Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2024-2025 учебный год. Заключительный этап

Решения задач для 5 класса

Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.
Оценка в 1–3 балла означает, что задача в целом не решена, но есть существенные продвижения; оценка в 4–6 баллов — задача в целом решена, но есть существенные недостатки.
Для некоторых задач есть частные критерии, указанные ниже.

---

1. Учитель предложил шестерым своим ученикам сыграть в следующую игру: каждый из них по очереди пишет на доске ненулевую цифру, которая отличается от всех ранее написанных и на которую делится произведение всех ранее написанных цифр. Первый ученик ставит первую цифру по своему усмотрению. Выигрывает тот, кто последним сможет сделать ход.

   Как первому ученику можно ходить, чтобы обеспечить себе победу? Найдите все варианты и докажите, что другие не подходят. (*С. П. Павлов, П. Д. Муленко*)

   Ответ: 1, 6.

   Решение. Очевидно, первый ученик может написать цифру 1, так как тогда больше никто не сможет походить.

   В ином случае ему надо написать такую цифру, чтобы после можно было написать ещё 6 цифр. Это не может быть 2, 3, 5 или 7, так как они простые, и после них удастся написать только 1. Это не может быть 4 или 8, так как после них получится написать только 1, 2 и вторую из этой пары цифр (например, $4 \to 2 \to 8 \to 1$). По той же причине не подходит цифра 9, после которой получится написать только 1 и 3.

   Остаётся цифра 6, написав которую, первый ученик сможет походить ещё раз — сразу можно написать 1, 2 и 3; появление цифры 3 разрешает написать 9 ($3 \cdot 6 \vdots 9$), а появление цифры 2 позволяет написать 4 и 8 ($6 \cdot 2 \vdots 4$, $6 \cdot 4 \vdots 8$). Таким образом, после цифры 6 на доске появятся цифры 1, 2, 3, 4, 8, 9 в каком-то порядке, последнюю из которых (не по порядку, но по количеству) и напишет первый игрок. Более того, другие цифры (5 и 7) не смогут быть написаны, то есть второй ход первого игрока окажется последним.

   Критерии. Предъявлена цифра 1 и больше ничего — 0 баллов.

   Предъявлена только цифра 6 и больше ничего — 1 балл.

   Предъявлены обе цифры (1, 6) и больше ничего — 2 балла.

   Предъявлены только цифры без объяснения, причём кроме 1 и 6 есть посторонние — 0 баллов.

   В целом верное решение, но забыта цифра 1 как второй вариант — не более 6 баллов.

   Забыта цифра 6 как второй вариант — не более 4 баллов.

   При наличии объяснения в ответ попали посторонние цифры — не более 3 баллов.

2. Олеся нарисовала на доске 6 точек, соединила некоторые из них отрезками, и рядом с каждой точкой написала количество отрезков, которые из этой точки выходят. После этого она сообщила 5 утверждений:

   (a) Только у одной точки стоит цифра 4.

(b) Цифра 2 написана ровно у двух точек.
(c) Тройка встречается ровно один раз.
(d) Только у одной точки стоит 0.
(e) Половина написанных цифр — двойки.

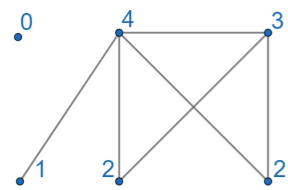
Какие числа могла написать Олеся, если ровно одно из утверждений неверно? Укажите все варианты, объясните, почему возможны только они, а также подтвердите каждый вариант примером. (*П. Д. Муленко*)

Ответ: 0, 1, 2, 2, 3, 4.

Решение. Утверждения (b) и (e) друг другу противоречат. При этом, если ложно утверждение (b), то нам даны все шесть чисел Олеси (0, 2, 2, 2, 3, 4), но тогда сумма этих чисел должна быть равна удвоенному количеству отрезков, а в данном случае она нечётна.

Значит, ложно утверждение (e), и нам известны пять чисел Олеси: 4, 3, 2, 2, 0. Из того же рассуждения про чётность суммы этих чисел, последнее число должно быть нечётным. Оно не может быть равно 5, так как тогда соответствующая точка должна быть соединена со всеми остальными, но среди точек также присутствует изолированная (то есть не соединённая ни с кем). Более того, это последнее число не может быть равно 3, так как тогда Олеся дважды написала бы число 3, что противоречит утверждению (c).

Таким образом, это число может равняться только 1, и единственный возможный полный набор чисел выглядит так: 4, 3, 2, 2, 1, 0.



Критерии. Указан верный набор чисел — 1 балл.

Предъявлен верный пример — +1 балл.

Показано, что утверждения b и e противоречат друг другу и сделан вывод, что ложно одно из них — +1 балл.

Доказано, что случай с ложным утверждением b невозможен — +2 балла.

Показано, что в оставшемся случае неизвестное написанное число не может быть 5 — +1 балл.

Показано, что в оставшемся случае неизвестное написанное число не может быть 3 — +1 балл.

3. На прямой отметили 4 точки и измерили длины всех возможных отрезков с вершинами в этих точках. Оказалось, что длина отрезка между средними точками равна 4 см, а сумма всех длин равна 31 см. Найдите длину самого большого отрезка из измеренных. (*П. Д. Муленко*)

Ответ: 9 см.

Решение. Назовём точки слева направо A, B, C, D; также обозначим длину отрезка между двумя левыми точками за x, а между двумя правыми точками за y:

$$A \quad \longleftarrow x \longrightarrow \quad B \quad \longleftarrow 4 \longrightarrow \quad C \quad \longleftarrow y \longrightarrow \quad D.$$

Тогда общая сумма длин всех 6 отрезков будет равна

$$\begin{aligned} &AB + BC + CD + AC + BD + AD = \\ &\qquad = x + 4 + y + (x+4) + (4+y) + (x+4+y) = \\ &\qquad\qquad = 3x + 4 \cdot 4 + 3y = 31, \end{aligned}$$

откуда $3x + 3y = 15$ см или $x + y = 5$ см, а тогда длина самого большого отрезка между крайними точками AD равна $x + 4 + y = 5 + 4 = 9$ см.

Критерии. Только ответ — 1 балл.

Приведён ответ с примером, но без решения — 3 балла.

Не учтено, что AD — тоже отрезок (ищется максимум между AB, BC и CD) — не более 3 баллов.

4. Найдите количество семизначных чисел, кратных 12, в записи которых используются только единицы и двойки, причём никакие две двойки не стоят рядом. (*Л. С. Корешкова*)

Ответ: 5.

Решение. Чтобы число делилось на $12 = 3 \cdot 4$, оно, в том числе, должно оканчиваться двузначным числом, делящимся на 4. Из цифр 1 и 2 можно составить только одно такое двузначное число (а именно 12).

Значит, две последние цифры числа обязательно 12. При этом всё число должно делиться ещё и на 3, то есть сумма цифр должна быть кратна 3. Последние две цифры в сумме равны 3, значит, первые 5 в сумме должны делиться на 3.

Пять цифр 1 или 2 в сумме могут быть равны любому числу от $1 \cdot 5 = 5$ до $2 \cdot 5 = 10$, значит, нам подойдут суммы в $6 = 1 + 1 + 1 + 1 + 2$ и $9 = 2 + 2 + 2 + 2 + 1$. Второй случай не подходит, так как двойки будут стоять рядом, а первый даёт 5 возможных чисел в зависимости от расположения двойки.

Критерии. Обосновано, что число оканчивается на 12 — +2 балла.

Не учтено, что двойки не стоят рядом, поэтому не исключен второй случай — не более 4 баллов.

Решение перебором засчитывается целиком, если объяснено, почему рассмотрены все возможные числа (например, числа расставлены в понятном порядке). Если же какие-то числа проверены не были — не более 5 баллов.

5. В равенстве $* + ** + *** = ****$ (сумма однозначного, двузначного и трёхзначного чисел равна четырёхзначному) расставлены вместо звёздочек все 10 цифр по одному разу так, что равенство верно. Чему может быть равно четырёхзначное число? Найдите все варианты и докажите, что других нет. (*С. П. Павлов*)

Ответ: 1026, 1035, 1053, 1062.

Решение. Обозначим цифры всех четырёх чисел буквами: $a + \overline{bc} + \overline{def} = \overline{ghij}$.

Если $d < 9$, то трёхзначное число меньше 900, и сумма чисел в левой части не более $4 + 75 + 896 = 975 < 1000$. Значит, $d = 9$.

Даже если все цифры в левой части равны 9, то $9 + 99 + 999 = 1107$, то есть цифра тысяч в правой части $g = 1$, а тогда цифра сотен $h = 0$:

$$a + \overline{bc} + \overline{9ef} = \overline{10ij}.$$

Вычитая 900 из обеих частей равенства, получаем

$$a + \overline{bc} + \overline{ef} = \overline{1ij}.$$

Теперь можно воспользоваться признаком делимости на 9. Обе части должны давать один и тот же остаток, то есть суммы цифр в левой и правой частях должны давать один и тот же остаток:

$$(a + b + c + e + f) - (1 + i + j) \vdots 9.$$

Более того, если мы сложим левую и правую части, то используем все цифры от 1 до 8, то есть сумма цифр будет равна 36. Таким образом, и разность частей уравнения делится на 9, и их сумма тоже делится на 9. Такое возможно, только если каждая из частей уравнения делится на 9.

$\overline{1ij}$ будет делиться на 9, если $1+i+j=9$ (так как цифра 9 уже занята, сумма 18 недостижима), или $i+j=8$. Так как цифры 0 и 1 тоже заняты, и $i \neq j$, то эти цифры равны или 2 и 6 в произвольном порядке, или 3 и 5 в произвольном порядке. Значит, четырёхзначное число может быть равно 1026, 1035, 1053 и 1062. Каждое из них действительно может стоять в правой части данного равенства, что подтверждается примерами: $3+45+978=1026$, $2+46+987=1035$, $2+64+987=1053$, $3+74+985=1062$.

Критерии. Обосновано, что четырехзначное вылядит как $\overline{10xy}$ — +2 балла.

Замечание о делимости левой и правой частей на 9 — 1 балл.

Каждый найденный ответ — +1 балл.

