Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2023-2024 учебный год. Заключительный этап

Решения задач для 5 класса

Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.
Для некоторых задач есть частные критерии, указанные ниже.

1. В каждом ли году календари на какие-то два месяца полностью совпадают (иными словами, какие-то два месяца имеют одинаковую длину и начинаются в один и тот же день недели)? (*П. Д. Муленко*)

Примечание. Ниже приведена справочная таблица месяцев года с количеством дней:

1. Январь	31	5. Май	31	9. Сентябрь	30
2. Февраль	28 (29)	6. Июнь	30	10. Октябрь	31
3. Март	31	7. Июль	31	11. Ноябрь	30
4. Апрель	30	8. Август	31	12. Декабрь	31

Ответ: Да. В невисокосный год совпадают январь с октябрём, а в високосный — январь с июлем.

Решение. Действительно, в невисокосный год количество дней в первых 9 месяцах равно $365 - 31 - 30 - 31 = 273$. Оно делится на 7, поэтому 1 октября — тот же день недели, что и первое января. Продолжительность января и октября также совпадает. В високосный год продолжительность первых шести месяцев $(31 + 29 + 31 + 30 + 31 + 30 = 182)$ делится на 7, и продолжительность января и июля также совпадает.

Критерии. Только ответ "Да" – 0 баллов.

Только ответ с указанием конкретных месяцев – 2 балла.

Показано, что описанная ситуация может иметь место в обычном году, либо в високосном году (но не в обоих) — 2 балла.

Задача решена в предположении, что год начинается с понедельника — 5 баллов.

2. Археолог наткнулся на пещеру, в которой стоят 4 сундука, на каждом из которых что-то написано. Некоторые из сундуков могут оказаться мимиками (монстрами, прикидывающимися сундуками), а в остальных лежит золото. Известно, что на мимиках написана ложь, на настоящих сундуках — правда. Подскажите археологу, какие сундуки с золотом, а какие — мимики. (*П. Д. Муленко*)

В правом столбце есть хотя бы один мимик	*Подо мной прячется мимик*
В верхнем ряду есть хотя бы один мимик	*Среди моих соседей по стороне есть хотя бы один мимик*

Ответ: Правый верхний — единственный мимик

Решение. Если правый нижний сундук — мимик, то его соседи с золотом, а тогда левый верхний должен быть мимиком, но на нём написана правда. Если же правый нижний с золотом, то тогда правый верхний — мимик, и оба левых с золотом.

Критерии. Верный ответ без обоснований – 2 балла;

верно и обоснованно определён вид хотя бы одного из сундуков – 3 балла.

3. У Марины есть серебристые, терракотовые и пурпурные карточки с числами от 1 до 50: на серебристых записаны все числа, кратные 7; на терракотовых — кратные 3; на пурпурных — кратные 5. Егор выбирает по одной карточке всех цветов, выкладывая их в указанном порядке, и составляет из них новое число (например, серебристая карточка 14, терракотовая 6 и пурпурная 25 дадут число 14625). Сколько чисел, кратных 3, Егор сможет получить? (*Л. С. Корешкова*)

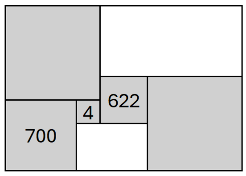
Решение. Число делится на 3, если его сумма цифр делится на 3. Классифицируем числа по остаткам от деления их суммы цифр (или, что то же самое, их самих) на 3.

	серебристые	терракотовые	пурпурные
остаток 1	7, 28, 49	-	10, 25, 40
остаток 2	14, 35	-	5, 20, 35, 50
остаток 0	21, 42	(16 чисел: 3, ..., 48)	15, 30, 45

Терракотовые карточки делятся на 3 сами по себе, значит, надо сочетать серебристые и пурпурные так: или обе делятся на 3, или одна даёт остаток 1, а другая остаток 2. Всего получается $16 \cdot (2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3) = 384$ варианта.

Критерии. Сформулирован и верно использован признак делимости на 3 — 2 балла.

4. Прямоугольник разрезали на белые прямоугольники и серые квадраты, как показано на рисунке, после чего вычислили периметры трёх получившихся частей (указаны внутри). Найдите периметр исходного прямоугольника. (*П. Д. Муленко*)



Решение. Все три части, в которых вычислили периметры — квадраты, поэтому их стороны равны 175, 1 и 155,5, соответственно. Тогда сторона левого верхнего квадрата равна $175 + 1 = 176$, а правого нижнего — $175 + 155{,}5 - 1 = 329{,}5$. Тогда левая сторона исходного прямоугольника равна $176 + 175 = 351$, а нижняя — $176 + 155{,}5 + 329{,}5 = 661$, то есть периметр равен $2 \cdot (351 + 661) = 2024$.

Критерии. Каждая арифметическая ошибка – -1 балл.

Каждая ошибка другого рода (пропущена одна из сторон при суммировании, периметр делится на 2 вместо 4, найдена площадь вместо периметра и др.) при верном плане решения — -2 балла.

5. Даша выложила в ряд несколько карточек, на которых по порядку написаны натуральные числа, начиная с 1. Теперь она хочет перевернуть две карточки чистой стороной вверх так, чтобы произведение чисел между ними равнялось произведению всех остальных видимых чисел. Может ли она так сделать, если карточек (А) 11; (Б) 12?

Примечание. Слева или справа от перевёрнутых карточек может не оказаться ни одного числа. (*П. Д. Муленко*)

Решение. А) Могло, если Даша перевернула карточки 7 и 11 — тогда произведения равны $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 8 \cdot 9 \cdot 10 = 720$.

Б) Не могло. Среди карточек есть простые числа 7 и 11, которые, попав в одно из прозведений, не дадут им быть равными, так как больше нет чисел, кратных 7 или 11. Но, если перевернуть обе карточки, произведения не будут равными: между будет $8 \cdot 9 \cdot 10 = 720$, а «по краям» — $6! \cdot 12 = 8640$.

Критерии.

А) Максимум 2 балла (достаточно просто указать, что перевёрнуты числа 7 и 11). Просто ответ «да» без указания перевернутых карточек — 0 баллов.

Б) Максимум 5 баллов. Ответ без доказательства — 0 баллов.

6. На конференцию по математике в отель заселились 120 человек. В первый вечер они все распределились между четырьмя локациями: стойкой регистрации, баром, столовой и конференц-залом. Число посетителей бара составляет пятую часть от количества людей в столовой; а на стойке регистрации в восемь раз меньше людей, чем в конференц-зале. Когда в какой-то момент десять учёных перешли из столовой в конференц-зал, а шестеро из бара подошли к стойке регистрации, то у стойки регистрации стало в шесть раз меньше людей, чем в столовой. Сколько человек первоначально находилось в каждой локации гостиницы? (*Л. С. Корешкова*)

Решение. Пусть изначально в баре было x человек, тогда в столовой $5x$, на стойке регистрации $(120 - 6x) : 9$, в конференц-зале $8 \cdot (120 - 6x) : 9$. Когда люди перешли, на стойке регистрации стало на 6 человек больше, а в столовой на 10 меньше. Получаем уравнение $6 \cdot \left(\frac{120-6x}{9} + 6\right) = 5x - 10$, из которого $x = 14$, то есть в баре было 14 человек, в столовой — 70, на регистрации — 4, и в конференц-зале — 32 человека.

