Международная физическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2023–2024 учебный год. Заключительный этап

Решения задач для 8 класса

8.1. (7 баллов) Первая точка движется вдоль оси Y прямоугольной системы координат со скоростью $v_1 = 4$ м/с, а вторая точка вдоль оси X. Расстояние между точками неизменно и равно 5 м.

[1] Определить модуль скорости второй точки в тот момент, когда первая находится на расстоянии 3 м от начала координат.

(Ю.В. Максимачев, Т.Н. Стрелкова, Б.К. Галякевич)

Ответ: 3 м/с.

Решение. По условию задачи первая точка движется вдоль оси Y с постоянной скоростью. Вторая точка движется вдоль оси X с переменным ускорением, что является следствием неизменности расстояния между точками в процессе движения.
Если в момент начала отсчета времени вторая точка находится в начале координат, то, спустя время t, её координата определяется выражением

$$x(t) = [L^2 - (L - v_1 t)^2]^{1/2}$$

Таким образом, зависимость x– координаты второй точки от времени - не является линейной (движение с постоянной скоростью) или квадратичной зависимостью (движение с постоянным ускорением), т. е. вторая точка движется с переменным ускорением.
Характерным приемом, упрощающим решение задач на совместное движение, является переход к анализу движения только одного тела, но в подвижной системе отсчета. Свяжем неподвижную систему отсчета с первым телом (тем самым мы «останавливаем» первое тело).
Тогда второе тело движется со скоростью $\vec{v}_2$ относительно системы отсчета, связанной с осью X, которая, в свою очередь, движется со скоростью - $\vec{v}_1$ относительно первого тела.
Скорость второго тела $\vec{v}_{21}$ относительно системы отсчета, в которой первое тело покоится, определяется законом сложения скоростей:

$$\vec{v}_{21} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$

Траекторией движения второго тела в подвижной системе отсчета является окружность, т. к. расстояние между телами по условию задачи неизменно. Отсюда следует, что вектор $\vec{v}_{21}$ направлен перпендикулярно радиусу окружности, т. е. отрезку L, соединяющему точки (рис. 2). Из подобия треугольников скоростей и перемещений, имеем

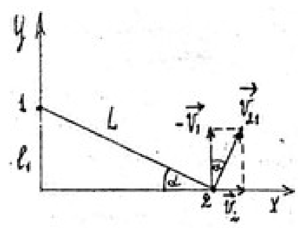

Рис. 2

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{l_1}{\sqrt{L^2 - l_1^2}}$$

отсюда вытекает выражение для скорости второй точки:

$$v_2 = \frac{v_1 l_1}{\sqrt{L^2 - l_1^2}} = \frac{4 * 3}{\sqrt{25 - 9}} = 3 \text{ м/с}$$

8.2. (7 баллов) У Ивана есть мерный стаканчик с делениями и градусник. Он взял стакан холодной воды ($T_0 = 10^o$ C), вылил из него 50 см^3 этой воды, а затем налил столько же горячей воды постоянной (но точно неизвестной) температуры из бойлера. В результате температура воды в стакане стала $T_1 = 37^o$ C. Затем он снова вылил из стакана 50 см^3 воды и добавил столько же из бойлера. Потом измерил температуру и получил $T_2 = 53^o$ C.

[2] Определите объем воды в стакане и температуру воды в бойлере.

(Минарский А.М.)

Ответ: $V = 150$ см^3, $T = 91^o\ C$.

Решение. Пусть теплоемкость воды c, неизвестная масса воды в стакане M, количество выливавшейся и доливавшейся $m = 50$ г , неизвестная температура воды в бойлере T.
Запишем уравнение теплового баланса для однократного выливания и доливания:

$$c(M-m)(T_1-T_0) = cm(T-T_1)$$

Или

$$cM(T_1-T_0) = cm(T-T_0)$$

откуда

$$T_1 = T_0 + \frac{m}{M}(T-T_0) \qquad (1)$$

Аналогично для второго смешивания:

$$T_2 = T_1 + \frac{m}{M}(T-T_1) \qquad (2)$$

Вычитая из уравнения (2) уравнение (1), получим:

$$T_2 - T_1 = T_1 - T_0 + \frac{m}{M}(T_0-T_1) \qquad (3)$$

Преобразуя, находим

$$M = m(T_0-T_1)/(T_0+T_2-2T_1)$$

Подставляя численные значения температур T_0, T_1 и T_2, получаем для массы воды в стакане: $M = 3m = 150$ г,откуда объем этой воды $V = 150$ см^3. Из уравнения (1), получим

$$T = T_0 + \frac{M}{m}(T_1-T_0)$$

и зная уже, что $\frac{M}{m} = 3$, получаем $T = 91^o\ C$.
Итак, объем воды в стакане $V = 150$ см^3,температура воды в бойлере $T = 91^o\ C$.

8.3. (12 баллов) Лыжные соревнования проходят на круговой трассе. При этом лыжники делятся на две группы: профессионалы и любители. Профессионалы стартуют одновременно, проходят по трассе 3 круга и имеют скорости от 24 до 27 км/час. Любители стартуют одновременно на полчаса позже, проходят 2 круга и имеют скорости от 12 до 20 км/час. Известно, что каждый профессионал во время гонки обогнал каждого любителя, но ровно один раз.

[3] Чему может быть равна длина одного круга трассы?

Замечание. По возможности укажите и минимальное, и максимальное значение длины круга.