6. В каждую клетку таблицы 4×4 вписано число так, что для любого числа сумма всех чисел в соседних с ним клетках равна 10. Чему может быть равна сумма всех чисел этой таблицы?

Примечание. Соседними считаются клетки, имеющие общую сторону. (*С. П. Павлов*)

Ответ: 60.

Решение. Выберем 6 клеток таблицы (см. слева) так, что если отметить клетки, соседние с ними, то всё поле будет покрыто один раз (см. в центре; номер клетки показывает, с какой из ранее выбранных она соседствует).

1	2		
			3
			4
6	5		

2	1	2	3
1	2	3	4
6	5	4	3
5	6	5	4

10	10	0	0
0	0	0	10
0	0	0	10
10	10	0	0

В каждой группе клеток с одинаковым номером сумма равна 10, то есть сумма всех чисел в таблице будет равна 60. В качестве примера этой суммы достаточно написать 10 в изначально выбранные шесть клеток и 0 во все остальные клетки (см. справа).

Критерии. Приведен правильный ответ — 1 балл.

Приведен правильный ответ с примером — 2 балла.

Приведено верное решение без примера — 7 баллов.

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2024-2025 учебный год. Заключительный этап

Решения задач для 6 класса

Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.
Оценка в 1–3 балла означает, что задача в целом не решена, но есть существенные продвижения; оценка в 4–6 баллов — задача в целом решена, но есть существенные недостатки.
Для некоторых задач есть частные критерии, указанные ниже.

1. Учитель предложил шестерым своим ученикам сыграть в следующую игру: каждый из них по очереди пишет на доске ненулевую цифру, которая отличается от всех ранее написанных и на которую делится произведение всех ранее написанных цифр. Первый ученик ставит первую цифру по своему усмотрению. Выигрывает тот, кто последним сможет сделать ход.

   Как первому ученику можно ходить, чтобы обеспечить себе победу? Найдите все варианты и докажите, что другие не подходят. (*С. П. Павлов, П. Д. Муленко*)

   Ответ: 1, 6.

   Решение. Очевидно, первый ученик может написать цифру 1, так как тогда больше никто не сможет походить.

   В ином случае ему надо написать такую цифру, чтобы после можно было написать ещё 6 цифр. Это не может быть 2, 3, 5 или 7, так как они простые, и после них удастся написать только 1. Это не может быть 4 или 8, так как после них получится написать только 1, 2 и вторую из этой пары цифр (например, $4 \to 2 \to 8 \to 1$). По той же причине не подходит цифра 9, после которой получится написать только 1 и 3.

   Остаётся цифра 6, написав которую, первый ученик сможет походить ещё раз — сразу можно написать 1, 2 и 3; появление цифры 3 разрешает написать 9 ($3 \cdot 6 \,\vdots\, 9$), а появление цифры 2 позволяет написать 4 и 8 ($6 \cdot 2 \,\vdots\, 4$, $6 \cdot 4 \,\vdots\, 8$). Таким образом, после цифры 6 на доске появятся цифры 1, 2, 3, 4, 8, 9 в каком-то порядке, последнюю из которых (не по порядку, но по количеству) и напишет первый игрок. Более того, другие цифры (5 и 7) не смогут быть написаны, то есть второй ход первого игрока окажется последним.

   Критерии. Предъявлена цифра 1 и больше ничего — 0 баллов.

   Предъявлена только цифра 6 и больше ничего — 1 балл.

   Предъявлены обе цифры (1, 6) и больше ничего — 2 балла.

   Предъявлены только цифры без объяснения, причём кроме 1 и 6 есть посторонние — 0 баллов.

   В целом верное решение, но забыта цифра 1 как второй вариант — не более 6 баллов.

   Забыта цифра 6 как второй вариант — не более 4 баллов.

   При наличии объяснения в ответ попали посторонние цифры — не более 3 баллов.

2. В нашей семье все родились в один и тот же день и месяц, но в разные годы. Мой братик на 14 лет младше меня, а моя сестра на 3 года меня старше. Я родился, когда маме было 27. Папа посчитал наш средний возраст (без учёта себя) и получил 21. Сколько лет

каждому из нас?

Примечание. Средний возраст — это отношение суммы возрастов к количеству человек.

(*П. Д. Муленко*)

Решение. Обозначим возраст героя задачи за x. Тогда возраст его брата равен $x - 14$, его сестры — $x + 3$, а его матери — $x + 27$. Таким образом, сумма их возрастов, делённая на 4, должна быть равна 21:

$$\frac{x + (x - 14) + (x + 3) + (x + 27)}{4} = 21,$$
$$4x + 16 = 21 \cdot 4 = 84,$$
$$x = \frac{84 - 16}{4} = 17.$$

Таким образом, герою задачи — 17 лет, его брату — $17 - 14 = 3$ года, его сестре — $17 + 3 = 20$ лет, и его матери — $17 + 27 = 44$ года.

Критерии. Просто ответ — 2 балла; с проверкой, что он подходит — 3 балла.

Деление не на 4, а на 5 — 3 балла.

3. Учитель попросил своих учеников продемонстрировать свои знания о факториалах.

Отличница Маша хорошо знает натуральные числа, поэтому правильно записала число 100! как произведение всех натуральных чисел от 1 до 100.

Троечник Вова знает только нечётные числа, поэтому записал число 100! как произведение $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 97 \cdot 99$, пропуская все чётные множители.

А хорошист Олежа решил понять, во сколько раз Машино число больше Вовиного, для чего вычислил их частное. Однако Олежа игнорирует нули в конце чисел, считая, что они ничего не значат (иными словами, он как бы «стёр» все нули на концах множителей, написанных ранее ребятами, и сотрёт все нули, которые получатся в конце его собственного произведения).

Какая будет последняя цифра в числе Олежи? (*П. Д. Муленко*)

Ответ: 8.

Решение. Если сравнить числа Маши и Вовы и сократить ту дробь, что Олежа хочет подсчитать, останутся только чётные множители от 2 до 100 включительно. При этом Олежа игнорирует нули в конце числа, поэтому среди чисел у него будут 6 якобы нечётных, так как 10, 30, 50, 70, 90 и 100 он читает как 1, 3, 5, 7, 9 и 1. Произведение этих нечётных чисел равно 945.

Помимо этого, остальные круглые числа (20, 40, 60 и 80) Олежа тоже читает неправильно. Их произведение равно $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 = 384$, и, если это число умножить на произведение нечётных чисел, произведение будет равно $\ldots 80$, и этот ноль Олежа тоже проигнорирует. Теперь в Олежином выражении остались только чётные некруглые множители и один неправильный множитель, оканчивающийся цифрой 8. То есть теперь нам достаточно отслеживать последнюю цифру у всех этих чисел. В каждом десятке есть 4 числа, оканчивающихся чётной ненулевой цифрой, и произведение этих четырёх чисел будет оканчиваться на $\ldots 2 \cdot \ldots 4 \cdot \ldots 6 \cdot \ldots 8 = \ldots 4$. Таких групп по 4 числа — 10, при этом произведение каждой пары этих групп будет оканчиваться на $\ldots 4 \cdot \ldots 4 = \ldots 6$, то есть произведение всех 10 групп чисел тоже будет оканчиваться на 6. Наконец, умножая на последний, неправильный, множитель, получаем последнюю цифру всего Олежиного произведения: $\ldots 6 \cdot \ldots 8 = \ldots 8$.

Критерии. Только ответ — 0 баллов.

Потеряны круглые числа — 2 балла.

4. На прямой в некотором порядке отмечены 4 точки: A, B, C и D. Известно, что $AB : BD = 12 : 5$, $AD : BC = 17 : 15$, $DB : DA = 5 : 17$, $DC : BA = 5 : 3$.
(a) Найдите отношение $BC : CD$.
(b) В каком порядке расположены точки? (*П. Д. Муленко*)

Ответ: (a) $3 : 4$; (b) C, A, B, D (или наоборот).

Решение. $AD : BC = 17 : 15$, и $DA : DB = 17 : 5$, то есть $BD : BC = 5 : 15 = 1 : 3$.
$BC : BD = 3 : 1 = 15 : 5$, и $AB : BD = 12 : 5$, то есть $BC : AB = 15 : 12$.
$BC : AB = 15 : 12$, и $DC : AB = 5 : 3 = 20 : 12$, то есть $BC : CD = 15 : 20 = 3 : 4$.

Теперь расположим точки. Пусть точка A левее точки B (если наоборот, то мы получим такое же расположение, просто в обратном порядке). $AB : BC = 12 : 15$, поэтому обозначим $AB = 12$, $BC = 15$. То есть точка C или расположена правее точки B ($A \to B \to C$), или левее точки A ($C \to A \to B$) так, что $CA = 3$.

Теперь используем отношение $AB : CD = 3 : 5$. Так как $AB = 12$, $CD = 20$. Это даёт 4 возможных расположения точек (по 2 в каждом из описанных выше случаев для первых трёх точек):

(a) $A \leftarrow 7 \rightarrow D \leftarrow 5 \rightarrow B \leftarrow 15 \rightarrow C$,
(b) $A \leftarrow 12 \rightarrow B \leftarrow 15 \rightarrow C \leftarrow 20 \rightarrow D$,
(c) $D \leftarrow 20 \rightarrow C \leftarrow 3 \rightarrow A \leftarrow 12 \rightarrow B$,
(d) $C \leftarrow 3 \rightarrow A \leftarrow 12 \rightarrow B \leftarrow 5 \rightarrow D$.

С учётом условия $AD : BC = 17 : 15$ подходит только последний вариант, то есть точки расположены $C \to A \to B \to D$ или наоборот ($D \to B \to A \to C$).

Критерии. Решён только пункт (a) — 2 балла.

Разобрана часть случаев пункта (b) — не более 3 баллов.

5. Найдите количество 11-значных чисел, кратных 72, в записи которых используются только единицы и двойки. (*Л. С. Корешкова*)

Ответ: 28.

Решение. Чтобы число делилось на $72 = 9 \cdot 8$, оно, в том числе, должно оканчиваться трёхзначным числом, делящимся на 8. Из цифр 1 и 2 можно составить только одно такое число (а именно 112).