Критерии. Верный ответ без обоснования — 2 балла.

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2023-2024 учебный год. Заключительный этап

Решения задач для 6 класса

Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.
Для некоторых задач есть частные критерии, указанные ниже.

1. В каждом ли году календари на какие-то два месяца полностью совпадают (иными словами, какие-то два месяца имеют одинаковую длину и начинаются в один и тот же день недели)? (*П. Д. Муленко*)

Примечание. Ниже приведена справочная таблица месяцев года с количеством дней:

1. Январь	31	5. Май	31	9. Сентябрь	30
2. Февраль	28 (29)	6. Июнь	30	10. Октябрь	31
3. Март	31	7. Июль	31	11. Ноябрь	30
4. Апрель	30	8. Август	31	12. Декабрь	31

Ответ: Да. В невисокосный год совпадают январь с октябрём, а в високосный — январь с июлем.

Решение. Действительно, в невисокосный год количество дней в первых 9 месяцах равно $365-31-30-31=273$. Оно делится на 7, поэтому 1 октября — тот же день недели, что и первое января. Продолжительность января и октября также совпадает. В високосный год продолжительность первых шести месяцев $(31+29+31+30+31+30=182)$ делится на 7, и продолжительность января и июля также совпадает.

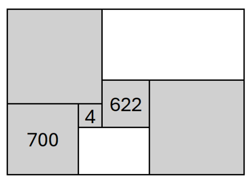
Критерии. Только ответ "Да" – 0 баллов.

Только ответ с указанием конкретных месяцев – 2 балла.

Показано, что описанная ситуация может иметь место в обычном году, либо в високосном году (но не в обоих) — 2 балла.

Задача решена в предположении, что год начинается с понедельника — 5 баллов.

2. Прямоугольник разрезали на белые прямоугольники и серые квадраты, как показано на рисунке, после чего вычислили периметры трёх получившихся частей (указаны внутри). Найдите периметр исходного прямоугольника. (*П. Д. Муленко*)



Решение. Все три части, в которых вычислили периметры — квадраты, поэтому их стороны равны 175, 1 и 155,5, соответственно. Тогда сторона левого верхнего квадрата равна $175+1=176$, а правого нижнего — $175+155{,}5-1=329{,}5$. Тогда левая сторона исходного прямоугольника равна $176+175=351$, а нижняя — $176+155{,}5+329{,}5=661$, то есть периметр равен $2\cdot(351+661)=2024$.

Критерии. Каждая арифметическая ошибка – -1 балл.

Каждая ошибка другого рода (пропущена одна из сторон при суммировании, периметр делится на 2 вместо 4, найдена площадь вместо периметра и др.) при верном плане решения — -2 балла.

3. Некое приложение генерирует одноразовые пароли в виде последовательностей из 4 цифр. Паша посмотрел на последние три пароля — 1258, 0896, 7452 — и осознал, что у них есть общее свойство: при наборе каждого из них на цифровой клавиатуре палец каждый раз переходит на соседнюю по стороне кнопку, причём возвращаться на предыдущую кнопку нельзя. А сколько всего существует паролей с такими свойствами? (*А. А. Теслер*)

1	2	3
4	5	6
7	8	9
	0	

Решение. Так как возвращаться на предыдущую кнопку нельзя, то цифра 0 может появиться в начале или в конце. Если цифра 0 первая, то дальше точно 8, и пятью способами пароль можно закончить (0874, 0896, 0852, 0854, 0856). Если пароль оканчивается нулём, то получатся те же 5 паролей, записанных справа налево.

Если же нуля нет, то пароль полностью расположен в квадрате 3×3. Если он начинается в центре, то имеется 8 паролей (4 варианта второй цифры, 2 варианта третьей, 1 последней); если он начинается на стороне, то существует 5 вариантов для 2-й и 3-й цифр и 2 варианта для последней; если он начинается в углу, то имеется 2 варианта второй цифры и 4 варианта для двух последних. Итого $5 \cdot 2 + 8 + 4 \cdot 5 \cdot 2 + 4 \cdot 2 \cdot 4 = 90$ паролей.

4. Найдите все числа, образованные цифрами от 1 до 9 (каждая цифра встречается по одному разу), так что: двузначное число из первых двух цифр (слева направо) делится на 2; двузначное число, образованное второй и третьей цифрами, делится на 3; и так далее (соответственно, число, образованное восьмой и девятой цифрами, делится на 9). (*Л. С. Корешкова*)

Ответ: 781254963 или 187254963.

Решение. Обозначим цифры итогового числа буквами: $\overline{ABCDEFGHI}$. Тогда числа $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ и $\overline{GH}$ — чётные, то есть цифры B, D, F, H — чётные (соответственно, остальные — нечётные). Тогда, раз число $\overline{DE}$ делится на 5, то $E = 5$, и вторая половина числа восстанавливается однозначно ($\overline{ABCD54963}$). Остаются цифры 1, 7 и 2, 8. Число $\overline{CD}$ должно делиться на 4, поэтому D точно равно 2 (ни 18, ни 78 на 4 не делятся), тогда $B = 8$. Остаются цифры A и C, которые обе могут быть равны и 1, и 7.

Критерии. Если верно определены все цифры которые можно однозначно определить и найден только 1 вариант ответа — 5 баллов

Если верно однозначно определены только последние 6 цифр числа (или приведен верный ответ без объяснения) — 2 балла

5. Археолог наткнулся на пещеру, в которой стоят 6 сундуков, на каждом из которых что-то написано. Некоторые из сундуков могут оказаться мимиками (монстрами, прикидывающимися сундуками), а в остальных лежит золото. Известно, что на мимиках написана ложь, на настоящих сундуках — правда. Подскажите археологу, какие сундуки с золотом, а какие — мимики. (*П. Д. Муленко*)

Подо мной не мимик	*В нижнем ряду есть хотя бы один мимик*	*Оба моих соседа по стороне — не мимики*
В верхнем ряду есть хотя бы один мимик	*Среди сундуков есть ровно 1 мимик*	*Я не мимик*

Ответ: оба левых и средний верхний с золотом, остальные — мимики.

Решение. Точно не мимики два левых сундука (если верхняя левая надпись лжёт, то левая нижняя этому противоречит). Тогда правый верхний сундук — мимик (если нет, то в верхнем ряду нет мимика), и хотя бы один из его соседей тоже мимик, поэтому средний нижний сундук тоже точно мимик, из-за чего средний верхний мимиком быть не может, то есть правый нижний — мимик.

Критерии. Если указано что 2 левых сундука с золотом — 1 балл.