(*Минарский А.М.*)

Ответ: 18<L<20 (км).
Решение. Пусть длина одного круга трассы равна L, скорость некоторого профессионала u, любителя v, а до момента их встречи прошло время t. Тогда, если любитель стартовал на время $T = 0{,}5$ ч позже, то он ехал время $t - T$, при этом профессионал прошел на круг больше:

$$ut = v(t-T) + L \qquad (1)$$

Однако профессионал догнал любителя во время гонки, то есть прошел меньше 3 кругов:

$$ut < 3L \qquad (2)$$

Перенося в уравнении (1) vt влево и поделив неравенство (2) на преобразованное уравнение (1) получим:

$$\frac{u}{u-v} < \frac{3L}{L-vT} \qquad \text{или} \qquad L(3v-2u) < uvT$$

Подставляя сюда T = 0,5 ч, наибольшую скорость любителя v=20 км/ч и наименьшую – профессионала u=24 км/ч , чтобы получить наименьшую верхнюю границу длины круга, получаем:

$$L < 20(\text{км}). \qquad (3)$$

Получим условие, что профессионал не смог обогнать любителя 2 раза, то есть на 2 круга. Если напротив это произошло, то

$$ut = v(t-T) + 2L \qquad (4)$$

и необходимо по условию задачи, чтобы в момент такого возможного обгона он уже прошел больше 3 кругов гонки:

$$ut > 3L \qquad (5)$$

Перенося в уравнении (4) vt влево и поделив неравенство (5) на преобразованное уравнение (4) получим:

$$\frac{u}{u-v} > \frac{3L}{2L-vT} \qquad \text{или} \qquad L(3v-u) > uvT$$

Подставляем сюда T = 0,5 ч, наименьшую скорость любителя v=12 км/ч и наибольшую для профессионала u=27 км/ч, чтобы получить наибольшую нижнюю границу длины круга, и получаем:

$$L > 18(\text{км}). \qquad (6)$$

Объединяя неравенства (3) и (6) получаем итоговый результат

$$18 < L < 20(\text{км})$$

8.4. (10 баллов) В вертикальный цилиндрический сосуд радиусом 10 см, частично заполненный водой, опускают шар, плотность которого в 2 раза меньше плотности воды.

[4] На сколько миллиметров поднимется уровень воды после опускания шара, если радиус шара равен 3,0 см?

Замечание. Учитывать что, объем шара равен $\frac{4}{3}\pi R_{\text{ш}}^3$, площадь круга равна $\pi R_{\text{кр}}^2$.

(*Ю.В. Максимачев, Т.Н. Стрелкова, Б.К. Галякевич*)

Ответ: 1,8 мм.

Решение. Плотность шара по условию задачи меньше плотности воды, т.е. шар не тонет в воде, и условие равновесия шара имеет вид

$$\vec{F}_A + m\vec{g} = 0 \qquad (1)$$

или

$$\rho_{\text{в}} g V_{\text{п.ч.}} = \rho g V \qquad (2)$$

где $\vec{F}_A$ – сила Архимеда, действующая на шар; V – объем шара и $V_{\text{п.ч.}}$ – объем части шара, погруженной в воду при равновесии.

Используя условие $\rho = \frac{1}{2}\rho_{\text{в}}$, легко найти, что $V_{\text{п.ч.}} = \frac{1}{2}V$.

Дальнейший ход рассуждений носит чисто геометрический характер.

Объем воды, вытесняемой шаром, равен

$$V' = V_{\text{п.ч.}} - V_1 \qquad (3)$$

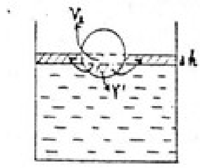

Рис. 3

где V_1 – объем части шара, расположенный между плоскостями, соответствующими первоначальному и конечному положению уровня воды в цилиндре, отстоящими друг от друга на искомую величину Δh (рис. 3).
С другой стороны, этот объем равен тому объему жидкости, который находится выше уровня воды в цилиндре до опускания шара:

$$V' = S\Delta h - V_1 = \pi R^2 \Delta h - V_1 \qquad (4)$$

где R – радиус цилиндра. Приравнивая правые части выражений (3) и (4), получаем

$$\pi R^2 \Delta h = \frac{1}{2} V = \frac{2}{3}\pi R^3 \qquad (5)$$

откуда

$$\Delta h = \frac{2r^3}{3R^2} = \frac{2 * 27 * 10^{-6}}{3 * 0.010} = 1{,}8 * 10^{-4} \text{ м} = 1{,}8 \text{ мм}$$

8.5. (4 балла) Спортсмен-тяжелоатлет поднял штангу массой 200 кг от уровня плеч (170 см над уровнем пола) до высоты 210 см над уровнем пола.
[5] На сколько изменилась при этом потенциальная энергия штанги?

Замечание. Принимаем значение ускорения свободного падения равным 10,0 м/с^2.

(*Г.Н.Степанова*)

Ответ: $\Delta E_{\text{пот}} = 800$ Дж.
Решение. Воспользуемся формулой для работы в поле силы тяжести и подставим числовые значения

$$\Delta E_{\text{пот}} = mg\Delta h = 200 * 10{,}0 * 0{,}400 = 0{,}800 * 10^3 = 800\text{Дж}$$

Международная физическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2023–2024 учебный год. Заключительный этап

Решения задач для 9 класса

9.1. (7 баллов) Открытая с двух концов трубка длиной 76 см до половины погружена в ртуть. Атмосферное давление 76 см. рт. столба.

[1] Определить в сантиметрах длину столбика ртути в трубке, если, плотно закрыв верхнее отверстие, вынуть трубку из ртути.

Замечание. Температура постоянна.

(*Ю.В. Максимачев, Т.Н. Стрелкова, Б.К. Галякевич*)

Ответ: 22 см.

Решение. При вытаскивании трубки с плотно закрытым верхним отверстием часть ртути выльется из трубки, а часть останется. Это связано с тем, что при выливании ртути давление воздуха, изолированного между верхним закрытым концом трубки и поверхностью оставшейся ртути, с ростом объема уменьшается, и разность сил давления атмосферы и воздуха в трубке уравновешивает силу тяжести, действующую на оставшийся в трубке столбик ртути. Условие равновесия столбика ртути имеет вид:

$$\vec{F_0} + m\vec{g} + \vec{F_1} = 0 \qquad (1)$$

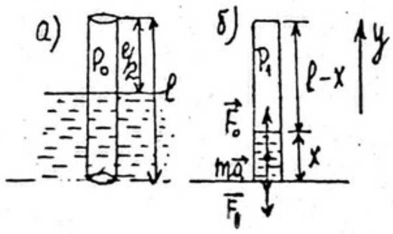

Рис. 4

где $\vec{F_0}$ – сила атмосферного давления, $\vec{F_1}$ – сила давления воздуха в трубке и $m\vec{g}$ – сила тяжести, действующая на оставшуюся в трубке ртуть (рис. 4).