Значит, три последние цифры числа обязательно 112. При этом всё число должно делиться ещё и на 9, то есть сумма цифр должна быть кратна 9. Последние три цифры в сумме дают $1 + 1 + 2 = 4$, а остальные могут принимать любые значения от $1 \cdot 8 = 8$ до $2 \cdot 8 = 16$, то есть общая сумма цифр может быть от $8 + 4 = 12$ до $16 + 4 = 20$. В данном диапазоне только 18 делится на 9, значит, сумма всех цифр равна 18, и сумма цифр без последних трёх равна 14.

Такая сумма восьми цифр достигается шестью двойками и двумя единицами. Первую единицу можно поставить на любой из 8 разрядов, вторую — на любой из семи оставшихся, после чего остальные 6 разрядов заполняются двойками. При этом каждую расстановку мы посчитали дважды, поэтому окончательное количество чисел равно $8 \cdot 7 : 2 = 28$.

Критерии. Обосновано, что число заканчивается на 112 — 2 балла.

Определена общая сумма цифр — 2 балла.

В целом верное решение, но неправильно посчитано количество единиц и двоек в первых 14 разрядах — не более 4 баллов.

6. В каждую клетку таблицы 4×4 вписано число так, что для любого числа сумма всех чисел в соседних с ним клетках равна 10. Чему может быть равна сумма всех чисел этой таблицы?

Примечание. Соседними считаются клетки, имеющие общую сторону. (*С. П. Павлов*)

Ответ: 60.

Решение. Выберем 6 клеток таблицы (см. слева) так, что если отметить клетки, соседние с ними, то всё поле будет покрыто один раз (см. в центре; номер клетки показывает, с какой из ранее выбранных она соседствует).

1	2		
			3
			4
6	5		

2	1	2	3
1	2	3	4
6	5	4	3
5	6	5	4

10	10	0	0
0	0	0	10
0	0	0	10
10	10	0	0

В каждой группе клеток с одинаковым номером сумма равна 10, то есть сумма всех чисел в таблице будет равна 60. В качестве примера этой суммы достаточно написать 10 в изначально выбранные шесть клеток и 0 во все остальные клетки (см. справа).

Критерии. Приведен правильный ответ — 1 балл.

Приведен правильный ответ с примером — 2 балла.

Приведено верное решение без примера — 7 баллов.

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2024-2025 учебный год. Заключительный этап

Решения задач для 7 класса

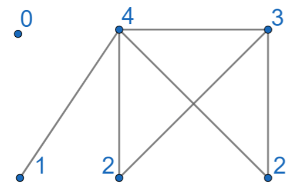
Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.
Оценка в 1–3 балла означает, что задача в целом не решена, но есть существенные продвижения; оценка в 4–6 баллов — задача в целом решена, но есть существенные недостатки.
Для некоторых задач есть частные критерии, указанные ниже.

---

1. Олеся нарисовала на доске 6 точек, соединила некоторые из них отрезками, и рядом с каждой точкой написала количество отрезков, которые из этой точки выходят. После этого она сообщила 5 утверждений:
   (a) Только у одной точки стоит цифра 4.
   (b) Цифра 2 написана ровно у двух точек.
   (c) Тройка встречается ровно один раз.
   (d) Только у одной точки стоит 0.
   (e) Половина написанных цифр — двойки.
   Какие числа могла написать Олеся, если ровно одно из утверждений неверно?
   Укажите все варианты, объясните, почему возможны только они, а также подтвердите каждый вариант примером. (*П. Д. Муленко*)

   Ответ: 0, 1, 2, 2, 3, 4.

   Решение. Утверждения (b) и (e) друг другу противоречат. При этом, если ложно утверждение (b), то нам даны все шесть чисел Олеси (0, 2, 2, 2, 3, 4), но тогда сумма этих чисел должна быть равна удвоенному количеству отрезков, а в данном случае она нечётна.
   Значит, ложно утверждение (e), и нам известны пять чисел Олеси: 4, 3, 2, 2, 0. Из того же рассуждения про чётность суммы этих чисел, последнее число должно быть нечётным. Оно не может быть равно 5, так как тогда соответствующая точка должна быть соединена со всеми остальными, но среди точек также присутствует изолированная (то есть не соединённая ни с кем). Более того, это последнее число не может быть равно 3, так как тогда Олеся дважды написала бы число 3, что противоречит утверждению (c).
   Таким образом, это число может равняться только 1, и единственный возможный полный набор чисел выглядит так: 4, 3, 2, 2, 1, 0.



   Критерии. Указан верный набор чисел — 1 балл.
   Предъявлен верный пример — +1 балл.
   Показано, что утверждения b и e противоречат друг другу и сделан вывод, что ложно одно из них — +1 балл.
   Доказано, что случай с ложным утверждением b невозможен — +2 балла.
   Показано, что в оставшемся случае неизвестное написанное число не может быть 5 — +1 балл.
   Показано, что в оставшемся случае неизвестное написанное число не может быть 3 — +1 балл.

2. Коля выписал все натуральные делители числа 2025^n в некотором порядке и расставил между ними знаки «+» и «−». Потом он вычислил значение полученного выражения. При каких натуральных n у него могло получиться 2026? (*М. В. Карлукова*)

Ответ: это невозможно ни при каких натуральных значениях n.

Решение. $2025 = 45^2$, поэтому $2025^n = (45^2)^n = 45^{2n} = (45^n)^2$. Квадраты натуральных чисел имеют нечётное количество делителей, при этом, поскольку число нечётное, все делители будут нечётными числами.

Таким образом, Коля выпишет нечётное количество нечётных чисел. Сумма их всех равна нечётному числу, а смена знака перед произвольным числом x с плюса на минус меняет сумму на $2x$, то есть на чётное значение. Таким образом, Колин результат всегда будет нечётным числом и не сможет быть равен чётному числу 2026.

Критерии. 1 балл за упоминание того, что все делители нечётны, и ещё 2 балла — за указание, что их нечётное количество.

3. Если в трёхзначном числе зачеркнуть среднюю цифру, то оно станет в 13 раз меньше. Чему может быть равно это трёхзначное число? (*П. Д. Муленко*)

Ответ: 130, 195, 260, 390.

Решение. Представим число как $\overline{abc}$. Тогда после удаления средней цифры оно равно $\overline{ac}$, и оно в 13 раз меньше:

$$\overline{abc} = 13 \cdot \overline{ac}.$$

Распишем оба числа по разрядным слагаемым и упростим выражение:

$$\begin{aligned} 100a + 10b + c &= 13 \cdot (10a + c), \\ 100a + 10b + c &= 130a + 13c, \\ 10b &= 30a + 12c, \\ 5b &= 15a + 6c. \end{aligned}$$

Правая часть равенства явно делится на 3, значит, цифра b может быть равна 3, 6 или 9 (нулю она не может быть равна, так как тогда и две другие цифры числа равны 0). Перебирая все эти случаи, находим 4 подходящих числа:

$\boldsymbol{b = 3}$: $15 = 15a + 6c$, откуда $a = 1$, $c = 0$ (число 130);

$\boldsymbol{b = 6}$: $30 = 15a + 6c$, откуда $a = 2$, $c = 0$ (число 260);

$\boldsymbol{b = 9}$: $45 = 15a + 6c$, откуда $a = 3$, $c = 0$ (число 390), или $a = 1$, $c = 5$ (число 195).

Критерии. Каждый найденный ответ с проверкой при отсутствии решения — $+1$ балл. Каждый потерянный или посторонний ответ при верном ходе решения — -2 балла.

4. Найдите количество 15-значных чисел, кратных 18, в записи которых используются только единицы и двойки, причём никакие две двойки не стоят рядом. (*Л. С. Корешкова*)

Ответ: 66.

Решение. Чтобы число делилось на $18 = 9 \cdot 2$, оно, в том числе, должно быть чётным, то есть оканчиваться на 2. При этом двойки не могут идти подряд, то есть предпоследняя цифра обязательно равна 1.

Число должно делиться ещё и на 9, то есть сумма цифр должна быть кратна 9. Сумма цифр без последних двух может принимать любые значения от $1 \cdot 13 = 13$ до $2 \cdot 13 = 26$, то есть общая сумма цифр может быть от $13 + 3 = 16$ до $26 + 3 = 29$. В данном диапазоне только 18 и 27 делятся на 9, при этом первая сумма достигается тремя двойками и 12-ю единицами, а вторая — тремя единицами и 12-ю двойками.

Второй случай невозможен, так как двойки будут стоять рядом, а в первом необходимо подсчитать количество способов расставить две двойки на 13 первых разрядов (последняя двойка стоит в конце). Первую можно поставить на любое из 13 мест, а вторую — на любое из 12 оставшихся. Каждый способ мы учли дважды, поэтому всего таких чисел $13 \cdot 12 : 2 = 78$, из которых в 12 числах две двойки стоят рядом, поэтому окончательный ответ равен $78 - 12 = 66$.

Критерии. +1б за обоснование последних двух цифр.

-2б за неисключенный второй случай.(когда сумма цифр равна 27)

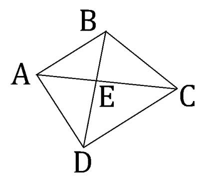
-2б за неисключенные числа с подряд идущими двойками.

В целом верное решение, но неправильно посчитано количество единиц и двоек в первых 13 разрядах — не более 4 баллов.

5. Выпуклый четырёхугольник разрезан диагоналями на четыре треугольника. Три из них оказались равны. Обязательно ли четвёртый им равен? (*А. А. Теслер*)

Ответ: да.

Решение. Обозначим четырёхугольник $ABCD$, а точку пересечения диагоналей — E.



Пусть равны треугольники ABE, BEC и CED, тогда рассмотрим первые два из них.

Если углы $\angle BEA$ и $\angle BEC$ не равны, то, поскольку они смежны, один из них тупой, то есть все три равных треугольника — тупоугольные.

Пусть угол $\angle BEC$ — тупой. Тогда в треугольнике ABE этот угол не может быть между диагоналями (этот угол точно острый, так как смежен тупому углу $\angle BEC$), но и не может быть любым из двух других, так как тогда сторона AB должна быть параллельна одной из диагоналей (что, очевидно, невозможно): если $\angle ABE = \angle BEC$, то $AB \parallel AC$, а если $\angle BAE = \angle BEC$, то $AB \parallel BD$.

