим маршрутом. Какой длины этот маршрут? (*Л. С. Корешкова*)



5. Если в начало натурального числа дописать одну цифру, то получится квадрат этого числа. Найдите самое большое такое число. (*П. Д. Муленко*)

6. Дан разносторонний тупоугольный треугольник ABC с целыми сторонами. Через вершину тупого угла A провели прямую, параллельную BC, и отметили точки пересечения этой прямой с биссектрисами углов B и C как P и Q. Чему равно PQ, если $BC = 4$? (*П. Д. Муленко*)

7. Квиз состоит из нескольких вопросов (более одного), причём в каждом вопросе одинаковое число вариантов ответа. Если на очередной вопрос выбирается неправильный ответ, вы проигрываете. Однако у вас есть одна «запасная жизнь» на весь квиз: при первом выборе неправильного ответа вы не выбываете, а можете исправиться и дать ещё один ответ на тот же вопрос (если и второй ответ неверен — вы проигрываете). Вероятность пройти квиз, выбирая ответы наугад, равна $2/81$. Сколько в квизе вопросов и сколько вариантов ответа в каждом вопросе? (*П. Д. Муленко*)

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2025-2026 учебный год. Отборочный этап

Задачи для 9 класса

Работы сдаются в электронном виде (например, в виде сканов или doc-файлов с текстом), подробности на странице formulo.org/ru/olymp/2025-math-ru/.

Последний срок сдачи — **5 ноября 2025 в 23:59:59 по UTC** (т. е. 6 ноября в 02:59:59 по московскому времени).

Работа должна быть сделана самостоятельно. В большинстве задач нужны не только ответы, но и полные обоснования. В работе не должно быть личных данных участника, то есть **подписывать работу не следует**.

---

1. У Ирины есть 289 монет из нескольких стран. Она разложила их поровну в несколько коробок, причём в каждой коробке лежат монеты (более одной штуки) только одной страны. Известно, что белорусские монеты составляют более 6% от общего количества, испанские — более 12%, эквадорские — более 24%, и русские — более 36%. Сколько у Ирины может быть китайских монет? Найдите все варианты. (*Л. С. Корешкова*)

2. В каждой клетке таблицы 3×5 стоит натуральное число. При этом все числа различны, но суммы во всех строках одинаковы и во всех столбцах тоже одинаковы. Какова минимально возможная сумма чисел в таблице? (*А. А. Теслер*)

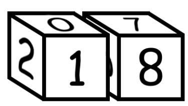
3. На острове радиусом 40 км находятся несколько колодцев. Колодец называется *отдалённым*, если на расстоянии ближе 25 км от него нет ни моря, ни другого колодца. Какое максимальное количество отдалённых колодцев может быть на острове? (*А. А. Теслер*)

4. Какому нечётному числу может быть равен НОД чисел $2025n+1$ и $5202n+1$, где n — натуральное число? Укажите все возможности и докажите, что других нет. (*С. П. Павлов*)

5. Дан разносторонний тупоугольный треугольник ABC с целыми сторонами. Через вершину тупого угла A провели прямую, параллельную BC, и отметили точки пересечения этой прямой с биссектрисами углов B и C как P и Q. Чему равно PQ, если $BC = 4$? (*П. Д. Муленко*)

6. Квиз состоит из нескольких вопросов (более одного), причём в каждом вопросе одинаковое число вариантов ответа. Если на очередной вопрос выбирается неправильный ответ, вы проигрываете. Однако у вас есть одна «запасная жизнь» на весь квиз: при первом выборе неправильного ответа вы не выбываете, а можете исправиться и дать ещё один ответ на тот же вопрос (если и второй ответ неверен — вы проигрываете). Вероятность пройти квиз, выбирая ответы наугад, равна $2/81$. Сколько в квизе вопросов и сколько вариантов ответа в каждом вопросе? (*П. Д. Муленко*)

7. Павел Дмитриевич владеет заводом по производству сувенирных календарей. Календарь изготавливается из двух кубиков и наклеек с цифрами: надо наклеить на каждую грань обоих кубиков по наклейке так, чтобы с их помощью можно было сложить любой день месяца (то есть любое число от 01 до 31; на рисунке представлен пример числа 18). Завод гордится тем, что каждое его изделие отличается от других. Сколько всего различных календарей может выпустить завод?