Спроецируем уравнение равновесия (1) на вертикальную ось

$$p_0 S - mg - p_1 S = 0 \qquad (2)$$

где p_0 – атмосферное давление, p_1 – давление воздуха в трубке, S – площадь поперечного сечения трубки. При плотно закрытом верхнем отверстии масса воздуха в трубке остается постоянной, т. е. процесс расширения воздуха является изотермическим. На основании закона Бойля – Мариотта:

$$p_0 \frac{l}{2} S = p_1 (l - x) S$$

отсюда $p_1 = \frac{p_0 l}{2(l-x)}$ (3)

где x – длина столбика ртути, оставшегося в трубке. Массу столбика ртути в трубке выражаем через плотность ртути и её объем:

$$m = \rho_{\text{рт}} x S \qquad (4)$$

Атмосферное давление задано в условии задачи в см. рт. ст., т. е. соответствует гидростатическому давлению столба ртути высотой $l_0 = 76$ см ($l_0 = l$),

$$p_0 = \rho_{\text{рт}} g l_0 = \rho_{\text{рт}} g l \qquad (5)$$

Подставляя полученные выражения (3), (4), (5) для p_1, m, p_0 в условие равновесия (2) столбика ртути, получаем

$$l - x - \frac{l^2}{2(l - x)} = 0 \qquad (6)$$

Это уравнение сводится к квадратному уравнению относительно неизвестной высоты x столбика ртути в трубке:

$$2x^2 - 4lx + l^2 = 0 \qquad (7)$$

Решая квадратное уравнение (7), получаем

$$x_1 = \frac{l(2-\sqrt{2})}{2}; x_2 = \frac{l(2+\sqrt{2})}{2} \qquad (8)$$

Второй корень уравнения (8) не имеет физического смысла, т.к. $x_2 > l$. В результате для искомой длины столбика ртути, оставшейся в трубке, имеем

$$x = \frac{l(2-\sqrt{2})}{2} = \frac{0.76 * (2-\sqrt{2})}{2} = 22 \text{ см}$$

9.2. (7 баллов) Тело брошено со скоростью 10 м/с под углом 45^o к длинной наклонной плоскости, образующей с горизонтом 60^o.

[2] Определите величину максимального удаления тела от наклонной плоскости. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Замечание. Считать, что ускорение свободного падения равно 10 м/с^2.

(*Ю.В. Максимачев, Т.Н. Стрелкова, Б.К. Галякевич*)

Ответ: 5 м.

Решение. Выберем систему отсчета следующим образом: начало O в точке броска, ось X вдоль наклонной плоскости и ось Y перпендикулярно плоскости.

При отсутствии сопротивления воздуха тело движется с ускорением свободного падения $\vec{g}$, и к моменту времени t вектор перемещения $\Delta\vec{r}$ определяется выражением:

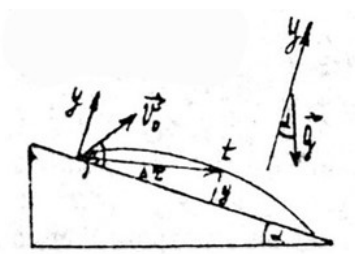

Рис. 5

$$\Delta\vec{r} = \vec{v}_0 t + \vec{g}\frac{t^2}{2}$$

Ситуация, соответствующая условию задачи, проиллюстрирована на рисунке.

Спроектировав вектор перемещения $\Delta\vec{r}$ на ось y, получаем выражение для удаления тела от наклонной плоскости к моменту времени t:

$$y = v_0 \sin\beta t - \frac{g\cos\alpha t^2}{2} \qquad (1)$$

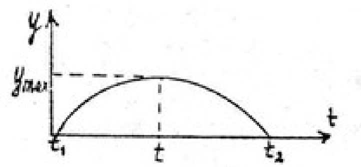

Рис. 6

Таким образом, задача сводится к определению максимального значения функции y, являющейся квадратичной функцией времени. Построим зависимость удаления y от времени t (рис. 6). Корнями функции являются значения $t_1 = 0$ и $t_2 = \frac{2v_0 \sin\beta}{g\cos\alpha}$.

Максимальное значение y достигается в момент времени $t = \frac{v_0 \sin\beta}{g\cos\alpha}$ (так как кривая является параболой). Подставляя полученное значение времени в выражение (1) для удаления тела от наклонной плоскости, получаем y_{max}:

$$y_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2\beta}{2g\cos\alpha} = \frac{100 * \frac{1}{2}}{20 * \frac{1}{2}} = 5 \text{ м}$$

9.3. (10 баллов) Цепочка, составленная из маленьких абсолютно гладких звеньев, удерживается так, что её нижний конец касается поверхности стола. Цепочку отпускают. Масса цепочки равна 50 г, а длина – 50 см.

[3] Определить модуль силы давления цепочки на стол спустя 0,2 с.

Замечание. Считать, что ускорение свободного падения равно 10 м/с^2.

(*Ю.В. Максимачев, Т.Н. Стрелкова, Б.К. Галякевич*)

Ответ: 0,6 Н.

Решение. Предположим, что звенья цепочки очень маленькие (размер кольца много меньше длины цепочки). Поэтому цепочку можно рассматривать как непрерывную гибкую ленту.