Если перечисленны все сундуки с золотом — 3 балла

6. На конференцию по математике в отель заселились 120 человек. В первый вечер они все распределились между четырьмя локациями: стойкой регистрации, баром, столовой и конференц-залом. Число посетителей бара составляет пятую часть от количества людей в столовой; а на стойке регистрации в восемь раз меньше людей, чем в конференц-зале. Когда в какой-то момент десять учёных перешли из столовой в конференц-зал, а шестеро из бара подошли к стойке регистрации, то у стойки регистрации стало в шесть раз меньше людей, чем в столовой. Сколько человек первоначально находилось в каждой локации гостиницы? (*Л. С. Корешкова*)

Решение. Пусть изначально в баре было x человек, тогда в столовой $5x$, на стойке регистрации $(120-6x):9$, в конференц-зале $8\cdot(120-6x):9$. Когда люди перешли, на стойке регистрации стало на 6 человек больше, а в столовой на 10 меньше. Получаем уравнение $6\cdot\left(\frac{120-6x}{9}+6\right)=5x-10$, из которого $x=14$, то есть в баре было 14 человек, в столовой — 70, на регистрации — 4, и в конференц-зале — 32 человека.

Критерии. Верный ответ без обоснования — 2 балла.

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2023-2024 учебный год. Заключительный этап

Решения задач для 7 класса

Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.
Для некоторых задач есть частные критерии, указанные ниже.

---

1. В каждом ли году календари на какие-то два месяца полностью совпадают (иными словами, какие-то два месяца имеют одинаковую длину и начинаются в один и тот же день недели)? (*П. Д. Муленко*)

Примечание. Ниже приведена справочная таблица месяцев года с количеством дней:

1. Январь	31	5. Май	31	9. Сентябрь	30
2. Февраль	28 (29)	6. Июнь	30	10. Октябрь	31
3. Март	31	7. Июль	31	11. Ноябрь	30
4. Апрель	30	8. Август	31	12. Декабрь	31

Ответ: Да. В невисокосный год совпадают январь с октябрём, а в високосный — январь с июлем.

Решение. Действительно, в невисокосный год количество дней в первых 9 месяцах равно $365 - 31 - 30 - 31 = 273$. Оно делится на 7, поэтому 1 октября — тот же день недели, что и первое января. Продолжительность января и октября также совпадает. В високосный год продолжительность первых шести месяцев $(31 + 29 + 31 + 30 + 31 + 30 = 182)$ делится на 7, и продолжительность января и июля также совпадает.

Критерии. Только ответ "Да" – 0 баллов.

Только ответ с указанием конкретных месяцев – 2 балла.

Показано, что описанная ситуация может иметь место в обычном году, либо в високосном году (но не в обоих) — 2 балла.

Задача решена в предположении, что год начинается с понедельника — 5 баллов.

2. Найдите все числа, образованные цифрами от 1 до 9 (каждая цифра встречается по одному разу), в которых сумма первых двух цифр делится на 2, сумма второй и третьей цифр делится на 3, и так далее (соответственно, сумма восьмой и девятой цифр делится на 9). (*Л. С. Корешкова, П. Д. Муленко*)

Решение. Первые 8 цифр образуют 4 пары одинаковой чётности, поэтому последняя цифра точно нечётная. Переберём все варианты с учётом условия (в каждой строке указана последняя цифра, потом предпоследняя и т. д.).

$1 \to 8 \to -$

$3 \to 6 \to 2 \to 5 \to 1 \to 4 \to 8 \to 7 \to 9$

$ \to 9 \to 7 \to 8 \to 4$

$ \to 7 \to 8 \to 4 \to -$

$5 \to 4 \to -$

$7 \to 2 \to 6 \to 1 \to 5 \to -$

$ \to 8 \to 4 \to 1 \to 3 \to 9 \to 5$

$9 \to -$

Ответ: 487915263, 593148627, 978415263.

Критерии. Каждый из ответов без обоснования оценивается в 1 балл. При наличии верного хода решения каждый потерянный ответ или каждый лишний ответ — -1 балл.

3. Некое приложение генерирует одноразовые пароли в виде последовательностей из 6 цифр без нуля. Паша посмотрел на последние три пароля — 125874, 585632, 785698 — и осознал, что у них есть общее свойство: при наборе каждого из них на цифровой клавиатуре палец каждый раз переходит на соседнюю по стороне кнопку. А сколько всего существует паролей с такими свойствами? (*А. А. Теслер*)

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Решение. Если в какой-то момент палец находится на чётной кнопке (2, 4, 6 или 8), то через два хода он снова окажется на чётной, причём это может произойти 8 способами: по 2 способа через углы и 4 способа через центр. Тогда, если пароль начинается с кнопки 5, то имеется 4 способа сдвинуться в чётную, а дальше 8^2 способов закончить пароль; если он начинается с одной из 4 угловых кнопок, то дальше есть 2 способа сдвинуться в чётную, и также 8^2 способов закончить пароль; если же он начинается с чётной кнопки, то есть 8^2 способов выбрать вторую-пятую цифры и 3 способа выбрать последнюю. Итого $8^2 \cdot (4 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 3) = 1536$ способов.

Критерии. Для решения. похожего на вышеприведённое, каждый потерянный принципиальный случай — -2 балла, каждая арифметическая ошибка — -1 балл.

4. В четырёхугольнике $ABCD$ $\angle A = 100^\circ$, $\angle B = 30^\circ$, M — середина стороны AB. Известно, что $AM = CM$, $\angle ADM = 40^\circ$. Найдите угол CDM. (*А. А. Кинтас*)

Ответ: 30°.

Решение. $AM = BM = CM$, то есть ABC — прямоугольный треугольник (с углом 30°), откуда $\angle BAC = 60^\circ$ и $AC = AM$. В треугольнике AMD есть углы 100° и 40°, то есть это равнобедренный треугольник, и $AM = AD$. Но тогда и ACD — равнобедренный с углом при вершине $100^\circ - 60^\circ = 40^\circ$, то есть $\angle ADC = 70^\circ$, а искомый $\angle CDM = 30^\circ$.

5. Археолог наткнулся на пещеру, в которой стоят 6 сундуков, на каждом из которых что-то написано. Некоторые из сундуков могут оказаться мимиками (монстрами, прикидывающимися сундуками), а в остальных лежит золото. Известно, что на мимиках написана ложь, на настоящих сундуках — правда. Подскажите археологу, какие сундуки тот может гарантированно безопасно открыть. (*П. Д. Муленко*)

Подо мной не мимик	*Я не мимик*	*Оба моих соседа по стороне — не мимики*
В верхнем ряду есть хотя бы один мимик	*Среди сундуков есть ровно 2 мимика*	*Надо мной — мимик*

Ответ: Оба левых и правый нижний.

Решение. Точно не мимики два левых сундука (если верхняя левая надпись лжёт, то левая нижняя этому противоречит). Тогда правый верхний сундук — мимик (если нет, то в верхнем ряду нет мимика), значит, правый нижний сундук с золотом (на нём правдивая надпись), а средний верхний — тоже мимик. Таким образом, среди 5 сундуков уже нашлись два мимика, то есть средний нижний может быть как с золотом, так и мимиком (так как тогда мимиков будет три).

Критерии. Обосновано, что оба левых сундука не мимики — 2 балла. При этом приведено дальнейшее рассуждение, но участник однозначно определяет средний нижний сундук — 5 баллов.