Два календаря считаются одинаковыми, если для каждого кубика из первого календаря есть такой же кубик во втором. В свою очередь, два кубика одинаковы, если можно поставить их рядом так, чтобы с каждой из шести сторон они выглядели одинаково, то есть на них были одинаковые наклейки в одинаковом положении. Наклейки с цифрами 0 и 8 имеют центр симметрии, остальные — нет. (*М. В. Карлукова*)

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2025-2026 учебный год. Отборочный этап

Задачи для 10 класса

Работы сдаются в электронном виде (например, в виде сканов или doc-файлов с текстом), подробности на странице formulo.org/ru/olymp/2025-math-ru/.

Последний срок сдачи — **5 ноября 2025 в 23:59:59 по UTC** (т. е. 6 ноября в 02:59:59 по московскому времени).

Работа должна быть сделана самостоятельно. В большинстве задач нужны не только ответы, но и полные обоснования. В работе не должно быть личных данных участника, то есть **подписывать работу не следует**.

---

1. Укажите все номера годов текущего десятилетия (с 2021 по 2030), которые можно представить суммой одно-, двух-, трёх- и четырёхзначного чисел так, чтобы каждая цифра была использована один раз. (*С. П. Павлов*)

2. Клетчатое поле 13×13 состоит из 169 единичных клеток. Сергей поставил на нём четырёх не бьющих друг друга ферзей. Оказалось, что центры клеток, в которых стоят ферзи, образуют ромб. Обязательно ли этот ромб является квадратом? (*С. П. Павлов*)

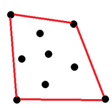
3. В каждой клетке таблицы 4×5 стоит натуральное число. При этом все числа различны, но суммы во всех строках одинаковы и во всех столбцах тоже одинаковы. Какова минимально возможная сумма чисел в таблице? (*А. А. Теслер*)

4. В окружность ω вписан шестиугольник $ABCDEF$, в котором $AB = BC = CD$. Отрезок BE пересекает CF и DF в точках G и H соответственно, а отрезок AE пересекает CF и BF в точках J и K соответственно. Оказалось, что прямые GK и HJ пересекаются в точке L, лежащей на ω, а также пересекают эту окружность в точках M и N. Докажите, что $MN = AB$. (*О. А. Пяйве*)

5. Попугай Роза знает все четыре звука своего имени и умеет произносить «слова» длиной от 1 до n звуков. При этом она не умеет произносить два одинаковых звука подряд. Сколько разных «слов» может сказать Роза? Запишите ответ в замкнутой форме (без многоточий и знаков суммирования). (*О. С. Третьякова*)

6. В окружность вписаны три различных остроугольных треугольника (общих вершин у треугольников нет). Докажите, что можно выбрать по одной вершине из каждого треугольника так, чтобы три выбранные точки образовали треугольник, у которого все углы не превышают 90 градусов. (*Л. С. Корешкова*)

7. Паша и Варя играют в такую игру. Каждый игрок своим ходом отмечает на плоскости точку, пока не будут отмечены 2025 точек (начинает и заканчивает игру Паша). После этого Варя должна заплатить Паше столько рублей, сколько вершин имеет выпуклая оболочка полученного множества точек. Для какого максимального N у Паши существует стратегия, позволяющая получить не менее N рублей при любой игре Вари?
   Выпуклая оболочка конечного множества точек — это наименьший по включению многоугольник, содержащий их. Справа показано множество из 9 точек и его выпуклая оболочка — четырёхугольник. (*А. А. Теслер*)



Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2025-2026 учебный год. Отборочный этап

Задачи для 11 класса

Работы сдаются в электронном виде (например, в виде сканов или doc-файлов с текстом), подробности на странице formulo.org/ru/olymp/2025-math-ru/.