Оценим время, спустя которое цепочка целиком окажется на столе. Звенья цепочки по условию задачи абсолютно гладкие, т.е. в процессе их движения не возникают ни силы трения, ни силы упругости. Каждое звено цепочки до падения на стол движется с ускорением свободного падения, и время движения последнего звена цепочки до стола определяется соотношением

$$t_1 = \sqrt{\frac{2l}{g}} = \frac{1}{\sqrt{10}} > 0{,}3 \text{ с}$$

Из данной оценки вытекает, что к интересующему нас моменту времени (t =0,2 с) не все элементы цепочки находятся на столе.
Модуль силы давления цепочки на стол по 2 закону Ньютона численно равен модулю силы нормальной реакции стола. Можно выделить две составляющие силы нормальной реакции стола:
1) Составляющая, компенсирующая давление на стол тех звеньев цепочки, которые к моменту времени t уже находятся на столе,

$$N_1 = M_1 * g = \frac{M}{l} * \frac{gt^2}{2} * g = \frac{Mg^2t^2}{2l}$$

2) Составляющая N_2, гасящая импульс того звена цепочки, которое к моменту времени t вступает в соприкосновение со столом.

$$N_2 = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\Delta mv}{\Delta t} = \frac{(M/l)v * \Delta t * v}{\Delta t} = \frac{M * v^2}{l}$$

где v – скорость движущихся звеньев цепочки к моменту времени t. Учитывая, что к этому моменту скорость цепочки v=g*t, получаем

$$N_2 = \frac{Mg^2t^2}{l}$$

Обратим внимание на то, что $N_2 > N_1$.
Суммируя обе составляющие, получаем окончательное выражение для нормальной реакции стола, численно равной силе давления цепочки на стол:

$$N = N_1 + N_2 = \frac{3Mg^2t^2}{2l} = \frac{3 * 0.050 * 100 * 0.04}{2 * 0.50} = 0.6 \text{ Н}$$

Отметим, что к моменту времени t = 0,2 с давление цепочки на стол больше, чем в случае, когда вся цепочка покоится на столе (Mg = 0,5 Н).

9.4. (10 баллов) К плюсу батареи с ЭДС 16,8 В и сопротивлением 2,1 Ом подключены параллельно резисторы 1,0 Ом и 4,0 Ом, к минусу батареи – 2,0 Ом и 3,0 Ом.

[4] Найти модуль разности потенциалов между точками соединения резисторов 1,0 Ом и 2,0 Ом и резисторов 4,0 Ом и 3,0 Ом.

(А.Г.Арешкин, О.С. Комарова, В.Г. Мозговая, Д.Л. Федоров)

Ответ: 2,0 В.

Решение. Изобразим электрическую схему (рис.7).
где I – полный ток текущий по схеме. Так как резисторы R_1 и R_3 соединены последовательно, их общее сопротивление:

$$R_{13} = R_1 + R_3 = 1 + 2 = 3 \text{ Ом}$$

Резисторы R_2 и R_4 также соединены последовательно:

$$R_{24} = R_2 + R_4 = 3 + 4 = 7 \text{ Ом}$$

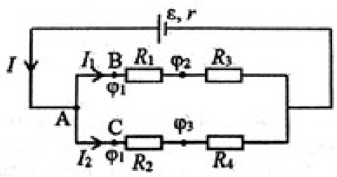

Рис. 7

Каскады R_{13} и R_{24} соединены параллельно, поэтому

$$\frac{1}{R_{\text{общ}}} = \frac{1}{R_{13}} + \frac{1}{R_{24}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} = \frac{10}{21}$$

$$R_{\text{общ}} = \frac{21}{10} = 2{,}1 \text{ Ом}$$

По закону Ома для полной цепи,

$$I = \frac{\varepsilon}{R_{\text{общ}} + r} = \frac{16.8}{2.1 + 2.1} = 4{,}0 \text{ А}$$

В точке А полный ток разветвляется. По закону сохранения заряда,

$$I = I_1 + I_2$$

Так как каскады R_{13} и R_{24} соединены параллельно, то напряжение на них одинаково: $U_{13} = U_{24}$; по закону Ома для участка цепи, U=IR;

$$I_1(R_1 + R_3) = I_2(R_2 + R_4)$$

подставим числовые значения

$$\begin{cases} 3I_1 = 7I_2 \\ I_1 + I_2 = 4 \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем

$$I_1 = 2{,}8 \text{ А};\ I_2 = 1{,}2 \text{ А}$$

. В точках В и С потенциалы одинаковы, т.к. эти точки замкнуты накоротко, обозначим их ϕ_1. Искомая разность потенциалов: $|\Delta\phi| = |\phi_2 - \phi_3| =$

$$= |(\phi_2 - \phi_1) - (\phi_3 - \phi_1)| = |U_1 - U_2| = |I_1R_1 - I_2R_2| = |2.8 * 1{,}0 - 1.2 * 4{,}0| = 2{,}0 \text{ В}$$

9.5. (4 балла) На заряженную частицу, влетающую в однородное магнитное поле с индукцией 0,1 Тл со скоростью 10 м/с перпендикулярно силовым линиям, действует со стороны поля сила 1 мкН.

[5] Определить в микрокулонах заряд частицы.

(*Ю.В. Максимачев*)

Ответ: q = 1 (мкКл).

Решение. Запишем выражение для величины силы Лоренца

$$F_{\text{Лор}} = |q| * v * B * \sin\alpha$$

Так как $\alpha = 90^o$, то

$$F_{\text{Лор}} = qvB \qquad (1)$$

Выразим из (1) величину заряда и подставим численные значения

$$q = \frac{F_{\text{Лор}}}{vB} = \frac{10^{-6}}{(10 * 0{,}1} = 10^{-6} \text{ (Кл)} = 1 \text{ (мкКл)}$$

Международная физическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2023–2024 учебный год. Заключительный этап

Решения задач для 10 класса

10.1. (7 баллов) Стакан объемом 300 см^3 и массой 100 г медленно погружают в воду плотностью 1000 кг/м^3, держа его вверх дном. Атмосферное давление 100 кПа, температура постоянна и одинакова для воздуха и воды.

[1] На какой минимальной глубине стакан начнет погружаться без помощи внешней силы?

Замечание. Глубину отсчитывать до уровня воды в стакане. Считать, что ускорение свободного падения равно 10 м/с^2. *(Ю.В. Максимачев, Т.Н. Стрелкова, Б.К. Галякевич)*

Ответ: 20 м.

Решение. Сначала стакан был в атмосфере; параметры воздуха в стакане указаны на рисунке 8.

Когда стакан углубили, вода частично зашла под кромки стакана, сжав воздух в нём до объёма V_1 и давления p_1.

На глубине h (см. рис.) стакан может начать погружаться без действия внешней силы. Условие начала такого движения: $\vec{F}_{\text{рез}} = 0$.