6. На конференцию по математике в отель заселились 90 человек. В первый вечер они все распределились между тремя локациями: баром, столовой и конференц-залом, причём людей в баре оказалось в пять раз меньше, чем в столовой. Когда шестеро математиков перешли из конференц-зала в другие локации (кто-то в столовую, а остальные в бар), то в столовой оказалось вдвое меньше людей, чем в конференц-зале. Сколько человек находилось в каждой локации гостиницы первоначально и после перехода?

(*Л. С. Корешкова, П. Д. Муленко*)

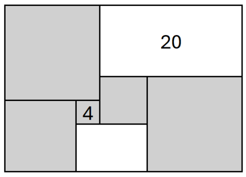
Решение. Пусть изначально в баре было x человек, тогда в столовой $5x$, в конференц-зале $90-6x$. Когда люди перешли, в баре стало $x+y$, в столовой $5x+(6-y)$, в конференц-зале $90-6x-6$. Получаем уравнение $2(5x+6-y)=84-6x$, или $8x-y=36$, откуда $x=5, y=4$ (например, из соображений делимости на 4). Таким образом, изначально было 5, 25 и 60 человек, а стало 9, 27 и 54 человека.

Критерии. Верный ответ без обоснования — 2 балла.

Решения задач для 8 класса

Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.
Для некоторых задач есть частные критерии, указанные ниже.

1. Прямоугольник разрезали на белые прямоугольники и серые квадраты, как показано на рисунке, после чего вычислили периметры двух получившихся частей (указаны внутри). Найдите периметр исходного прямоугольника. (*П. Д. Муленко*)

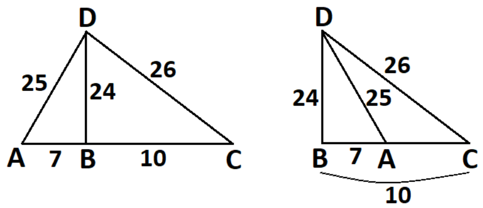


Решение. Обозначим сторону левого нижнего квадрата за x, а центрального — за y. Тогда сторона левого верхнего квадрата равна $x+1$, а правого — $x+y-1$. Тогда периметр верхнего прямоугольника равен $20 = 2((x+2-y)+(x+2y-1)) = 2(2x+y-1)$, то есть $2x = 9-y$. А тогда периметр исходного прямоугольника равен $2((2x+1)+(2x+2y)) = 2(4x+2y+1) = 2(18-2y+2y+1) = 38$.

Критерии. Решение заключается в демонстрации того, что ответ 38 подходит — 1 балл.
Арифметическая ошибка в финальном подсчёте — штраф в 1 балл.
Потерянные элементы (± 1, длина какой-то стороны) при составлении уравнения — штраф в 1 балл за каждый.

2. На плоскости отмечены точки A, B, C и D, причём $AB = 7$, $BC = 10$, $CD = 26$, $DA = 25$, $BD = 24$. Докажите, что длина отрезка AC тоже целая. (*П. Д. Муленко*)

Решение. Заметим, что $7^2 + 24^2 = 25^2$, $10^2 + 24^2 = 26^2$. По обратной теореме Пифагора получаем, что углы ABD и CBD прямые. Значит, точки A, B, C лежат на одной прямой, и AC равно либо $10+7$, либо $10-7$ (см. рисунок).



Критерии. Упомянут только один способ расположения вместо двух — 4 балла. Найден только один прямой угол — 2 балла.

3. Придумайте три различных натуральных значения n, при каждом из которых $4^{35}+4^{48}+4^{n}$ является точным квадратом. (*С. П. Павлов*)

Решение. Подходят 21, 42, 60 (получаются квадраты чисел $2^{21}+2^{48}$, $2^{35}+2^{48}$, $2^{48}+2^{60}$, что легко проверить по формуле квадрата суммы).

Критерии. Правильные ответы без проверки, что получаются квадраты — 4 балла.
Если вместа числа 42 указан ответ 84 — штраф в 1 балл.
Каждый ответ — 2 балла.

4. Лес представляет собой координатную плоскость, в некоторых узлах которой растут ёлки. Всего ёлок больше миллиона. Докажите, что можно срубить более 200 000 ёлок так, чтобы расстояние между любыми двумя срубленными ёлками было больше 2. (Узлом называется точка, обе координаты которой целые; ёлки считаем точками.) (*А. А. Теслер*)

Решение. Раскрасим узлы в 5 цветов так, чтобы узлы одного цвета образовывали сетку из квадратов со стороной $\sqrt{5}$. Например, пусть цвет узла с координатами (x, y) определяется остатком от деления числа $x+2y$ на 5 (соответствующая раскраска для наглядности показана справа, если считать, что деревья растут в центрах квадратов). По принципу Дирихле, в какой-то из пяти цветов окрасились более 200 тысяч ёлок. Тогда все эти ёлки можно срубить, поскольку расстояние между любыми двумя из них не меньше $\sqrt{5}$.

2	3	4	0	1	2	3	4	0
0	1	2	3	4	0	1	2	3
3	4	0	1	2	3	4	0	1
1	2	3	4	0	1	2	3	4
4	0	1	2	3	4	0	1	2
2	3	4	0	1	2	3	4	0
0	1	2	3	4	0	1	2	3
3	4	0	1	2	3	4	0	1
1	2	3	4	0	1	2	3	4
4	0	1	2	3	4	0	1	2
2	3	4	0	1	2	3	4	0

Критерии. Идея правильной раскраски в пять цветов без доказательства того, что она работает — 3 балла.

5. Археолог наткнулся на пещеру, в которой стоят 6 сундуков, на каждом из которых что-то написано. Некоторые из сундуков могут оказаться мимиками (монстрами, прикидывающимися сундуками), а в остальных лежит золото. Известно, что на мимиках написана ложь, на настоящих сундуках — правда. Подскажите археологу, какие сундуки тот может гарантированно безопасно открыть. (*П. Д. Муленко*)

Подо мной не мимик	*В нижнем ряду есть хотя бы один мимик*	*Оба моих соседа по стороне — не мимики*
В верхнем ряду есть хотя бы один мимик	*Среди сундуков есть ровно 2 мимика*	*Я не мимик*

Решение. Точно не мимики два левых сундука (если верхняя левая надпись лжёт, то левая нижняя этому противоречит). Тогда правый верхний сундук — мимик (если нет, то в верхнем ряду нет мимика). Трёх остальных однозначно вычислить не удаётся: один из соседей правого верхнего точно мимик, но оба варианта возможны, и, если правый нижний — мимик, то средний нижний может быть как мимиком, так и безопасным сундуком.

Критерии. Если сказано, что только левый верхний нормальный — 1 балл.

Показано, что два левых сундука — не мимики — 2 балла.

В случае неполного решения каждый найденный мимик стоит 1 балл. Эти баллы суммируются в пунктом выше. То есть решение с ответом в три мимика стоит 5 баллов (2+1+1+1).