Значит, $\angle BEA = \angle BEC = 90°$, а тогда все 4 треугольника, образованные диагоналями, являются прямоугольными. Более того, раз $\triangle ABE = \triangle BEC$, то $AE = EC$, а из равенства треугольников BEC и ECD следует, что $BE = ED$. Это значит, что обе диагонали точкой пересечения поделились пополам, а тогда и четвёртый треугольник AED равен трём другим (а сам четырёхугольник, тем самым, является ромбом).

Критерии. Показано, что в любом ромбе все треугольники равны, и больше никаких рассуждений — 1 балл.

Не объяснено, почему между диагоналями прямой угол — -2б.

6. Барон Мюнхгаузен по секрету рассказал, что 9 марта прошлого года, на праздновании дня рождения всех его детей (коих было трое разного возраста), он подарил каждому ребёнку столько пиастров, сколько тому исполнилось лет. Средняя сумма подарка составила 2 пиастра. Более того, 9 марта этого года, празднуя день рождения всех своих детей, он снова подарил каждому ребёнку столько пиастров, сколько тому исполнилось лет, и средний подарок снова составил 2 пиастра. Сколько лет сегодня каждому из детей барона? (*П. Д. Муленко*)

Ответ: 1, 1, 1, 2, 3, 4.

Решение. Год назад детей было трое, и средний подарок составил 2 пиастра. Значит, сумма возрастов равна $2 \cdot 3 = 6$, при этом было подарено 3 различных количества пиастров, что означает, что детям было 1, 2 и 3 года.

Значит, сейчас им 2, 3 и 4 года, и барон им подарил $2 + 3 + 4 = 9$ пиастров. При этом среднее этих трёх подарков равно $9 : 3 = 3$, а должно быть равно 2. Такое возможно, только если у барона год назад (сразу после праздника) родились новые дети, каждому из которых он сейчас подарил по 1 пиастру.

Пусть их x человек, тогда всего детей у барона $3+x$, и подарил он им $9+x$ пиастров:

$$\frac{9+x}{3+x}=2 \quad \Leftrightarrow \quad 9+x=2(3+x) \quad \Leftrightarrow \quad x=3.$$

Итого, всего детей у барона 6, и сейчас им 1, 1, 1, 2, 3 и 4 года.

Примечание. Если считать, что из трёх старших детей кто-то мог умереть в течение года, то это добавляет ещё 5 возможных наборов возрастов: $(1,1,1,1)$; (2); $(3,1)$; $(2,3,1)$; $(3,4,1,1,1)$.

Критерии. Критерии при авторской трактовке условий:

приведен только ответ — +1 балл;

объяснено, почему исходные возраста детей 1, 2 и 3 года — + 2 балла.

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2024-2025 учебный год. Заключительный этап

Решения задач для 8 класса

Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.
Оценка в 1–3 балла означает, что задача в целом не решена, но есть существенные продвижения; оценка в 4–6 баллов — задача в целом решена, но есть существенные недостатки.
Для некоторых задач есть частные критерии, указанные ниже.

1. Коля выписал все натуральные делители числа 2025^n в некотором порядке и расставил между ними знаки «+» и «−». Потом он вычислил значение полученного выражения. При каких натуральных n у него могло получиться 2026? (*М. В. Карлукова*)

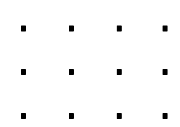
Ответ: это невозможно ни при каких натуральных значениях n.

Решение. $2025 = 45^2$, поэтому $2025^n = (45^2)^n = 45^{2n} = (45^n)^2$. Квадраты натуральных чисел имеют нечётное количество делителей, при этом, поскольку число нечётное, все делители будут нечётными числами.

Таким образом, Коля выпишет нечётное количество нечётных чисел. Сумма их всех равна нечётному числу, а смена знака перед произвольным числом x с плюса на минус меняет сумму на $2x$, то есть на чётное значение. Таким образом, Колин результат всегда будет нечётным числом и не сможет быть равен чётному числу 2026.

Критерии. 1 балл за упоминание того, что все делители нечётны, и ещё 2 балла — за указание, что их нечётное количество.

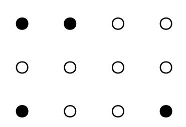
2. На клетчатом листе отмечены 12 точек в виде сетки 3×4. Какое наибольшее количество точек можно выбрать так, чтобы среди расстояний между ними не было равных? (*С. П. Павлов*)



Ответ: 4.

Решение. Будем считать, что расстояние между соседними (по вертикали или горизонтали) точками равно 1. Тогда полный набор возможных расстояний между двумя точками таков: $1, 2, 3, \sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{10}, 2\sqrt{2}, \sqrt{13}$ (8 штук).

Если закрашено 5 точек или более, то всевозможных попарных расстояний между ними не менее $5 \cdot 4/2 = 10$, то есть какие-то из них будут равны. Поэтому можно выбрать не более 4 точек — например, 3 угла и ещё одну точку рядом с одним из углов (см. справа).



Критерии. Оценка — 3 балла, пример — 2 балла. Если из решения (например, из оценки) ясно, что человек владеет теоремой Пифагора, то отдельное обоснование примера не требуется.

3. В нашей семье из 5 человек все родились в один и тот же день и месяц, но в разные годы. Мой братик на 14 лет младше меня, а моя сестра на 3 года меня старше. Я родился, когда маме было 27. Папа посчитал наш средний возраст (без учёта себя) и заявил, что несколько лет назад средний возраст членов семьи (без учёта папы) был такой же, как и сейчас. Найдите все варианты, сколько лет назад так могло быть. (*П. Д. Муленко*)

Ответ: 6 лет назад или 23 года назад.

Решение. Обозначим возраст героя задачи за x. Тогда возраст его брата равен $x - 14$, его сестры — $x + 3$, и его матери — $x + 27$. Таким образом, средний возраст героев равен

$$\frac{x + (x - 14) + (x + 3) + (x + 27)}{4} = \frac{4x + 16}{4} = x + 4.$$

Теперь рассмотрим эту же семью k лет назад. Очевидно, что возраст каждого из членов семьи был меньше на k, но тогда и средний возраст должен был быть меньше на k. Единственная причина, по которой средний возраст мог оказаться таким же, как сейчас, это *меньшее число в знаменателе дроби*, то есть меньшее количество членов семьи. Действительно, если k лет назад младший брат *ещё не родился*, то средний возраст членов семьи запишется как

$$\frac{(x - k) + (x + 3 - k) + (x + 27 - k)}{3} = \frac{3x + 30 - 3k}{3} = x + 10 - k,$$

тем самым 6 лет назад такое могло произойти (при условии, что младший брат младше 6 лет).

По этой же логике такое могло произойти и ещё раньше, когда не родился главный герой задачи (тогда при подсчёте учитываются только мама и сестра):

$$\frac{(x + 3 - k) + (x + 27 - k)}{2} = \frac{2x + 30 - 2k}{2} = x + 15 - k,$$

то есть равенство средних возможно при $k = 11$. Однако, из условия задачи явным образом следует, что главному герою в настоящее время не менее 14 лет (так как брат на 14 лет младше), поэтому 11 лет назад в семье не могло быть только двое членов, не считая отца.

Наконец, остаётся проверить случай, когда не родился ещё ни один из детей — тогда при подсчёте среднего учитывается только возраст матери: $x + 27 - k = x + 4$, откуда $k = 23$. И этот случай возможен даже с учётом ранее найденного совпадения средних возрастов — раз младшему брату не более 6 лет, то главному герою не более 20, а его сестре не более 23 лет.

Критерии. Каждое найденное число из ответа — +2б.

В целом верное решение, но не исключено число 11 — -2б.

4. Найдите количество 15-значных чисел, кратных 18, в записи которых используются только единицы и двойки. (*Л. С. Корешкова*)

Ответ: 455.

Решение. Чтобы число делилось на $18 = 9 \cdot 2$, оно, в том числе, должно быть чётным, то есть оканчиваться на 2. При этом всё число должно делиться ещё и на 9, то есть сумма цифр должна быть кратна 9. Сумма цифр без последней может принимать любые значения от $1 \cdot 14 = 14$ до $2 \cdot 14 = 28$, то есть общая сумма цифр может быть от $14 + 2 = 16$ до $28 + 2 = 30$. В данном диапазоне только 18 и 27 делятся на 9, при этом первая сумма достигается тремя двойками и 12-ю единицами, а вторая — тремя единицами и 12-ю двойками.

В первом случае надо выбрать 2 разряда из 14, где будут стоять две двойки (последняя точно стоит в конце), что можно сделать $14 \cdot 13 : 2 = 91$ способом. Во втором случае надо выбрать 3 разряда из 14, где будут стоять единицы, что можно сделать $14 \cdot 13 \cdot 12 : 3! = 364$ способами. Значит, всего подоходящих чисел $91 + 364 = 455$.

Критерии. Разобран только один случай из двух — не более 3 баллов.

Не учтено, что на последнем месте обязательно двойка — не более 5 баллов.

Неверно посчитано количество единиц и двоек — не более 4 баллов.

5. Катя участвует в викторине: ей надо выбрать из нескольких ответов на вопрос один верный. Если она угадает, то получит денежный приз. Изначально Катя планировала выбирать ответ случайным образом.

   Однако, подумав над вариантом А, Катя осознала, что он точно неверный, и можно выбрать случайным образом из остальных вариантов. В результате математическое ожидание Катиного выигрыша увеличилось на 600 рублей.

   Подумав над вариантом В, Катя отбросила и его, в результате математическое ожидание выигрыша увеличилось ещё на 840 рублей. Сколько рублей составляет приз?

   Примечание. Математическое ожидание — это среднестатистический выигрыш, то есть, в данном случае, величина приза, умноженная на вероятность его получения.

   (*А. А. Теслер*)

Ответ: 25200.

Решение. Обозначим величину приза за S, а количество вариантов ответа за n. Так как Катя выбирает ответ случайным образом, вероятность угадать равна $1/n$, то есть изначальное математическое ожидание равно S/n.