В проекции на вертикальную ось имеем:

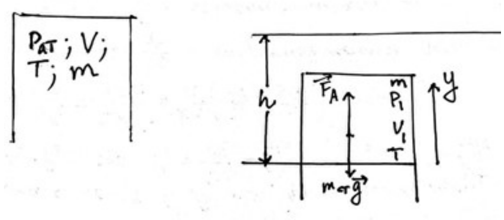

Рис. 8

$$F_A - m_{\text{ст}} g = 0 \qquad (1)$$

Так как силой тяжести воздуха в объёме V_1 можно пренебречь.

Преобразуем (1)

$$F_A = \rho g V_1; \quad \rho g V_1 = m_{\text{ст}} g; \quad V_1 = \frac{m_{\text{ст}}}{\rho};$$

По условию T = const, m = const, так как сжатый до объёма V_1 воздух не уходит из стакана. По закону Бойля-Мариотта: pV = const. Для рассматриваемого случая:

$$p_{\text{ат}} V = p_1 V_1$$

где p_1- полное давление на глубине h. Так как $p_1 = p_{\text{ат}} + \rho g h$, то

$$p_{\text{ат}} V = (p_{\text{ат}} + \rho g h) * \frac{m_{\text{ст}}}{\rho}; \quad p_{\text{ат}} + \rho g h = \frac{p_{\text{ат}} * \rho V}{m_{\text{ст}}};$$

$$\rho g h = p_{\text{ат}}(\frac{\rho V}{m_{\text{ст}}} - 1); \quad h = p_{\text{ат}}(\frac{\rho \frac{V}{m_{\text{ст}}} - 1)}{\rho g} = \frac{1{,}00 * 10^5(\frac{3{,}00*10^{-4}*10^3}{0{,}100} - 1)}{10^4} = 20 \text{ м}$$

10.2. (7 баллов) Моль гелия совершает цикл, состоящий из двух изохор и двух изобар. Максимальное давление в цикле в 2 раза больше минимального, а максимальный объем в 1,5 раза больше минимального.

[2] Определите в процентах коэффициент полезного действия цикла.

(Ю.В. Максимачев, Т.Н. Стрелкова, Б.К. Галякевич)

Ответ: 12,5%.

Решение. Изобразим цикл на pV- диаграмме.

По определению, $\eta = \frac{A}{Q}$, где A - работа газа за цикл, Q - тепло, полученное газом за цикл.
Работа газа численно равна площади под графиком p(V), ограниченной соответствующими значениями p и V (см. рис. 9) . Тогда

$$A = (p_{max} - p_{min})(V_{max} - V_{min}) = p_{max}(V_{max} - V_{min}) - p_{min}(V_{max} - V_{min})$$

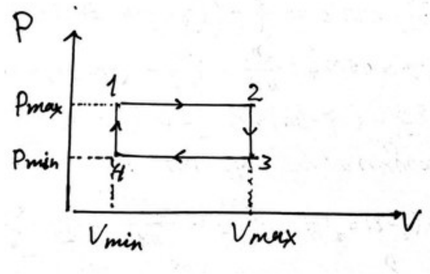

Рис. 9

Из уравнения Клапейрона-Менделеева: $pV = \nu RT$. При p=const имеем $p\Delta V = \nu R\Delta T$. Тогда

$$p_{max}(V_{max} - V_{min}) = \nu R(T_2 - T_1); p_{min}(V_{max} - V_{min}) = \nu R(T_3 - T_4)$$

Т.о,

$$A = \nu R(T_2 - T_1 - T_3 + T_4) \qquad (1)$$

где T_1, T_2, T_3, T_4 – температуры газа в точках 1,2 и т.д. (см. рис.9)
Газ получает тепло от нагревателя в процессах 1-2 и 4-1;
В остальных он отдаёт тепло холодильнику.
По первому началу термодинамики $Q = \Delta U + A$. Тогда, учитывая что газ одноатомный, получим

$$Q_{12} = \Delta U_{12} + A_{12} = \frac{3}{2}\nu R(T_2 - T_1) + \nu R(T_2 - T_1) = \frac{5}{2}\nu R(T_2 - T_1)$$

Так как переход 1-4 изохорный

$$Q_{41} = \Delta U_{41}; \quad Q_{41} = \frac{3}{2}\nu R(T_1 - T_4)$$

Полное поступившее в цикле тепло равно

$$Q = Q_{12} + Q_{41} = \frac{5}{2}\nu R(T_2 - T_1) + \frac{3}{2}\nu R(T_1 - T_4) \qquad (2)$$

Выразим T_2, T_3 и T_4 через T_1;
В процессе 1-2:

$$p = const; \quad \frac{V}{T} = const; \quad \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}; \quad \frac{T_2}{T_1} = \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_{max}}{V_{min}} = 1{,}5; \quad T_2 = 1{,}5T_1$$

В процессе 2-3:

$$V = const; \quad \frac{p}{T} = const; \frac{p_2}{T_2} = \frac{p_3}{T_3}; \quad \frac{T_2}{T_3} = \frac{p_2}{p_3}; \quad \frac{p_{max}}{p_{min}} = 2$$

Тогда

$$T_3 = \frac{T_2}{2} = 0{,}75T_1$$

В процессе 4-1:

$$V = const; \quad \frac{p_1}{T_1} = \frac{p_4}{T_4}; \quad \frac{T_1}{T_4} = \frac{p_1}{p_4} = \frac{p_{max}}{p_{min}} = 2; \quad T_4 = 0{,}5T_1$$

Вычислим работу по формуле (1)

$$A = \nu RT_1(1{,}5 - 1 - 0{,}75 + 0{,}5) = 0{,}25\nu RT_1$$

Полное поступившее в цикле тепло по формуле (2)

$$Q = \frac{5}{2}\nu RT_1(1{,}5 - 1) + \frac{3}{2}\nu RT_1(1 - 0{,}5) = 2\nu RT_1$$

Тогда

$$\eta = \frac{A}{Q} = \frac{0{,}25\nu RT_1}{2\nu RT_1} = 0{,}125 = 12{,}5\%$$

10.3. (10 баллов) Равномерно загруженные сани, движущиеся по льду со скоростью 5 м/с, выезжают на дорогу, посыпанную песком.