6. Вредный учитель даёт ученикам тест из 10 вопросов, на каждый из которых надо ответить «да» или «нет». Учитель не только вредный, но и нечестный, поэтому «правильные» ответы он определяет только после того, как ученики сдадут работы. При этом он стремится выбрать «правильные» ответы так, чтобы ни один из учеников не угадал больше половины ответов. При каком наибольшем количестве учеников учитель гарантированно сумеет это сделать? (*А. А. Теслер*)

Решение. Если учеников три (или меньше), то учитель справится. Действительно, на первые два вопроса возможны 4 варианта ответа: ++, +-, - -, -+. Поскольку учеников не больше трёх, то какую-то из этих комбинаций никто не выбрал, её-то учитель и объявляет «правильной». Так же он поступает с каждой следующей парой ответов. В результате у каждого ребёнка не больше половины верных ответов.

Четыре ученика смогут «обыграть» учителя. Для этого им надо разделить вопросы на две группы нечётного размера (например, первые 5 и последние 5 вопросов) и дать такие ответы: ++++++++++, - - - - - - - - - -, +++++- - - - -, - - - - -+++++. Тогда найдётся ребёнок, угадавший больше половины ответов как в первой группе, так и во второй.

Критерии. Если приведена и обоснована только стратегия для учителя при 3 (или меньше) учениках либо только стратегия для 4 учеников, то даётся 3 балла.

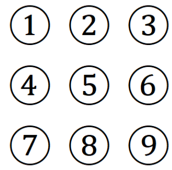
Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2023-2024 учебный год. Заключительный этап

Решения задач для 9 класса

Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.
Для некоторых задач есть частные критерии, указанные ниже.

---

1. Некое приложение генерирует одноразовые пароли в виде последовательностей из 6 цифр без нуля. Паша посмотрел на последние три пароля — 125874, 585632, 785698 — и осознал, что у них есть общее свойство: при наборе каждого из них на цифровой клавиатуре палец каждый раз переходит на соседнюю по стороне кнопку. А сколько всего существует паролей с такими свойствами? (*А. А. Теслер*)



Решение. Если в какой-то момент палец находится на чётной кнопке (2, 4, 6 или 8), то через два хода он снова окажется на чётной, причём это может произойти 8 способами: по 2 способа через углы и 4 способа через центр. Тогда, если пароль начинается с кнопки 5, то имеется 4 способа сдвинуться в чётную, а дальше 8^2 способов закончить пароль; если он начинается с одной из 4 угловых кнопок, то дальше есть 2 способа сдвинуться в чётную, и также 8^2 способов закончить пароль; если же он начинается с чётной кнопки, то есть 8^2 способов выбрать вторую-пятую цифры и 3 способа выбрать последнюю. Итого $8^2 \cdot (4 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 3) = 1536$ способов.

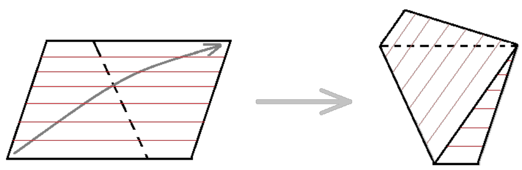
Критерии. Для решения. похожего на вышеприведённое, каждый потерянный принципиальный случай — -2 балла, каждая арифметическая ошибка — -1 балл.

2. Придумайте три различных натуральных значения n, при каждом из которых $4^{35}+4^{48}+4^{n}$ является точным квадратом. (*С. П. Павлов*)

Решение. Подходят 21, 42, 60 (получаются квадраты чисел $2^{21} + 2^{48}$, $2^{35} + 2^{48}$, $2^{48} + 2^{60}$, что легко проверить по формуле квадрата суммы).

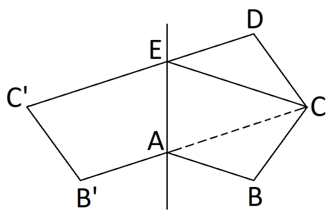
Критерии. Правильные ответы без проверки, что получаются квадраты — 4 балла.
Если вместа числа 42 указан ответ 84 — штраф в 1 балл.
Каждый ответ — 2 балла.

3. Можно ли, совместив две противоположные вершины параллелограмма (см. рисунок), получить правильный пятиугольник? (*Л. С. Корешкова*)



Ответ: можно.

Решение. Пусть дан правильный пятиугольник $ABCDE$. Заметим, что $AC = EC$, $AB = ED$. Кроме того, $\angle BAE = \angle DEA = 108°$, $\angle CAE = \angle AEC = 72°$. Из этого также следует, что $EC || AB$, $AC || DE$ (сумма односторонних углов равна $180°$).



Отразим точки B и C относительно прямой AE — пусть они перейдут в точки B' и C'. В силу симметрии $\angle B'AE = 108^\circ$, $\angle AEC' = 72^\circ$. Поэтому $\angle DEC' = 108^\circ + 72^\circ = 180^\circ$ и аналогично $\angle CAB' = 180^\circ$. Значит, точки A и E лежат на сторонах четырёхугольника $C'DCB'$. Поскольку диагонали пятиугольника параллельны сторонам, то $B'C || C'D$. Кроме этого (в силу симметрии и исходя из первого абзаца), $C'D = C'E + ED = CE + ED = AC + AB = AC + AB' = B'C$. Значит, $C'DCB'$ — параллелограмм, и при его сгибании образуется правильный пятиугольник.

4. Найдите наименьшее значение выражения
$$\sqrt{x^2+(16-y)^2}+\sqrt{y^2+(30-z)^2}+\sqrt{z^2+(16-t)^2}+\sqrt{t^2+(30-x)^2},$$
где x, y, z, t — произвольные вещественные числа. (*С. П. Павлов*)

Решение. Стартуя в начале координат, последовательно отложим векторы $(x, 16-y)$, $(30-z, y)$, $(z, 16-t)$, $(30-x, t)$. Заметим, что сумма этих векторов равна $(60, 32)$, то есть имеет длину $\sqrt{60^2+32^2} = 68$. В то же время искомое выражение равно сумме длин векторов, поэтому оно не меньше 68 (причём равенство достигается, если все векторы коллинеарны, например, при $x = z = 15, y = t = 8$).

Ответ: 68.

Критерии. За оценку даётся 5 баллов, за пример — 2 балла.

5. У Вити есть 9 альбомов с марками, причём в любых двух альбомах количество марок различается. Витя хочет отдать сестре один или два пустых альбома на её выбор. При этом Витя обнаружил, что, какой бы один или какие бы два альбома ни попросила сестра, марки из них можно распределить по остальным альбомам так, что во всех оставшихся семи или восьми альбомах станет поровну марок. Какое минимальное количество марок может изначально быть у Вити в красном альбоме? (*Л. С. Корешкова*)

Ответ: 28.

Решение. Оценка. Упорядочим альбомы по количеству марок, начиная с наименьшего. Если во втором по количеству альбоме x марок, то в следующих не менее чем $x+1, x+2, \ldots, x+7$. После расформирования первого альбома в каждом из остальных будет не менее $x+7$ марок, то есть в них надо добавить не менее чем $7+6+\ldots+2+1+0 = 28$ марок.

Пример: 28, 35, 36, ..., 42. Суммарное количество марок тут делится на 7 и на 8 ($336 = 42 \cdot 8 = 48 \cdot 7$), поэтому можно сделать как 8 альбомов по 42 марки, так и 7 по 48 марок.

Критерии. Обратите внимание, что пример привести обязательно, иначе его наличие неочевидно. Пример — 2 балла.