После исключения варианта А вероятность угадать увеличилась до $\frac{1}{n-1}$, что привело к увеличению ожидаемого выигрыша:

$$\frac{S}{n-1} = \frac{S}{n} + 600. \tag{1}$$

Аналогично, исключив вариант В, Катя ещё увеличила вероятность угадать до $\frac{1}{n-2}$:

$$\frac{S}{n-2} = \frac{S}{n-1} + 840. \tag{2}$$

Выразим из первого уравнения S:

$$\frac{S}{n-1} - \frac{S}{n} = 600 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{S}{n(n-1)} = 600 \quad \Leftrightarrow \quad S = 600n(n-1), \tag{3}$$

и подставим во второе уравнение:

$$\frac{S}{n-2} - \frac{S}{n-1} = 840 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{S}{(n-1)(n-2)} = 840 \quad \Leftrightarrow \quad 600n(n-1) = 840(n-1)(n-2).$$

Поскольку $n > 1$ (из условия задачи следует, что изначально Катя выбирает как минимум из трёх вариантов ответа), то $n - 1 \neq 0$:

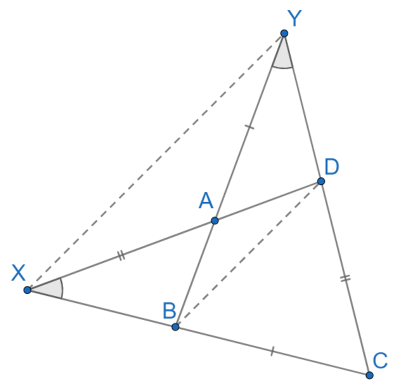
$$600n = 840(n-2) \quad \Leftrightarrow \quad 840 \cdot 2 = 840n - 600n \quad \Leftrightarrow \quad 1680 = 240n \quad \Leftrightarrow \quad n = 7.$$

Таким образом, изначально у Кати было 7 вариантов ответа, а сумма выигрыша (из третьего уравнения) равна $S = 600 \cdot 7 \cdot 6 = 25200$.

Критерии. Верно составлена система уравнений, но нет продвижений в её решении — 2 балла.

6. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ продлили стороны DA за точку A и CB за точку B до пересечения в точке X, а стороны AB за точку A и CD за точку D до пересечения в точке Y. Оказалось, что углы X и Y равны, $XA = CD$, $YA = CB$. Докажите, что $XBDY$ — равнобедренная трапеция. (*П. Д. Муленко*)

Решение. Сперва докажем, что $XBDY$ является трапецией, то есть что $BD \parallel XY$.



Для этого рассмотрим треугольники YAB и XCD: $\angle X = \angle Y$, $\angle C$ — общий. То есть $\triangle YAB \sim \triangle XCD$:

$$\frac{BC}{CD} = \frac{YC}{XC}\left(= \frac{YB}{XD}\right).$$

При этом по условию нам известно, что $BC : CD = YA : XA$, то есть

$$\frac{XA}{YA} = \frac{BC}{CD} = \frac{YC}{XC},$$

то есть треугольники CBD и CXY тоже подобны, причём $\angle CDB = \angle CYX$ и $\angle CBD = \angle CXY$, откуда $BD \parallel XY$.

Теперь докажем, что $XBDY$ — равнобедренная трапеция, то есть что $YD = BX$.

С одной стороны, $\angle X = \angle Y$ по условию, и $\angle XAB = \angle YAD$, как вертикальные, то есть $\triangle YAD \sim \triangle XAB$, откуда следует, что $AD : AB = AY : AX$. С другой стороны, $\angle XYA = \angle ABD$ и $\angle YXA = \angle ADB$ как накрест лежащие, то есть $\triangle XAY \sim \triangle BAD$, откуда следует, что $AD : AB = AX : AY$.

Таким образом, $AY : AX = AX : AY$, то есть $AX = AY$, откуда треугольники XAB и AYD равны, и $XB = YD$.

Критерии. Доказана только одна из частей задачи ($BD \parallel XY$ или $BX = DY$) — 3 балла.

Задача решена в предположении, что $XA = CB$ и $YA = CD$ (вместо $XA = CD$ и $YA = CB$) — не более 5 баллов.

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2024-2025 учебный год. Заключительный этап

Решения задач для 9 класса

Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.
Оценка в 1–3 балла означает, что задача в целом не решена, но есть существенные продвижения; оценка в 4–6 баллов — задача в целом решена, но есть существенные недостатки.
Для некоторых задач есть частные критерии, указанные ниже.

---

1. Катя участвует в викторине: ей надо выбрать из нескольких ответов на вопрос один верный. Если она угадает, то получит денежный приз. Изначально Катя планировала выбирать ответ случайным образом.

   Однако, подумав над вариантом A, Катя осознала, что он точно неверный, и можно выбрать случайным образом из остальных вариантов. В результате математическое ожидание Катиного выигрыша увеличилось на 600 рублей.

   Подумав над вариантом B, Катя отбросила и его, в результате математическое ожидание выигрыша увеличилось ещё на 840 рублей. Сколько рублей составляет приз?

   Примечание. Математическое ожидание — это среднестатистический выигрыш, то есть, в данном случае, величина приза, умноженная на вероятность его получения.

   (*А. А. Теслер*)

   Ответ: 25200.

   Решение. Обозначим величину приза за S, а количество вариантов ответа за n. Так как Катя выбирает ответ случайным образом, вероятность угадать равна $1/n$, то есть изначальное математическое ожидание равно S/n.

   После исключения варианта A вероятность угадать увеличилась до $\frac{1}{n-1}$, что привело к увеличению ожидаемого выигрыша:
$$\frac{S}{n-1} = \frac{S}{n} + 600. \qquad (1)$$
   Аналогично, исключив вариант B, Катя ещё увеличила вероятность угадать до $\frac{1}{n-2}$:
$$\frac{S}{n-2} = \frac{S}{n-1} + 840. \qquad (2)$$
   Выразим из первого уравнения S:
$$\frac{S}{n-1} - \frac{S}{n} = 600 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{S}{n(n-1)} = 600 \quad \Leftrightarrow \quad S = 600n(n-1), \qquad (3)$$
   и подставим во второе уравнение:
$$\frac{S}{n-2} - \frac{S}{n-1} = 840 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{S}{(n-1)(n-2)} = 840 \quad \Leftrightarrow \quad 600n(n-1) = 840(n-1)(n-2).$$
   Поскольку $n > 1$ (из условия задачи следует, что изначально Катя выбирает как минимум из трёх вариантов ответа), то $n - 1 \neq 0$:
$$600n = 840(n-2) \quad \Leftrightarrow \quad 840 \cdot 2 = 840n - 600n \quad \Leftrightarrow \quad 1680 = 240n \quad \Leftrightarrow \quad n = 7.$$
   Таким образом, изначально у Кати было 7 вариантов ответа, а сумма выигрыша (из третьего уравнения) равна $S = 600 \cdot 7 \cdot 6 = 25200$.

   Критерии. Верно составлена система уравнений, но нет продвижений в её решении — 2 балла.

2. Существует ли такое трёхзначное число n, что $n(n+1) + 2025$ — точный квадрат?

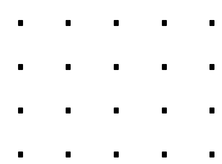
(*С. П. Павлов*)

Ответ: да, 152 ($152 \cdot 153 + 2025 = 159^2$) и 287 ($287 \cdot 288 + 2025 = 291^2$).

Решение. $n(n+1) + 2025 = (n+k)^2$, откуда $n = \dfrac{2025 - k^2}{2k - 1} = \dfrac{(45-k)(45+k)}{2k-1}$. При $k = 1$ получается 2025 (четырёхзначное). Дальнейший перебор даёт целые ответы 287 и 152 при $k = 4$ и $k = 7$ соответственно, а при $k > 10$ уже получается $n < 100$.

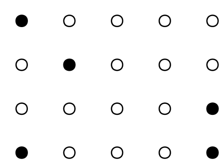
Критерии. Достаточно одного примера с доказательством того, что получается квадрат (или с указанием, квадрат какого числа получается). Если нет ни доказательства, ни указания, то штраф 1 балл.

3. На клетчатом листе отмечены 20 точек в виде сетки 4×5. Какое наибольшее количество точек можно выбрать так, чтобы среди расстояний между ними не было равных? (*С. П. Павлов*)



Ответ: 5.

Решение. Будем считать, что расстояние между соседними (по вертикали или горизонтали) точками равно 1. Тогда полный набор возможных расстояний между двумя точками таков: $1, 2, 3, 4, \sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{8}, \sqrt{10}, \sqrt{13}, \sqrt{17}, \sqrt{18}, \sqrt{20}, \sqrt{25}$ (13 штук).



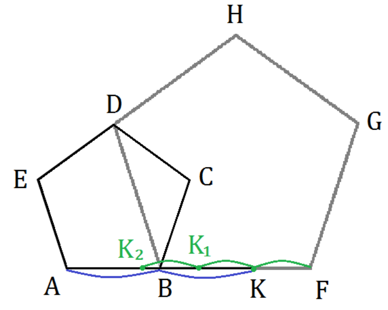
Если выбрано 6 точек или более, то всевозможных попарных расстояний между ними не менее $6 \cdot 5/2 = 15$, то есть какие-то из них будут равны. Поэтому можно закрасить не более 5 точек — например, как изображено на рисунке справа.

Критерии. Оценка — 3 балла, пример — 2 балла. Если из решения (например, из оценки) ясно, что человек владеет теоремой Пифагора, то отдельное обоснование примера не требуется.

4. На плоскости отмечены две точки A и B. Андрей играет в такую игру: на каждом шаге он выбирает пару уже отмеченных точек, мысленно строит правильный пятиугольник на них как на соседних вершинах, после чего отмечает на плоскости три остальные его вершины. Может ли Андрей на каком-то шаге отметить точку строго внутри отрезка AB? (*Е. Ю. Воронецкий*)

Ответ: да.

Решение. Для начала заметим, что, имея вектор $\overrightarrow{OP}$, можно отложить вектор $\overrightarrow{OP'}$ той же длины, такой что $\angle POP' = 108^\circ$ (то есть можно повернуть данный отрезок на 108° вокруг одного из его концов). Проделав это 5 раз, мы повернём отрезок на 180°.



Теперь вернёмся к условию задачи. По точкам A и B отметим вершины пятиугольника $ABCDE$, а потом пятиугольника $BFGHD$. Получится, что $\overrightarrow{BF} = \varphi\overrightarrow{AB}$, где $\varphi \in (1; 2)$ — отношение диагонали пятиугольника к его стороне (действительно, в треугольнике BDC, образованном двумя сторонами и диагональю, диагональ меньше суммы двух сторон, но лежит против наибольшего угла; на самом деле $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, но для нашего решения это неважно).