[3] Определить путь, пройденный санями по дороге, если длина полозьев равна 1 м, а коэффициент трения скольжения о поверхность дороги равен 0,5.

Замечание. Трением о лед пренебречь. Считать, что ускорение свободного падения равно 10 м/с^2. *(Ю.В. Максимачев, Т.Н. Стрелкова, Б.К. Галякевич)*

Ответ: 3 м.

Решение. Изобразим на рисунке 10 начальный этап перехода саней со льда (где трение отсутствует) на песок (где сила трения пропорциональна весу той части саней, которая находится на песке).

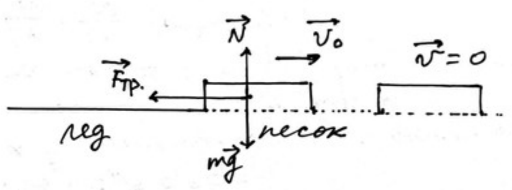

Рис. 10

Так как сила трения пропорциональна массе груза, находящегося над дорогой, а, следовательно, пропорциональна длине полоза, то по мере въезда саней на дорогу $F_{тр} \propto S$. Обозначим через l длину полоза.

Построим график $F_{тр}(S)$.

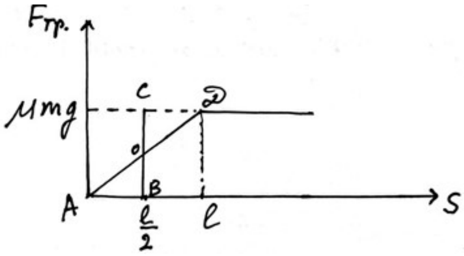

Рис. 11

Работа саней по преодолению силы трения по мере их въезда на дорогу численно равна площади под графиком $F_{тр}(S)$, ограниченной значением l (см. рис. 11), и равна $A_1 = \mu mgl/2$. Когда сани полностью находятся на дороге работа равна $A_2 = \mu mgS_1$. По теореме о связи энергии и работы работа результирующей силы равна изменению кинетической энергии. Так как конечная скорость равна нулю, то

$$\frac{mv^2}{2} = A_1 + A_2$$

Подставив выражения для работ A_1 и A_2 и преобразуя выражение, получим

$$S_1 = \frac{v^2}{2\mu g} - \frac{l}{2}$$

Подставим числовые значения с учетом того, что полная длина складывается из S_1 и l. Тогда

$$S = S_1 + l = 2 + 1 = 3 \text{ м}$$

10.4. (10 баллов) По горизонтальной поверхности катится без проскальзывания тонкий обруч массой 0,5 кг. Скорость движения центра обруча относительно Земли равна 2 м/с.

[4] Определить кинетическую энергию обруча в системе отсчета, связанной с Землей.

(Ю.В. Максимачев, Т.Н. Стрелкова, Б.К. Галякевич)

Ответ: 2 Дж.

Решение.

В системе отсчета, связанной с центром обруча, все точки обруча движутся равномерно по окружности, и их скорости направлены по касательной к окружности (обручу). Так как центр обруча движется относительно Земли со скоростью $\vec{v}$ (рис. 12), то в системе координат, связанной с центром обруча, точка обруча O', касающаяся Земли, движется со скоростью - $\vec{v}$. Итак, в этой системе отсчета все точки обруча имеют одну и ту же по модулю скорость, равную $v' = v$ и направленную по касательной к окружности.

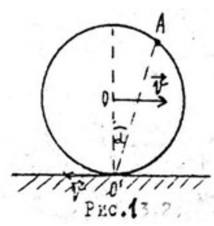

Рис. 12

В системе координат, связанной с Землей (рис. 13), скорость точки А определяется по закону сложения скоростей:

$$\vec{v}_1 = \vec{v}' + \vec{v}$$

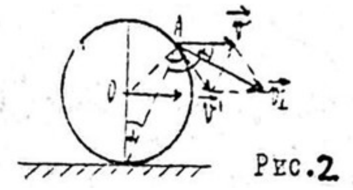

Рис. 13

где $\vec{v}_1$ – скорость точки А обруча относительно Земли; $\vec{v}'$ - скорость той же точки А в системе координат, связанной с центром обруча; $\vec{v}$ – скорость центра обруча относительно Земли, заданная по условию задачи. Таким образом $\vec{v}_1$ – направлена по диагонали ромба со сторонами равными v.

Скорость же точки O' в данной системе координат будет равна нулю $|\vec{v}_1| = 0$, т.к. по условию задачи обруч движется без проскальзывания. Из этого факта вытекает, что $v' = v$. Итак, скорость точки А обруча относительно Земли равна $|\vec{v}_1| = 2v\cos\alpha$.

Приступим теперь к вычислению кинетической энергии обруча в системе отсчета, связанной с Землей. Для этого необходимо учесть, что точки обруча обладают в данной системе координат различными по модулю скоростями. Разобьем весь обруч на N элементарных масс Δm ($\Delta m = m/N$) и вычислим кинетическую энергию пары точек обруча, расположенных на концах произвольного диаметра обруча (рис. 14).

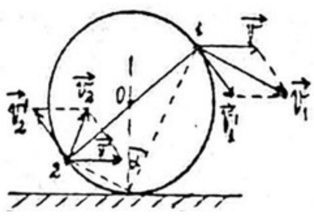

Рис. 14

Скорость малого участка обруча массы Δm у точки 1 (на рис. 13 т. А) равна $2v\cos\alpha$, а скорость такого же участка у точки 2 равна $2v\cos(90^o - \alpha) = 2v\sin\alpha$

Кинетическая энергия участков у пары точек 1 и 2 будет равна

$$E'_{\text{к}} = \frac{\Delta m(2v\cos\alpha)^2}{2} + \frac{\Delta m(2v\sin\alpha)^2}{2} = \frac{2mv^2}{N}$$

Отметим, что $E'_{\text{к}}$ не зависит от α, т.е. будет одинакова для всех аналогичных пар точек, расположенных на концах произвольного диаметра обруча. Тогда кинетическая энергия обруча будет равна сумме кинетических энергий этих пар точек. Число пар, выделенных таким образом, будет равняться $N/2$.

$$E_{\text{к}} = \sum E'_{\text{к}} = E'_{\text{к}} * \frac{N}{2} = \frac{2mv^2}{N} * \frac{N}{2} = mv^2 = 0.5 * 4 = 2 \text{ Дж}$$

10.5. (4 балла) Поток вектора индукции однородного магнитного поля проходит через боковую поверхность конуса с углом при вершине 60^o и длиной образующей 1 метр. Индукция поля 4,0 Тл. Ось конуса параллельна силовым линиям поля.

