Международная физическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2023–2024 учебный год. Отборочный этап

Решения задач для 8 класса

8.1. (6 баллов) Капля масла объемом 0,003 мм^3 растеклась по поверхности воды тонким слоем и заняла площадь 300 см^2.

[1] Определите средний диаметр молекулы масла.

(Г.Н.Степанова)

Ответ: 10^{-10}.

Решение. 1. Так как при растекании масла по поверхности воды образуется слой толщиной в 1 молекулу, а общий объем масла не изменяется, то

$$V = Sd$$

2. Преобразуем и подставим числовые значения

$$d = \frac{V}{S} = \frac{3 * 10^{-12}}{3 * 10^{-2}} = 10^{-10}\ (\text{м})$$

8.2. (5 баллов) Первый космонавт Земли Ю.А. Гагарин облетел Землю за 108 мин.

[2] Пренебрегая высотой орбиты корабля по сравнению с радиусом Земли, найдите среднюю скорость корабля «Восток» на орбите. Орбиту считать круговой. Средний радиус Земли равен 6400 км. Ответ дать в км/ч и округлить до целых.

(Г.Н.Степанова)

Ответ: 22329.

Решение. 1. Определим время 1 оборота в часах

$$t = \frac{108}{60} = 1{,}8(\text{ч})$$

2. Определим величину скорости корабля «Восток» на орбите

$$v = \frac{2\pi R}{t}$$

3. Подставим числовые значения

$$v = \frac{2 * 3{,}14 * 6400}{1{,}8} = 22328{,}8\ (\frac{\text{км}}{\text{ч}})$$

4. Округлим до целых

8.3. (7 баллов) Бассейн площадью 100 м^2, заполненный водой до уровня 1,2 м, разделен пополам перегородкой. Перегородку медленно передвигают так, что она делит бассейн в соотношении 1:3.

[3] Какую работу нужно совершить, если вода не проникает через перегородку?

(А.Г.Арешкин, О.С. Комарова, В.Г. Мозговая, Д.Л. Федоров)

Ответ: 240000.

Решение. 1. Найдем объем воды в бассейне

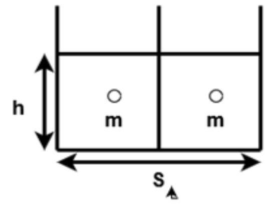

Рис. 1

$$V = Sh = 100 * 1{,}2 = 120 \text{ (м}^3\text{)}$$

2. Определим массу воды с одной стороны от перегородки (см. Рис. 1)

$$m = \frac{\rho V}{2} = \frac{1000 * 120}{2} = 60000 \text{ (кг)}$$

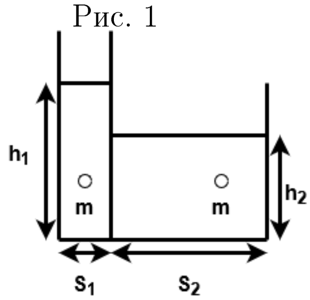

Рис. 2

3. Так как объемы объёмы обоих частей первоначально были равны, то

$$S_1 h_1 = S_2 h_2 \qquad (1)$$

Обозначения смотри на Рис. 2
4. Преобразуем (1) и получим

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{3}; h_1 = 3h_2; S_2 = 3S_1$$

5. Составим систему уравнений для определения площадей

$$\begin{cases} S_1 + S_2 = 100 \\ S_2 = 3S_1 \end{cases}$$

6. Решим систему уравнений и получим

$$4S_1 = 100; S_1 = 25 \text{ (м}^2\text{)}; S_2 = 75 \text{ (м}^2\text{)}$$

7. Найдем новые уровни воды в обоих частях бассейна

$$\frac{S}{2}h = S_1 h_1 = S_2 h_2; h_1 = \frac{Sh}{2S_1} = \frac{120}{50} = 2{,}4 \text{ (м)}$$

$$h_2 = \frac{Sh}{2S_2} = \frac{120}{150} = 0{,}8 \text{ (м)}$$

8. Работа равна изменению потенциальной энергии воды в бассейне

$$A = \frac{mgh_1}{2} + \frac{mgh_2}{2} - 2\frac{mgh}{2} = \frac{mg}{2}(h_1 + h_2 - 2h) = \frac{60000 * 10}{2}(3{,}2 - 2{,}4) = 240 * 10^3 \text{ (Дж)} = 240 \text{ (кДж)}$$

8.4. (7 баллов) Цилиндр, изготовленный из алюминия, имеет высоту 10 см.
[4] Какую высоту имеет железный цилиндр такого же диаметра, если он оказывает на стол такое же давление? Ответ дать в см и округлить до десятых.