Также можно (см. первый абзац решения) отложить $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{AB}$. Получим $\overrightarrow{FK}$, который короче, чем AB, поэтому, если отложить его несколько раз ($\overrightarrow{FK} = \overrightarrow{KK_1} = \overrightarrow{K_1K_2} = \ldots$), какая-то из точек K_i окажется на отрезке AB.

Критерии. 2 балла, если научились строить какую-нибудь точку на *прямой* AB (кроме A и B).

5. Назовём число *примечательным*, если в его записи используются только две разных цифры. Сколько существует 11-значных примечательных чисел, кратных 225?
(*Л. С. Корешкова*)

Ответ: 524 числа.

Решение. Делимость на 225 равносильна делимости на 25 и на 9, то есть сумма цифр делится на 9, а последние цифры равны 00, 25, 50 или 75.

Если последние цифры 00, то пусть вторая используемая цифра (кроме нуля) равна a. Если $a = 9$, то любая комбинация цифр, в которой число не начинается с нуля, подойдёт, получается $2^8 = 256$ вариантов. Если $a = 3$ или $a = 6$, то a встречается 3, 6 или 9 раз (один из них — в начале числа), получается для каждой из них $C_8^2 + C_8^5 + C_8^8 = 28 + 56 + 1 = 85$ вариантов. Если a не кратно 3, то все 9 цифр должны равняться a. Получается $256 + 2 \cdot 85 + 6 = 432$ варианта.

Если последние цифры 25, то остальные 9 цифр равны 2 или 5, и сумма цифр составляет $7 + 9 \cdot 2 + 3k$, где k — количество пятёрок; это число не делится на 9.

Если последние цифры 50, то остальные 9 цифр равны 5 или 0, и сумма цифр составляет $5 + 5k$, где k — количество пятёрок; это число кратно 9 при $k = 8$, то есть 8 пятёрок и 1 ноль; поскольку 0 не может быть в начале, то таких чисел 8.

Если последние цифры 75, то остальные 9 цифр равны 5 или 7, и сумма цифр составляет $12 + 9 \cdot 5 + 2k$, где k — количество пятёрок; это число кратно 9 при $k = 3$, что даёт $C_9^3 = 84$ варианта.

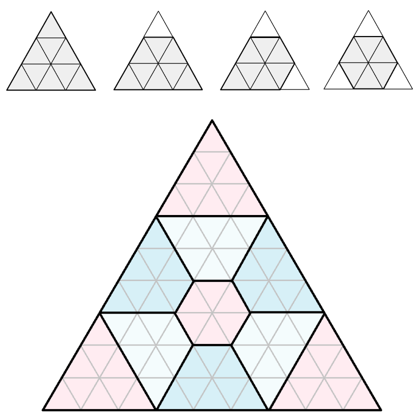
Таким образом, всего существует $432 + 8 + 84 = 524$ примечательных 11-значных числа.

Критерии. 1 балл за переход к делимости на 25 и 9. Ещё один балл за последние две цифры. Ещё 2 балла за верный разбор случая с 00 и по одному баллу за каждый другой случай.

6. Назовём *экономичностью* многоугольника отношение его площади к периметру. Можно ли разрезать равносторонний треугольник с экономичностью $3E$ на 10 частей, каждая из которых имеет экономичность E?
(*А. А. Теслер*)

Ответ: да.

Решение. Заметим сначала, что если уменьшить линейные размеры втрое, экономичность также уменьшается втрое, поэтому треугольник можно разбить на 9 треугольников нужной экономичности. Однако нам нужно 10 частей, а не 9. Оказывается, что если отрезать у треугольника со стороной a «уголок» со стороной $\frac{a}{3}$, то и периметр, и площадь уменьшатся на 1/9 от исходного значения, и экономичность не изменится. Аналогично можно отрезать не один уголок, а два или три (см. рисунок): и периметр, и площадь уменьшатся на 2/9 и 3/9 соответственно. Поэтому задача сводится к тому, чтобы треугольник, состоящий из 81 треугольника, разрезать на 10 фигур указанного вида. Пример такого разрезания показан ниже.



Критерии. 1 балл — за указание, что треугольник со втрое меньшей стороной имеет экономичность E. Ещё 1 балл, если найдена хотя бы одна из остальных подходящих фигур.

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2024-2025 учебный год. Заключительный этап

Решения задач для 10 класса

Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.
Оценка в 1–3 балла означает, что задача в целом не решена, но есть существенные продвижения; оценка в 4–6 баллов — задача в целом решена, но есть существенные недостатки.
Для некоторых задач есть частные критерии, указанные ниже.

---

1. У n-значного числа первые две его цифры различаются на 1, вторая и третья — на 2, ..., предпоследняя и последняя — на $n-1$, последняя и первая — на n. При каком наибольшем n такое возможно? (*С. П. Павлов*)
Ответ: $n = 8$.

Решение. Так как разница между цифрами не превосходит 9, то $n \leqslant 9$. Если бы такое девятизначное число существовало, то оно бы начиналось на 9 и заканчивалось на 0, причём если выписать чётности его цифр, получится последовательность нччннччнн из условия на соседние цифры — противоречие. Восьмизначное число с указанным свойством существует: 12 473 829 (на самом деле есть ещё два: 87 526 170 и 98 637 281).

Критерии. Пример — 3 балла, оценка — 2 балла за $n \leqslant 9$ и ещё 2 балла за $n \neq 9$.

2. Катя участвует в викторине: ей надо выбрать из нескольких ответов на вопрос один верный. Если она угадает, то получит приз, составляющий некое фиксированное количество рублей, а если назовёт неверный ответ, то потеряет некую (тоже фиксированную) сумму. Изначально Катя планировала выбирать ответ случайным образом, что приносило ей в среднем 100 рублей. Однако, подумав над вариантом А, Катя осознала, что он точно неверный, и можно выбрать случайным образом из остальных вариантов. В результате математическое ожидание Катиного выигрыша удвоилось. Подумав над вариантом В, Катя отбросила и его, в результате математическое ожидание выигрыша снова удвоилось. Сколько рублей составляет приз?
Примечание. Математическое ожидание — это среднестатистический выигрыш, то есть, в данном случае, величина приза, умноженная на вероятность его получения, минус величина штрафа, умноженная на вероятность его получения. (*А. А. Теслер*)

Ответ: 1000.

Решение. Пусть P — величина приза, S — величина штрафа (по модулю), n — количество вариатов ответ. Тогда можно составить систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{P}{n} - \dfrac{S(n-1)}{n} = 100, \\ \dfrac{P}{n-1} - \dfrac{S(n-2)}{n-1} = 200, \\ \dfrac{P}{n-2} - \dfrac{S(n-3)}{n-2} = 400, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{P+S}{n} = 100 + S, & (1) \\ \dfrac{P+S}{n-1} = 200 + S, & (2) \\ \dfrac{P+S}{n-2} = 400 + S. & (3) \end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения первое и из третьего уравнения второе, получаем:

$$\begin{cases} (P+S)\left(\dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}\right) = 100 \\ (P+S)\left(\dfrac{1}{n-2} - \dfrac{1}{n-1}\right) = 200 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n(n-1)} : \frac{1}{(n-1)(n-2)} = 1:2.$$

Значит, $n(n-1) = 2(n-1)(n-2)$, и поскольку $n > 1$ (у Кати изначально было как минимум три возможных варианта ответа), то $n = 4$. Подставляя в (1) и (2), получаем: $P + S = 400 + 4S = 600 + 3S$, откуда $S = 200$, $P = 1000$.

Критерии. Верно составлена система уравнений, но нет продвижений в её решении — 2 балла.

3. Дана фраза:

   $\square\square\square$–гранная пирамида имеет:
   - столько же вершин, сколько $\square\square\square$–гранная призма,
   - столько же рёбер, сколько $\square\square\square$–гранная призма,
   - и столько же граней, сколько $\square\square\square$–гранная призма.

   Сколько способов вписать в каждый квадрат по цифре так, чтобы получить верное утверждение? Напомним, что натуральное число не может начинаться с нуля. (*А. А. Теслер*)

   Решение. Заметим, что n-гранная пирамида имеет n вершин и $2(n-1)$ рёбер, а n-гранная призма — $2(n-2)$ вершины и $3(n-2)$ ребра. Таким образом, если вместо пропусков подставить по порядку трёхзначные числа x, y, z, w, то $x = 2(y-2)$, $2(x-1) = 3(z-2)$ и $x = w$. Тогда $2(2(y-2)-1) = 3(z-2)$, или же $4(y-1) = 3z$. Следовательно, можно сделать замену $y = 3k+1$, $z = 4k$, $x = w = 6k-2$, где k — целое число. Трёхзначность исходных чисел равносильна тому, что $33 \leqslant k \leqslant 166$.

   Ответ: $166 - 33 + 1 = 134$ варианта.

   Критерии. Если слово «n-гранная» всюду трактуется как «n-угольная» (ответ тоже равен 134), оценка не снижается.

   Если участник путает вершины, рёбра и грани, то не больше 2 баллов.

   За правильно составленную систему уравнений даётся 2 балла.

4. Дан треугольник ABC. Точки A_1, B_1, C_1 — середины сторон BC, AC, AB соответственно, а A_2, B_2, C_2 — точки, в которых эти стороны касаются вписанной окружности. Пусть отрезок B_2C_2 имеет с окружностью, вписанной в $\triangle AB_1C_1$, a общих точек; A_2C_2 с окружностью, вписанной в $\triangle BA_1C_1$ — b общих точек; A_2B_2 с окружностью, вписанной в $\triangle CA_1B_1$ — c общих точек. Найдите максимальное значение числа $a+b+c$. (*Ю. Э. Нагуманов*)

   Ответ: 4.