[5] Найдите величину потока вектора индукции.

(*Банк задач по физике для абитуриентов БГТУ «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова*)

Ответ: 3,1 Вб.

Решение. Изобразим на рисунке 15 конус и направление векторов, используемых в решении задачи.

По определению величина магнитного потока равна

$$\Phi = BS_{\text{бок}} \cos(\vec{B},\vec{n})$$

Из рисунка определим угол между нормалью и вектором индукции

$$\beta = 90^o - \frac{\alpha}{2} = 60^o$$

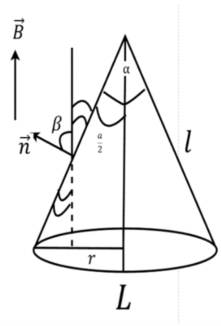

Рис. 15

Найдем длину окружности в основании конуса

$$L = 2\pi r = 2\pi l \sin\frac{\alpha}{2} = \pi l$$

и площадь боковой поверхности конуса

$$S_{\text{бок}} = \frac{\pi l^2}{2}$$

Тогда

$$\Phi = \frac{B\pi l^2}{2} \cos\beta = \frac{4{,}0 * 3.14}{2 * 2} = 3.1 \text{ (Вб)}$$

Международная физическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2023–2024 учебный год. Заключительный этап

Решения задач для 11 класса

11.1. (5 баллов) 5,0 молей идеального газа нагревают на 10 К так, что температура газа меняется пропорционально квадрату объема газа.

[1] Какую работу газ совершает при нагревании?

(Ю.В. Максимачев, Т.Н. Стрелкова, Б.К. Галякевич)

Ответ: 0,21 кДж.

Решение. Согласно уравнению Клайперона-Менделеева $pV = \nu RT$.
Используем заданную зависимость для температуры

$$pV = \nu R\alpha V^2$$

Тогда $p = \nu R\alpha V$.
Вычислим работу газа

$$A = \int_{V_1}^{V_2} pdV = \nu R\alpha \int_{V_1}^{V_2} VdV = \nu R\alpha \frac{V^2}{2}\bigg|_{V_1}^{V_2} = \frac{\nu R\alpha}{2}(V_2^2 - V_1^2) =$$

$$= \frac{\nu R}{2}\Delta T = \frac{5{,}0 * 8{,}31}{2} * 10 = 0{,}21(\text{кДж})$$

11.2. (7 баллов) Тонкий проводящий стержень прямоугольного сечения соскальзывает из состояния покоя по гладкой наклонной плоскости из диэлектрика в вертикальном однородном магнитном поле индукцией B = 0.2 Тл (см. рис. 1).

Длина стержня L = 30 см, плоскость наклонена к горизонту под углом $\alpha = 30^o$. Продольная ось стрежня при движении сохраняет горизонтальное направление.

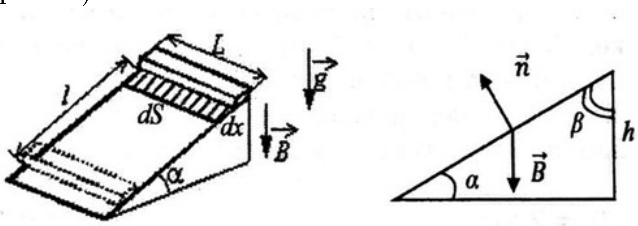

Рис. 1

[2] Рассчитайте ЭДС индукции на концах стрежня в момент, когда стержень переместится по наклонной плоскости на расстояние $l = 1.5$ м.

Замечание. Считать, что ускорение свободного падения равно 10 м/с^2

(А.Г.Арешкин, О.С. Комарова, В.Г. Мозговая, Д.Л. Федоров)

Ответ: 0,2 В.

Решение. Изобразим геометрию задачи и направления используемых в решении векторов.
По закону электромагнитной индукции Фарадея:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (1)$$

где поток индукции $\Phi = BS\cos(\vec{B}, n)$ и $\vec{n}$ – перпендикуляр к наклонной плоскости.
За время dt стержень сместится на dx, площадь, пересекаемая силовыми линиями магнитного поля, изменится на $dS = Ldx$ (см. рис.1).
Из рисунка видно, что $\beta = 90^o - \alpha = 90^o - 30^o = 60^o$,
тогда $\angle(\vec{B}, \vec{n}) = 90^o + \beta = 90^o + 60^o = 150^o$. Из (1) получим

$$\varepsilon_i = -B\frac{dS}{dt}\cos(\vec{B}, \vec{n}) = -BL\frac{dx}{dt}\cos(\vec{B}, \vec{n}) = -BLv\cos 150^o \qquad (2)$$

По закону сохранения полной механической энергии

$$mgh = \frac{mv^2}{2}$$

Тогда $v = \sqrt{2gh}$, где $h = l \sin\alpha$. Подставим в (2)

$$\varepsilon_i = -BL\sqrt{2gl\sin\alpha}\cos 150^o = -BL\sqrt{2gl\sin\alpha}\cos(180^o - 30^o) = BL\sqrt{2gl\sin\alpha}\cos 30^o =$$

$$= 0.2 * 0.3\sqrt{2 * 10 * 1.5 * 0.5} * \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.03 * 3\sqrt{5} \approx 0.09 * 2.25 \approx 0.2 \text{ В}$$

11.3. (10 баллов) Плотность ρ стержня длиной 1 м меняется по закону: $\rho = (1-x)10^3\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, где x – удаление от конца стержня в метрах. Стержень опускают в воду с плотностью 1000 кг/м^3.