6. Вредный учитель даёт ученикам тест из 12 вопросов, на каждый из которых надо ответить «да» или «нет». Учитель не только вредный, но и нечестный, поэтому «правильные» ответы он определяет только после того, как ученики сдадут работы. При этом учитель стремится выбрать «правильные» ответы так, чтобы ни один из учеников не угадал больше половины ответов. При каком наибольшем количестве учеников учитель гарантированно сумеет это сделать? (*А. А. Теслер*)

Решение. Если учеников три (или меньше), то учитель справится. Действительно, на первые два вопроса возможны 4 варианта ответа: $++$, $+-$, $--$, $-+$. Поскольку учеников не больше трёх, то какую-то из этих комбинаций никто не выбрал, её-то учитель и объявляет «правильной». Так же он поступает с каждой следующей парой ответов. В результате у каждого ребёнка не больше половины верных ответов.

Четыре ученика смогут «обыграть» учителя. Для этого им надо разделить вопросы на две группы нечётного размера (например, первые 5 и последние 7 вопросов) и дать такие ответы: $++++++++++++$, $------------$, $+++++-------$, $-----+++++++$. Тогда найдётся ребёнок, угадавший больше половины ответов как в первой группе, так и во второй.

Критерии. Если приведена и обоснована только стратегия для учителя при 3 (или меньше) учениках либо только стратегия для 4 учеников, то даётся 3 балла.

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2023-2024 учебный год. Заключительный этап

Решения задач для 10 класса

Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.
Для некоторых задач есть частные критерии, указанные ниже.

1. Даша выложила в ряд n карточек ($5 \leqslant n \leqslant 100$), на которых по порядку написаны натуральные числа от 1 до n. После этого она перевернула две карточки чистой стороной вверх так, что произведение чисел между ними оказалось равным произведению всех остальных видимых чисел. Какому же числу равно каждое из этих произведений?
Примечание. Слева или справа от перевёрнутых карточек может не оказаться ни одного числа. (*П. Д. Муленко*)

Решение. Заметим, что если на какой-то карточке встречается простое число $p > \frac{n}{2}$, то её надо перевернуть, поскольку иначе это число попадёт в одно из произведений, а во втором произведении множителя p не будет. Если таких числа хотя бы три, то придётся перевернуть три карточки, что противоречит условию. Если же их два, то обязательно надо перевернуть именно эти две карточки.

Поэтому большинство значений n можно отвергнуть:
если $61 \leqslant n \leqslant 100$, то надо перевернуть карточки 53, 59, 61;
если $41 \leqslant n \leqslant 60$, то надо перевернуть карточки 31, 37, 41;
если $31 \leqslant n \leqslant 40$, то надо перевернуть карточки 23, 29, 31;
если $19 \leqslant n \leqslant 30$, то надо перевернуть карточки 17 и 19, но между ними лишь число 18, что меньше, чем $16!$;
если $13 \leqslant n \leqslant 18$, то надо перевернуть карточки 11 и 13, но между ними лишь число 12, что меньше, чем $10!$.

Далее, при $n = 11$ и $n = 12$ нужно перевернуть карточки 7 и 11. Заметим, что $8 \cdot 9 \cdot 10 = 720$ и $6! = 720$, поэтому при $n = 11$ условие выполняется (и произведение равно 720), а при $n = 12$ не выполняется ($6! \cdot 12 \neq 8 \cdot 9 \cdot 10 = 720$).

Если $n = 10$, то одна из перевёрнутых карточек — 7. Пусть число на второй карточке равно a. Заметим, что если $a = 1$, то каждое из произведений вновь равно 720 (это второй подходящий вариант, но ответ тот же). Если $2 \leqslant a \leqslant 6$, то «внутреннее» произведение меньше 720, а «внешнее» не меньше 720; то же верно и в случае, когда $a > 7$.

Разберём оставшиеся значения n. Если n равно 7, 8 или 9, то надо перевернуть карточки 5 и 7, но между ними число 6, а «внешнее» произведение не меньше $4!$. Если $n = 5$, то перевёрнуты карточки 3 и 5, но $4 \neq 1 \cdot 2$. Наконец, если $n = 6$, то одним из перевёрнутых чисел будет 5. Второе перевёрнутое число может быть только 1 или 2 (иначе «внешнее» произведение делится на 3, а внутреннее — нет), но $1 \cdot 6 < 3 \cdot 4$ и тем более $6 < 2 \cdot 3 \cdot 4$.

Ответ: 720.

Критерии. Каждый из двух примеров оценивается в 1 балл. За идею с несколькими простыми числами между $n/2$ и n даётся 2 балла. За в целом верное решение с опущенными переборами снимается от 1 до 3 баллов.

2. Пусть $f(x) = x^2 + 10x + 20$. Решите уравнение $f(f(f(x))) = 0$. (*П. Д. Муленко*)

Решение. Выделим в $f(x)$ полный квадрат: $f(x) = (x+5)^2 - 5$. Тогда

$$f(f(x)) = \Big(\big((x+5)^2 - 5\big) + 5\Big)^2 - 5 = (x+5)^4 - 5.$$

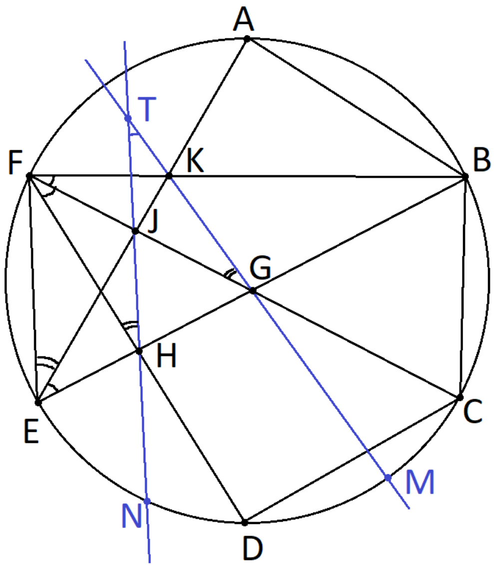
Аналогично,

$$\underbrace{f(f(\ldots f(f(x))\ldots))}_{n \text{ функций}} = (x+5)^{2^n} - 5,$$

то есть при $n = 3$ получится уравнение $(x+5)^8 - 5 = 0$, откуда $x = -5 \pm \sqrt[8]{5}$.

Критерии. Если в ответе есть посторонние корни (в частности, комплексные корни, записанные в виде $\pm\sqrt{\pm\sqrt{\pm\sqrt{\pm 5}}}$ или подобном), то ставится не больше 5 баллов.

3. На окружности ω отмечены точки A, B, C, D, E, F (в указанном порядке), причём $AB = BC = CD$. Прямая BE пересекает прямые CF и DF в точках G и H соответственно, а прямая AE пересекает прямые CF и BF в точках J и K соответственно. Лучи KG и JH пересекают окружность ω в точках M и N, расстояние между которыми равно AB. Докажите, что прямые GK и JH пересекаются на ω. (*О. А. Пяйве*)



Решение. Углы AEB, BFC, CFD равны, поскольку опираются на равные дуги. Из равенства $\angle AEB = \angle BFC$ следует, что четырёхугольник $EFKG$ вписанный, поэтому $\angle FGK = \angle FEK$. А из равенства $\angle AEB = \angle CFD$ следует, что четырёхугольник $EFJH$ вписанный, поэтому $\angle FEK = \angle FHK$. Получаем $\angle FGK = \angle FHK$, отсюда $FHGT$ вписанный (T — точка пересечения HJ и GK). Значит, $\angle T = \angle CFD$. Но, по условию, высекаемые этими углами дуги MN и CD также равны, а это значит, что T лежит на окружности.

4. Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{x^2 + (16-y)^2} + \sqrt{y^2 + (30-z)^2} + \sqrt{z^2 + (16-t)^2} + \sqrt{t^2 + (30-x)^2},$$

где x, y, z, t — произвольные вещественные числа. (*С. П. Павлов*)

Решение. Стартуя в начале координат, последовательно отложим векторы $(x, 16-y)$, $(30-z, y)$, $(z, 16-t)$, $(30-x, t)$. Заметим, что сумма этих векторов равна $(60, 32)$, то есть имеет длину $\sqrt{60^2 + 32^2} = 68$. В то же время искомое выражение равно сумме длин векторов, поэтому оно не меньше 68 (причём равенство достигается, если все векторы коллинеарны, например, при $x = z = 15, y = t = 8$).

Ответ: 68.

Критерии. За оценку даётся 5 баллов, за пример — 2 балла.

5. У Вити есть 9 альбомов с марками, причём в любых двух альбомах количество марок различается. Витя хочет отдать сестре один или два пустых альбома на её выбор. При

этом Витя обнаружил, что, какой бы один или какие бы два альбома ни попросила сестра, марки из них можно распределить по остальным альбомам так, что во всех оставшихся семи или восьми альбомах станет поровну марок. Изначально у Вити меньше всего марок в красном альбоме. А какое минимальное количество марок может быть в синем альбоме? (*Л. С. Корешкова*)

Ответ: 32.

Решение. Общее число марок не меньше $28 + 29 + \ldots + 36$ (см. задачу 9.5), к тому же кратно 7 и 8, а потому не меньше $336 = 28 + 35 + 36 + \ldots + 42$. Если в этой сумме заменить $28 + 35$ на $31 + 32$, то получим пример к ответу 32.

Предположим теперь, что в синем альбоме 31 марка или меньше. Тогда в красном не более 30 марок. В то же время общее количество марок равно $8a$, где $a \geqslant 42$. После расформирования красного альбома в остальных нужно сделать ровно по a марок. Значит, изначально в каждом альбоме не более a марок. В синий альбом придётся добавить не менее $42 - 31 = 11$ марок, а в остальные суммарно не менее чем $6+5+4+3+2+1+0 = 21$ марку. Однако в сумме это не менее 32 марок, а в красном альбоме лишь 30.

Критерии. Пример оценивается в 3 балла, оценка — в 4 балла. За оценку на количество марок в красном альбоме ставится 2 балла.

6. Вредный учитель даёт ученикам тест из 12 вопросов, на каждый из которых надо ответить «да» или «нет». Учитель не только вредный, но и нечестный, поэтому «правильные» ответы он определяет только после того, как ученики сдадут работы. При этом учитель стремится выбрать «правильные» ответы так, чтобы ни один из учеников не угадал больше половины ответов. При каком наибольшем количестве учеников учитель гарантированно сумеет это сделать? (*А. А. Теслер*)

Решение. Если учеников три (или меньше), то учитель справится. Действительно, на первые два вопроса возможны 4 варианта ответа: $++$, $+-$, $--$, $-+$. Поскольку учеников не больше трёх, то какую-то из этих комбинаций никто не выбрал, её-то учитель и объявляет «правильной». Так же он поступает с каждой следующей парой ответов. В результате у каждого ребёнка не больше половины верных ответов.

Четыре ученика смогут «обыграть» учителя. Для этого им надо разделить вопросы на две группы нечётного размера (например, первые 5 и последние 7 вопросов) и дать такие ответы: $++++++++++++$, $------------$, $+++++-------$, $-----+++++++$. Тогда найдётся ребёнок, угадавший больше половины ответов как в первой группе, так и во второй.

Критерии. Если приведена и обоснована только стратегия для учителя при 3 (или меньше) учениках либо только стратегия для 4 учеников, то даётся 3 балла.

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2023-2024 учебный год. Заключительный этап

Решения задач для 11 класса

Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.
Для некоторых задач есть частные критерии, указанные ниже.

---

1. Функции f и g заданы формулами $f(x) = ax + b$, $g(x) = bx + a$, где a и b — некоторые натуральные числа, причём $f(g(x)) - g(f(x)) = 2024$. Чему могут быть равны числа a и b? (*С. П. Павлов*)

Решение. Условие равносильно выполнению равенства $a(bx+a)+b-(b(ax+b)+a) = 2024$, т. е. такому: $a^2+b-b^2-a = 2024$, или $(a-b)(a+b-1) = 2024$. Поскольку $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$, и значения выражений $a-b$ и $a+b-1$ разной чётности, второе из них положительно и больше первого, то остаётся рассмотреть только четыре варианта:

$a-b$	1	8	11	23
$a+b-1$	2024	253	184	88

Соответствующие пары значений (a, b) таковы: (1013; 1012), (131; 123), (98; 87), (56; 33).

Критерии. В случае неполного перебора ставится не больше 5 баллов.

2. Лес представляет собой координатную плоскость, в некоторых узлах которой растут ёлки. Всего ёлок больше миллиона. Докажите, что можно срубить более 100 000 ёлок так, чтобы расстояние между любыми двумя срубленными ёлками было больше 3. (Узлом называется точка, обе координаты которой целые; ёлки считаем точками.) (*А. А. Теслер*)

Решение. Раскрасим узлы в 10 цветов так, чтобы узлы одного цвета образовывали сетку из квадратов со стороной $\sqrt{10}$. Например, пусть цвет узла с координатами (x, y) определяется остатком от деления числа $x + 3y$ на 10 (соответствующая раскраска для наглядности показана справа, если считать, что деревья растут в центрах квадратов).

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7
4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1
8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8
5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5
2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6
3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

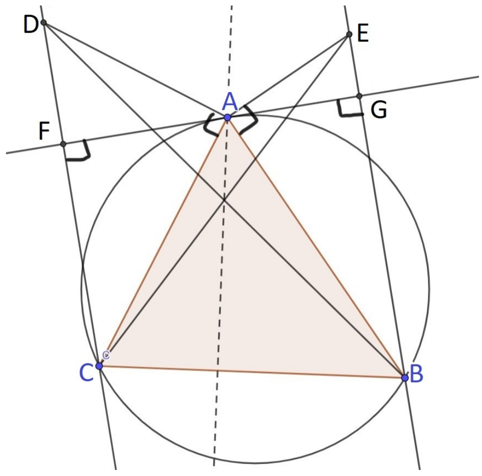
По принципу Дирихле, в какой-то из десяти цветов окрасились более 100 тысяч ёлок. Тогда все эти ёлки можно срубить, поскольку расстояние между любыми двумя из них не меньше $\sqrt{10}$.