Последний срок сдачи — **5 ноября 2025 в 23:59:59 по UTC** (т. е. 6 ноября в 02:59:59 по московскому времени).

Работа должна быть сделана самостоятельно. В большинстве задач нужны не только ответы, но и полные обоснования. В работе не должно быть личных данных участника, то есть **подписывать работу не следует**.

---

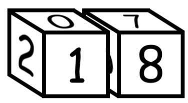
1. Все десять цифр разбили на пары и в каждой вычислили разность (вычитая из большей цифры меньшую). Какой наибольшей степени двойки может равняться произведение всех этих разностей? (*С. П. Павлов*)

2. В окружность ω вписан шестиугольник $ABCDEF$, в котором $AB = BC = CD$. Отрезок BE пересекает CF и DF в точках G и H соответственно, а отрезок AE пересекает CF и BF в точках J и K соответственно. Оказалось, что прямые GK и HJ пересекаются в точке L, лежащей на ω, а также пересекают эту окружность в точках M и N. Докажите, что $MN = AB$. (*О. А. Пяйве*)

3. Один и тот же прямоугольник является сечением двух разных кубов. Каково максимально возможное отношение объёмов этих кубов? (*А. А. Теслер*)

4. В каждой клетке таблицы 4×2025 стоит натуральное число. При этом все числа различны, но суммы во всех строках одинаковы и во всех столбцах тоже одинаковы. Какова минимально возможная сумма чисел в таблице? (*А. А. Теслер*)

5. Если в волшебный автомат ввести натуральное число $n > 1$, то он строит клетчатый квадрат $n \times n$, удаляет из него одну клетку и рисует такие фигуры до тех пор, пока их суммарная площадь не станет равна площади какого-нибудь клетчатого квадрата. Сторону этого нового квадрата автомат возвращает обратно. Например, по карточке с цифрой 5 автомат строит квадрат 5×5 без одной клетки, повторяет его 6 раз (получается 144 клетки, что равно 12^2) и возвращает число 12. Всего автомат работал 10 раз. Может ли количество цифр в числе на последней получившейся карточке быть в 1024 раза больше, чем на изначальной? (*П. Д. Муленко, А. А. Теслер*)

6. Павел Дмитриевич владеет заводом по производству сувенирных календарей. Календарь изготавливается из двух кубиков и наклеек с цифрами: надо наклеить на каждую грань обоих кубиков по наклейке так, чтобы с их помощью можно было сложить любой день месяца (то есть любое число от 01 до 31; на рисунке представлен пример числа 18). Завод гордится тем, что каждое его изделие отличается от других. Сколько всего различных календарей может выпустить завод?


Два календаря считаются одинаковыми, если для каждого кубика из первого календаря есть такой же кубик во втором. В свою очередь, два кубика одинаковы, если можно поставить их рядом так, чтобы с каждой из шести сторон они выглядели одинаково, то есть на них были одинаковые наклейки в одинаковом положении. Наклейки с цифрами 0 и 8 имеют центр симметрии, остальные — нет. (*М. В. Карлукова*)

7. Паша и Варя играют в такую игру. Каждый игрок своим ходом отмечает на плоскости точку, пока не будут отмечены 2025 точек (начинает и заканчивает игру Паша). После этого Варя должна заплатить Паше столько рублей, сколько вершин имеет выпуклая оболочка полученного множества точек. Для какого максимального N у Паши существует стратегия, позволяющая получить не менее N рублей при любой игре Вари?
Выпуклая оболочка конечного множества точек — это наименьший по включению многоугольник, содержащий их. Справа показано множество из 9 точек и его выпуклая оболочка — четырёхугольник. (*А. А. Теслер*)