   Решение. Заметим, что в равностороннем треугольнике значение — 3. Если он не равносторонний, то пусть наименьшая сторона — AC. Для удобства введём обозначения $x = BC$, $y = CA$, $z = AB$. Сделаем гомотетию в B с коэффициентом 2, тогда вписанная окружность $\triangle BA_1C_1$ перейдёт во вписанную окружность $\triangle ABC$. Пусть A_2 переходит в A_3, а C_2 в C_3. $BA_2 = BC_2 = \frac{x+z-y}{2}$. Значит, $BA_3 = BC_3 = x+z-y$. Так как $y \leqslant \min(x,z)$, то $BA_3 \geqslant x$ и $BC_3 \geqslant z$, причём одно из неравенств строгое (иначе треугольник окажется равносторонним). Значит, A_3C_3 не пересекает вписанную окружность, так что $b = 0$ и $a + c \leqslant 4$.

   В качестве примера можно взять треугольник с длинами сторон $x = z > y$. Для него очевидно, что $a = c = 2$: отрезки B_2C_2 и B_2A_2 исходят из вершины $B_2 = B_1$ треугольников $\triangle AB_1C_1$ и $\triangle CA_1B_1$, причём их вторые концы лежат строго внутри противолежащих сторон, так как $BA_2 = BC_2 > \frac{x}{2}$.

   Критерии. За оценку даётся 4 балла, за пример — 3. Если в оценке не рассмотрены равнобедренные или равносторонние треугольники, снимается балл.

5. Коля выписал каждый натуральный делитель числа 2025^n по одному разу, после чего покрасил некоторые из них в красный цвет, а остальные — в синий. При этом он действовал так, чтобы разность между суммой всех красных делителей и суммой всех синих

делителей оказалась минимально возможным (при данном n) положительным числом. Какими могут оказаться две последние цифры этой разности? (Найдите все варианты и докажите, что других нет.) (*М. В. Карлукова*)

Ответ: 1, 09, 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89, 99.

Решение. Если $n = 0$, то получается разность 1, так что дальше будем рассматривать случай $n > 0$. Сумма всех делителей числа 2025 равна $(1+3+3^2+...+3^{4n})(1+5+5^2+...+5^{2n}) = (1+120(1+81+\ldots+81^{n-1}))(1+30(1+25+\ldots+25^{n-1}) \equiv 1+120n+30(6+5n) \equiv 81+70n \pmod{100}$. Теперь заметим, что исходя из формулы суммы геометрической прогрессии, сумма делителей меньше, чем $(3^{4n}\cdot 3/2)\cdot(5^{2n}\cdot 5/4) = 2025^n \cdot 15/8$. Значит, максимальный делитель (само число 2025^n) превосходит сумму остальных, поэтому для получения минимального положительного результата перед ним должен стоять плюс, а перед остальными делителями минус. Получается, что ответ имеет вид $50 - 81 - 70n \bmod 100 \in \{9, 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89, 99\}$. Заметим, разность больше $2025/8 > 9$, то есть по крайней мере двузначная.

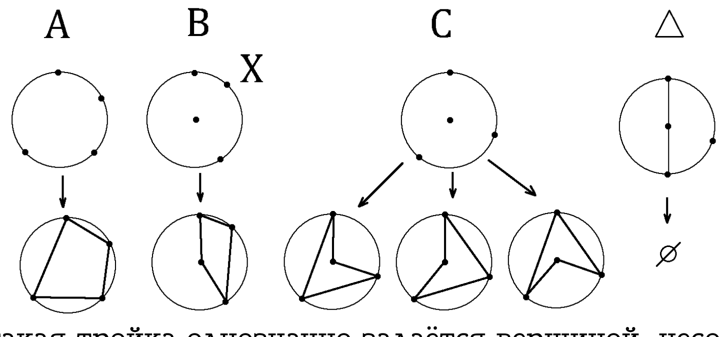
Критерии. За доказательство того, что 2025^n больше суммы остальных делителей, даётся 2 балла. Ещё 5 ставится за нахождение ответа, когда в один из цветов покрашено только 2025^n. Если не рассмотрен случай $n = 0$ или не доказано, что разность не может быть равна 9, баллы не снимаются.

6. На плоскости отмечены вершины и центр правильного 100-угольника. Сколько существует четырёхугольников с вершинами в отмеченных точках?

Примечание. Четырёхугольник — часть плоскости, ограниченная замкнутой несамопересекающейся четырёхзвенной ломаной. (*А. А. Теслер*)

Решение. Заметим, что ответ — это $A+B+3C$, где A — количество четвёрок вершин 100-угольника, B — это количество троек вершин 100-угольника, которые вместе с центром образуют выпуклый четырёхугольник, а C — количество троек вершин 100-угольника, для которых центр лежит строго внутри образованного ими треугольника (тогда через них и центр можно провести 3 невыпуклых четырёхугольника).

Ясно, что $A = C_{100}^4$ и $B + C = C_{100}^3 - \Delta$, где $\Delta = 50 \cdot 98$ — количество способов выбрать пару противоположных вершин 100-угольника и ещё одну вершину (такие способы порождают треугольник, а не четырёхугольник).



Наконец, $B = 100 \cdot C_{49}^2$, так как любая такая тройка однозначно задаётся вершиной, несоседней с центром 100-угольника (на рисунке X), а также расстояниями от этой вершины до двух других.

Итого есть $C_{100}^4 + 3C_{100}^3 - 3\cdot 50\cdot 98 - 2\cdot 100\cdot C_{49}^2 = 4\,156\,425$ вариантов.

Критерии. Ответ C_{101}^4 — 0 баллов. 1 балл, если замечено, что надо вычесть случаи, когда три точки лежат на одной прямой, и ещё 1 балл, если их количество верно посчитано, что привело к ответу $A + B + C = 4\,078\,025$ (возможно, недосчитанному).

Также +1 балл за указание, что точки в невыпуклом положении дают больше одного четырёхугольника. Остальные баллы даются за правильный подсчёт. Если получен правильный ответ в виде арифметического выражения, но не посчитан до конца, снимается 1 балл.

Если в целом решение верное, но считаются также вырожденные четырёхугольники с вершинами в центре, паре противоположных вершин и ещё в одной точке, баллы не снимаются (ответом будет 4 161 325).

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2024-2025 учебный год. Заключительный этап

Решения задач для 11 класса

Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.
Оценка в 1–3 балла означает, что задача в целом не решена, но есть существенные продвижения; оценка в 4–6 баллов — задача в целом решена, но есть существенные недостатки.
Для некоторых задач есть частные критерии, указанные ниже.

1. Катя участвует в викторине: ей надо выбрать из нескольких ответов на вопрос один верный. Если она угадает, то получит приз, составляющий некое фиксированное количество рублей, а если назовёт неверный ответ, то потеряет некую (тоже фиксированную) сумму. Изначально Катя планировала выбирать ответ случайным образом, что приносило ей в среднем 100 рублей. Однако, подумав над вариантом A, Катя осознала, что он точно неверный, и можно выбрать случайным образом из остальных вариантов. В результате математическое ожидание Катиного выигрыша удвоилось. Подумав над вариантом B, Катя отбросила и его, в результате математическое ожидание выигрыша снова удвоилось. Сколько рублей составляет приз?

   Примечание. Математическое ожидание — это среднестатистический выигрыш, то есть, в данном случае, величина приза, умноженная на вероятность его получения, минус величина штрафа, умноженная на вероятность его получения. (*А. А. Теслер*)

   Ответ: 1000.

   Решение. Пусть P — величина приза, S — величина штрафа (по модулю), n — количество вариатов ответ. Тогда можно составить систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{P}{n} - \dfrac{S(n-1)}{n} = 100, \\ \dfrac{P}{n-1} - \dfrac{S(n-2)}{n-1} = 200, \\ \dfrac{P}{n-2} - \dfrac{S(n-3)}{n-2} = 400, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{P+S}{n} = 100 + S, & (1) \\ \dfrac{P+S}{n-1} = 200 + S, & (2) \\ \dfrac{P+S}{n-2} = 400 + S. & (3) \end{cases}$$

   Вычитая из второго уравнения первое и из третьего уравнения второе, получаем:

$$\begin{cases} (P+S)\left(\dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}\right) = 100 \\ (P+S)\left(\dfrac{1}{n-2} - \dfrac{1}{n-1}\right) = 200 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n(n-1)} : \frac{1}{(n-1)(n-2)} = 1 : 2.$$

   Значит, $n(n-1) = 2(n-1)(n-2)$, и поскольку $n > 1$ (у Кати изначально было как минимум три возможных варианта ответа), то $n = 4$. Подставляя в (1) и (2), получаем: $P + S = 400 + 4S = 600 + 3S$, откуда $S = 200$, $P = 1000$.

   Критерии. Верно составлена система уравнений, но нет продвижений в её решении — 2 балла.

2. Существует ли 2025-значное натуральное число без нулей в десятичной записи, которое увеличивается в 4 раза, если записать его задом наперёд? (*С. П. Павлов*)

Ответ: Да, существует — например, $21\underbrace{99\ldots99}_{2021\text{ девятка}}78$.

Решение. Легко проверить, что указанное число подходит: оно равно $22 \cdot 10^{2023} - 22$, а при записи задом наперёд — $8799\ldots9912 = 88 \cdot 10^{2023} - 88$.

Опишем возможный метод поиска такого числа. Обозначим его $\overline{abc\ldots xyz}$.

Тогда $\overline{abc\ldots xyz} \cdot 4 = \overline{zyx\ldots cba}$. Значит, $z \geqslant 4$, $\overline{abc} < 250$, то есть $a \in \{1; 2\}$. В то же время $\overline{ba}$ кратно 4, значит, a чётно. Поэтому $a = 2$. Также $\overline{yz} \cdot 4$ кончается на 2 при $z \in \{3; 8\}$; поскольку $z \geqslant 4$, то $z = 8$.

Далее из равенства $\overline{\ldots y8} \cdot 4 = \overline{\ldots b2}$ по цифре y можно однозначно определить цифру b, которая к тому же должна быть нечётная и меньше 5. Получаются варианты $23\ldots08 \cdot 4 = 80\cdots32$ и $21\ldots78 \cdot 4 = 87\cdots12$, из которых подходит только второй (в первом $\overline{ab\ldots yz} \cdot 4 > \overline{zy\ldots ba}$).

Аналогичным образом пытаясь найти c и x, получаем два «перспективных» варианта: $217\ldots178$ и $219\ldots978$. Развивая второй вариант (устроенный более простым образом), можно понять, что все числа вида $2199\ldots9978$ подходят.