[3] Определите длину погруженной части стержня при достижении равновесного положения.

(Ю.В. Максимачев, Т.Н. Стрелкова, Б.К. Галякевич)

Ответ: 0,5 м.
Решение. Изобразим на рисунке ось у, стержень и действующие на него силы.
Пусть S - площадь поперечного сечения стержня, l - длина стержня.
Условие равновесия стержня: $\vec{F}_{\text{рез}} = 0$.
Спроецируем на ось у

$$F_A - mg = 0$$

Преобразуем

$$F_A = \rho_{\text{в}} g V_{\text{погр}} = \rho_{\text{в}} g S l_{\text{погр}} \qquad (1)$$

По определению масса стержня равна

$$m = \int \rho_{\text{ст}} S dx$$

Подставим выражение для плотности

$$m = S10^3 \int_0^l (1-x)dx = 10^3 S(l - \frac{l^2}{2})$$

Тогда из (1) следует

$$\rho_{\text{в}} g S l_{\text{погр}} = 10^3 g S(l - \frac{l^2}{2})$$

Преобразуем и подставим числовые значения

$$l_{\text{погр}} = \frac{10^3(l - \frac{l^2}{2})}{\rho_{\text{в}}} = \frac{10^3(1 - \frac{1^2}{2})}{10^3} = 0{,}5 \text{ м}$$

11.4. (10 баллов) При двух различных сопротивлениях нагрузки отношение напряжений на зажимах источника тока равно 5, а полезная мощность в обоих случаях равна 25 Вт.

[4] Вычислите ток короткого замыкания, если ЭДС источника 25 В.

(Ю.В. Максимачев, Т.Н. Стрелкова, Б.К. Галякевич)

Ответ: 7,2 А.
Решение. Ток короткого замыкания: $I_{\text{кз}} = \frac{\varepsilon}{r}$, где r - внутреннее сопротивление источника
Найдём внутреннее сопротивление. Для этого сначала найдем соотношение между величинами сопротивлений.

Из формулы для мощности получим

$$P_1 = \frac{U_1^2}{R_1}; \quad P_2 = \frac{U_2^2}{R_2}; \quad \frac{R_1}{R_2} = \left(\frac{U_1}{U_2}\right)^2 = 5^2 = 25$$

Тогда

$$R_1 = 25R_2$$

С другой стороны: $P = I^2 R$;
По закону Ома для полной цепи:

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r}$$

Тогда

$$P_1 = I_1^2 R_1 = \frac{\varepsilon^2 R_1}{(R_1 + r)^2} = P_2 = \frac{\varepsilon^2 R_2}{(R_2 + r)^2} \qquad (1)$$

В выражение (1) подставим численные значения:

$$25 = \frac{625R_1}{(R_1 + r)^2} = \frac{625R_2}{(R_2 + r)^2}$$

или

$$25R_1 = (R_1 + r)^2; 25R_2 = (R_2 + r)^2$$

Имеем систему из трёх уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} R_1 = 25R_2 & (2) \\ 25R_1 = (R_1 + r)^2 & (3) \\ 25R_2 = (R_2 + r)^2 & (4) \end{cases}$$

Делим (3) на (4):

$$\frac{R_1}{R_2} = 25 = \frac{(R_1 + r)^2}{(R_2 + r)^2}$$

Извлекаем корень

$$\frac{R_1 + r}{R_2 + r} = 5$$

Выражаем R_1 через R_2, тогда

$$\frac{25R_2 + r}{R_2 + r} = 5$$

Раскрываем и получаем

$$25R_2 + r = 5R_2 + 5r; \quad 20R_2 = 4r; \quad r = 5R_2 = \frac{R_1}{5} \qquad (5)$$

Вычисляем мощность

$$P_2 = \frac{\varepsilon^2 R_2}{(R_2 + r)^2} = \frac{\varepsilon^2 R_2}{36R_2^2} = \frac{\varepsilon^2}{36R_2}$$

Выражаем R_2

$$R_2 = \frac{\varepsilon^2}{36P_2} = \frac{625}{36 * 25} = \frac{25}{36}$$

Используя (5), получим

$$I_{\text{кз}} = \frac{25 * 36}{125} = \frac{36}{5} = 7.2 \text{ А}$$

11.5. (4 балла) Шар массой 0,5 кг падает на невесомую вертикально расположенную пружину с кэффициентом жесткости 1000 Н/м.

[5] Определите величину максимального сжатия пружины, если шар падает с высоты 0,3 м.

Замечание. Отсчет высоты ведется от верхнего края недеформированной пружины.

(*Ю.В. Максимачев, Т.Н. Стрелкова, Б.К. Галякевич*)

Ответ: 6 см.

Решение. Изобразим на рисунке 16 положение пружины в начальный и конечный моменты времени и основные величины, используемые для решения задачи

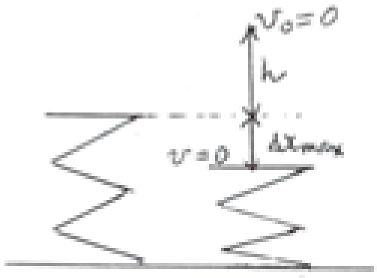

Рис. 16

Из закона сохранения энергии

$$mg(h+\Delta x_{max}) = \frac{k(\Delta x_{max})^2}{2} \qquad (1)$$

Преобразуем (1)

$$\frac{k(\Delta x_{max})^2}{2} - mg\Delta x_{max} - mgh = 0$$

подставив численные значения и, решив уравнение, получим:

$$500\Delta x_{max}^2 - 5\Delta x_{max} - 1.5 = 0$$

$$100\Delta x_{max}^2 - \Delta x_{max} - 0.3 = 0$$

$$\Delta x_{max} = \frac{1+\sqrt{1+120}}{200} = \frac{12}{200} = 0.06 \text{ м}$$

второй корень не учитываем, так как он отрицательный

$$\Delta x_{max} = 0.06 \text{ м}$$