Критерии. Приведено верное решение, но только для случая, когда ёлки растут вплотную (в каждом узле некой области) — 5 баллов.

3. Прямая ℓ касается описанной окружности треугольника ABC в точке A. Точки D и E таковы, что CD и BE перпендикулярны ℓ, а углы DAC и EAB прямые. Докажите, что BD и CE пересекаются на высоте треугольника ABC из вершины A.

(*Ю. Э. Нагуманов*)

Решение. Докажем, что $BADH$ — параллелограмм, где H — ортоцентр ABC. AD перпендикулярно AC и BH перпендикулярно AC, значит $AD \parallel BH$. Пусть касательная в точке A пересекает CD в точке F. $\angle FAC = \angle ABC$ как угол между касательной и хордой. $\angle CDA = 90^\circ - \angle ACD = 90^\circ - (90^\circ - \angle FAC) = \angle FAC = \angle ABC$. Значит, точки C, D, A, H лежат на одной окружности. Значит, $\angle DHC$ — прямой, а значит $DH \parallel AB$. Тогда $BADH$ — параллелограмм, а значит BD проходит через середину AH. Аналогично CE тоже через неё проходит, ч.т.д.



4. У Вити есть 9 альбомов с марками, причём в любых двух альбомах количество марок различается. Витя хочет отдать сестре один или два пустых альбома на её выбор. При этом Витя обнаружил, что, какой бы один или какие бы два альбома ни попросила сестра, марки из них можно распределить по остальным альбомам так, что во всех оставшихся семи или восьми альбомах станет поровну марок. Изначально у Вити меньше всего марок в красном альбоме. А какое минимальное количество марок может быть в синем альбоме? (*Л. С. Корешкова*)

Ответ: 32.

Решение. Общее число марок не меньше $28 + 29 + \ldots + 36$ (см. задачу 9.5), к тому же кратно 7 и 8, а потому не меньше $336 = 28 + 35 + 36 + \ldots + 42$. Если в этой сумме заменить $28 + 35$ на $31 + 32$, то получим пример к ответу 32.

Предположим теперь, что в синем альбоме 31 марка или меньше. Тогда в красном не более 30 марок. В то же время общее количество марок равно $8a$, где $a \geqslant 42$. После расформирования красного альбома в остальных нужно сделать ровно по a марок. Значит, изначально в каждом альбоме не более a марок. В синий альбом придётся добавить не менее $42 - 31 = 11$ марок, а в остальные суммарно не менее чем $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 0 = 21$ марку. Однако в сумме это не менее 32 марок, а в красном альбоме лишь 30.

Критерии. Пример оценивается в 3 балла, оценка — в 4 балла. За оценку на количество марок в красном альбоме ставится 2 балла.

5. Вредный учитель даёт ученикам тест из 12 вопросов, на каждый из которых надо ответить «да» или «нет». Учитель не только вредный, но и нечестный, поэтому «правильные» ответы он определяет только после того, как ученики сдадут работы. При этом учитель стремится выбрать «правильные» ответы так, чтобы ни один из учеников не угадал больше половины ответов. При каком наибольшем количестве учеников учитель гарантированно сумеет это сделать? (*А. А. Теслер*)

Решение. Если учеников три (или меньше), то учитель справится. Действительно, на первые два вопроса возможны 4 варианта ответа: $++$, $+-$, $--$, $-+$. Поскольку учеников не больше трёх, то какую-то из этих комбинаций никто не выбрал, её-то учитель и объявляет «правильной». Так же он поступает с каждой следующей парой ответов. В результате у каждого ребёнка не больше половины верных ответов.

Четыре ученика смогут «обыграть» учителя. Для этого им надо разделить вопросы на две группы нечётного размера (например, первые 5 и последние 7 вопросов) и дать такие ответы: $++++++++++++$, $------------$, $+++++-------$, $-----+++++++$. Тогда найдётся ребёнок, угадавший больше половины ответов как в первой группе, так и во второй.

Критерии. Если приведена и обоснована только стратегия для учителя при 3 (или меньше) учениках либо только стратегия для 4 учеников, то даётся 3 балла.

6. Докажите, что уравнение $\dfrac{5m^2-n}{n^2+3m}=1$ имеет бесконечно много решений в целых числах.

(А. Р. Араб)

Решение. Решим сначала уравнение $5m^2-n=n^2+3m$, то есть $5m^2-3m=n^2+n$. Умножим его на 4 и прибавим 1 к обеим частям, чтобы выделить полный квадрат справа: $20m^2-12m+1=(2n+1)^2$. Теперь домножим обе части на 5 и выделим полный квадрат слева: $(10m-3)^2=5(2n+1)^2+4$. Сделаем замену $x=10m-3$, $y=2n+1$. У получившегося уравнения $x^2-5y^2=4$ имеются решения $x=\pm(F_{2k-1}+F_{2k+1})$, $y=\pm F_{2k}$, $k\geqslant 0$, где F_k — числа Фибоначчи (мы пользуемся нумерацией $F_0=0$, $F_1=1$, $F_{k+1}=F_k+F_{k-1}$ при всех целых k). На самом деле $(F_{k-1}+F_{k+1})^2-5F_k^2=4F_{k-1}^2+4F_{k-1}F_k-4F_k^2$ равно $(-1)^k4$ для всех k, что легко проверить по индукции: при $k=0$ это выполняется, а если $F_{k-1}^2+F_{k-1}F_k-F_k^2=(-1)^k$, то и $F_k^2+F_kF_{k+1}-F_{k+1}^2=F_k^2-F_{k-1}F_k-F_{k-1}^2=(-1)^{k+1}$. (Можно доказать с помощью теории уравнений Пелля, что $x^2-5y^2=4$ не имеет других решений.)

Теперь нужно найти бесконечно много x и y таких, для которых соответствующие $m=\frac{x+3}{10}$ и $n=\frac{y-1}{2}$ целые. Заметим, что последовательность остатков чисел Фибоначчи по модулю 10 периодична (так как пара (F_{k-1},F_k) может принимать конечное количество вариантов по модулю 10, а остаток следующего и предыдущего чисел Фибоначчи однозначно определяются по остаткам этой пары). Кроме того, $x=F_2=1$ и $y=F_1+F_3=3$ подходят, они соответствуют тривиальному решению $m=n=0$. Значит, уравнение $5m^2-n=n^2+3m$ имеет бесконечно много решений.

Осталось понять, что они все не могут обнулять знаменатель. Действительно, если (m,n) — решение уравнения $5m^2-n=n^2+3m$, при котором $n^2+3m=0$, то и $5m^2-n=0$. Следовательно, $25m^4+3m=0$. Так как m целое, то обязательно $m=0$ (иначе $|25m^4|>|3m|$), а значит, и $n=0$. Остальные пары (m,n) нам подходят.

Критерии. Если найдено бесконечно много решений уравнения $5m^2-n=n^2+3m$, но не доказано, что бесконечно много из них не обнуляют знаменатель, то ставится 6 баллов. За нахождение бесконечного количества решений в рациональных числах с ограниченным знаменателем (например, целых решений уравнения $x^2-5y^2=4$) даётся 4 балла.