Примечание. Существуют и другие такие числа, например, число, состоящее из 405 блоков вида 21978 (и другие похожие примеры).

Критерии. Для полного решения достаточно приведённого примера без каких-либо пояснений. Если найдены одна или две цифры с краёв, ставится 1 или 2 балла.

3. Решите уравнение в целых числах: $x = x^2 + xy + y^2 + 2y + 2$. (*П. Д. Муленко*)

Ответ: $(1, -1)$, $(1, -2)$, $(2, -2)$.

Решение. Перенесём x вправо: $x^2 + xy + y^2 + 2y + 2 - x = 0$.

Домножим на два и переставим слагаемые: $-2x + 2x^2 + 2xy + 2y^2 + 4y + 4 = 0$.

Добавим к обеим частям уравнения 1 и разделим оба квадрата на два слагаемых: $1 - 2x + x^2 + x^2 + 2xy + y^2 + y^2 + 4y + 4 = 1$.

Таким образом, каждая тройка слагаемых является полным квадратом: $(x-1)^2 + (x+y)^2 + (y+2)^2 = 1$.

Так как x и y — целые, каждое из слагаемых в левой части является целым неотрицательным числом. Тогда их сумма может быть равна 1 только если одно из слагаемых равно 1, а два остальных равны 0.

В случае $x = 1$, $x = -y$ получаем $y + 2 = 1$, подходит. Если $x = 1$, $y = -2$, то $x + y = -1$, тоже подходит. Наконец, при $y = -2$, $x = -y$ получаем $x - 1 = 1$, оно тоже подходит.

Критерии. Если доказана конечность количества решений (например, уравнение сведено к виду «сумма квадратов равна константе»), то ставится 2 балла. Если получено равенство $(1-x)^2 + (x+y)^2 + (y+2)^2 = 1$, то даётся ещё 1 балл. За угаданные решения (без обоснования, что других нет) не больше 2 баллов.

4. Назовём *экономичностью* многогранника отношение его объёма к площади поверхности. Можно ли разрезать правильный тетраэдр экономичностью E на 5 частей, сумма экономичностей которых равна $3E$? (*А. А. Теслер*)

Ответ: да.

Решение. Отрежем от каждой вершины тетраэдра по маленькому тетраэдру с ребром вдвое меньшим, чем у исходного. У каждого маленького тетраэдра объём в 8 раз меньше, чем у исходного, а площадь поверхности — только в 4 раза, поэтому экономичность каждого из них равна $E/2$. В середине останется октаэдр, у которого и объём, и площадь поверхности вдвое меньше, чем у исходного тетраэдра, поэтому его экономичность равна E. Действительно, поверхность октаэдра состоит из 8 треугольников, а исходного тетраэдра — из $4 \cdot 4 = 16$ таких же треугольников. А объём октаэдра равен $V - 4 \cdot \frac{V}{8} = \frac{V}{2}$, где V — объём тетраэдра.

Итого сумма экономичностей равна $E + 4 \cdot \frac{E}{2} = 3E$.

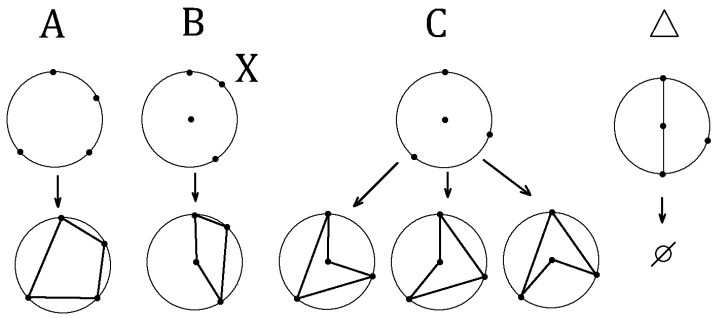
Критерии. 1 балл за указание, что экономичность тетраэдра с вдвое меньшим ребром равна $\frac{E}{2}$ или что экономичность пропорциональна коэффициенту подобия.

5. На плоскости отмечены вершины и центр правильного 100-угольника. Сколько существует четырёхугольников с вершинами в отмеченных точках?

Примечание. Четырёхугольник — часть плоскости, ограниченная замкнутой несамопересекающейся четырёхзвенной ломаной. (*А. А. Теслер*)

Решение. Заметим, что ответ — это $A+B+3C$, где A — количество четвёрок вершин 100-угольника, B — это количество троек вершин 100-угольника, которые вместе с центром образуют выпуклый четырёхугольник, а C — количество троек вершин 100-угольника, для которых центр лежит строго внутри образованного ими треугольника (тогда через них и центр можно провести 3 невыпуклых четырёхугольника).

Ясно, что $A = C_{100}^4$ и $B + C = C_{100}^3 - \Delta$, где $\Delta = 50 \cdot 98$ — количество способов выбрать пару противоположных вершин 100-угольника и ещё одну вершину (такие способы порождают треугольник, а не четырёхугольник).



Наконец, $B = 100 \cdot C_{49}^2$, так как любая такая тройка однозначно задаётся вершиной, несоседней с центром 100-угольника (на рисунке X), а также расстояниями от этой вершины до двух других.

Итого есть $C_{100}^4 + 3C_{100}^3 - 3 \cdot 50 \cdot 98 - 2 \cdot 100 \cdot C_{49}^2 = 4\,156\,425$ вариантов.

Критерии. Ответ C_{101}^4 — 0 баллов. 1 балл, если замечено, что надо вычесть случаи, когда три точки лежат на одной прямой, и ещё 1 балл, если их количество верно посчитано, что привело к ответу $A + B + C = 4\,078\,025$ (возможно, недосчитанному).

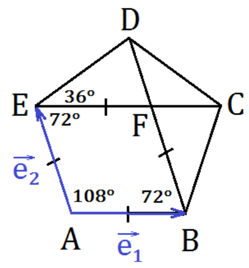
Также +1 балл за указание, что точки в невыпуклом положении дают больше одного четырёхугольника. Остальные баллы даются за правильный подсчёт. Если получен правильный ответ в виде арифметического выражения, но не посчитан до конца, снимается 1 балл.

Если в целом решение верное, но считаются также вырожденные четырёхугольники с вершинами в центре, паре противоположных вершин и ещё в одной точке, баллы не снимаются (ответом будет 4 161 325).

6. На плоскости отмечены две точки A и B. Андрей играет в такую игру: на каждом шаге он выбирает пару уже отмеченных точек, мысленно строит правильный пятиугольник на них как на соседних вершинах, после чего отмечает на плоскости три остальные его вершины. Сможет ли Андрей отметить середину отрезка AB? (*Е. Ю. Воронецкий*)

Ответ: нет.

Решение. Пусть $ABCDE$ — правильный пятиугольник, $\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{AE}$ и $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ — отношение диагонали правильного пятиугольника к его стороне (положительный корень уравнения $\varphi^2 = \varphi + 1$, также известен как золотое сечение).



Gри повороте на 108° по направлению от $\overrightarrow{e_1}$ в $\overrightarrow{e_2}$ вектор $\overrightarrow{e_1}$ переходит в $\overrightarrow{e_2}$, а $\overrightarrow{e_2}$ (см. рисунок) — в вектор
$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FE} = (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BF}) + \overrightarrow{BA} = (-\varphi+1)\cdot\overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_1} = -\overrightarrow{e_1} + (1-\varphi)\overrightarrow{e_2}$.
Поскольку поворот сохраняет сложение векторов и умножение на число, то вектор вида $a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2}$ перейдёт в вектор
$a\overrightarrow{e_2} + b(-\overrightarrow{e_1} + (1-\varphi)\overrightarrow{e_2}) = -b\overrightarrow{e_1} + (a + (1-\varphi)b)\overrightarrow{e_2}$.

Будем называть вектор хорошим, если он имеет вид $(p+q\varphi)\overrightarrow{e_1} + (r+s\varphi)\overrightarrow{e_2}$ для некоторых $p, q, r, s \in \mathbb{Z}$. Ясно, что сумма или разность хороших векторов — тоже хороший вектор. Заметим, что при повороте на 108° хороший вектор переходит в хороший:
$(p + q\varphi)\overrightarrow{e_1} + (r + s\varphi)\overrightarrow{e_2}$ переходит в $(-r - s\varphi)\overrightarrow{e_1} + (p + q\varphi + r + s\varphi - r\varphi - s\varphi^2)\overrightarrow{e_2} = (-r - s\varphi)\overrightarrow{e_1} + ((p + r - s) + (q - r)\varphi)\,\overrightarrow{e_2}$, поскольку $\varphi^2 = \varphi + 1$.
Теперь ясно, что если в правильном пятиугольнике $P_1P_2P_3P_4P_5$ вектор $\overrightarrow{P_1P_2}$ хороший, то $\overrightarrow{P_2P_3}, \overrightarrow{P_3P_4}, \overrightarrow{P_4P_5}, \overrightarrow{P_5P_1}$ хорошие (ведь они получаются из $\overrightarrow{P_1P_2}$ одним или несколькими поворотами на 108°). Значит, и все векторы вида $\overrightarrow{P_iP_j}$ хорошие (как суммы хороших векторов).

Легко видеть, что для всякой получаемой в процессе игры точки X вектор $\overrightarrow{AX}$ — хороший. Докажем это по индукции. Действительно, изначальные векторы $\overrightarrow{AA}$ и $\overrightarrow{AB}$ хорошие. Если же X — вершина пятиугольника, построенного по точкам K и L, то $\overrightarrow{AK}$ и $\overrightarrow{AL}$ хорошие, поэтому их разность $\overrightarrow{KL}$ хорошая, вектор $\overrightarrow{KX}$ хороший (см. предыдущий абзац), а значит, $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KX}$ хороший.

С другой стороны, пусть M — середина AB. Если её можно построить, то вектор $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{e_1}$ хороший, то есть равен $(p+q\varphi)\overrightarrow{e_1}$ (коэффициент при $\overrightarrow{e_2}$ обязан обнуляться, так как векторы $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{e_2}$ не коллинеарны). Однако если $q = 0$, то $p + q\varphi$ целое, а если $q \neq 0$, то иррациональное, то есть $p + q\varphi \neq \frac{1}{2}$.