(Г.Н.Степанова)

Ответ: 3,4.
Решение. 1. Давление создается весом цилиндра. Тогда по определению

$$p = \frac{mg}{S}$$

2. Так как площади и массы совпадают

$$S_1 = S_2; m_1 = m_2$$

то

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2; \rho_{Al} h_{Al} = \rho_{Fe} h_{Fe}$$

3. Преобразуем и подставляем числовые значения

$$h_{Fe} = \frac{\rho_{Al} h_{Al}}{\rho_{Fe}} = \frac{2688 * 0{,}1}{7874} = 0{,}034 \text{ (м)} = 3{,}4 \text{ (см)}$$

8.5. (5 баллов) Тепловоз тянет состав со скоростью 72 км/ч, развивая мощность 880 кВт.

[5] Как велика в этом случае сила тяги?

(Г.Н.Степанова)

Ответ: 44000.

Решение. 1. Выражаем скорость в метрах в секунду

$$v = 20 \ (\frac{\text{м}}{\text{с}})$$

2. Используя формулу для мощности, выразим силу

$$F_{\text{тяги}} = \frac{P}{v} = \frac{8{,}8 * 10^5}{20} = 44 \text{ (кН)}$$

8.6. (6 баллов) Машинист покоящегося электровоза замечает, что прямо на него со скоростью $v_0 = 20$ м/с катится платформа с горой органического удобрения, расстояние до которой пока равно L = 100 м. Весьма угрожающая ситуация не совсем безнадежна из-за того, что испытывающий действие сил трения вагон движется равнозамедленно с ускорением -0.1 м/c^2.

[6] С каким постоянным ускорением A должен начать двигаться электровоз, для того чтобы между ним и вагоном произошла мягкая сцепка, в результате которой имущество железной дороги не пришлось бы мыть?

(А.С. Чирцов)

Ответ: 1,9.

Решение. 1. Обозначим ускорения вагона и электровоза как a_1 и a_2, соответственно. Отсчет времени начинаем с момента обнаружения вагона.

2. Запишем уравнения для скоростей вагона и электровоза

$$v_1(t) = v_0 - a_1 t \qquad (1)$$

$$v_2(t) = a_2 t \qquad (2)$$

3. Определим момент времени $t_{\text{в}}$, когда скорости тел сравняются

$$v_1(t_{\text{в}}) = v_2(t_{\text{в}}) \qquad (3)$$

Подставим в (3) уравнения (1) и (2) и получим

$$t_{\text{в}} = \frac{v_0}{a_1 + a_2} \qquad (4)$$

4. Будем отсчитывать расстояния от точки начального положения вагона. Начальное расстояние между вагоном и электровозом обозначим L.

5. Запишем уравнения для координат вагона и электровоза

$$L_1(t) = v_0 t - \frac{a_1 t^2}{2} \qquad (5)$$

$$L_2(t) = L + \frac{a_2 t^2}{2} \qquad (6)$$

6. В момент времени $t_в$ координаты обоих тел должны совпадать

$$L_1(t_в) = L_2(t_в)$$

Подставляем (4) - (6) и получаем

$$\frac{v_0^2}{(a_1+a_2)} - \frac{a_1 v_0^2}{2(a_1+a_2)^2} = L + \frac{a_2 v_0^2}{2(a_1+a_2)^2} \qquad (7)$$

7. Преобразуем (7) и получим

$$2L(a_1+a_2) = v_0^2 \qquad (0)$$

8. Из (8) получаем выражение для ускорения электровоза

$$a_2 = \frac{v_0^2}{2L} - a_1 \qquad (9)$$

9. Подставляем в (9) числовые значения и получаем ответ

$$a_2 = \frac{400}{200} - 0{,}1 = 1{,}9\ (\frac{м}{с^2})$$

8.7. (7 баллов) Для определения удельной теплоемкости вещества стальной цилиндр массой 156 г, предварительно прогретый в кипящей воде, поместили в алюминиевый калориметр с водой. Масса калориметра 45 г, воды 100 г, начальная температура воды 17 °С. Спустя некоторое время в калориметре установилась температура равная 29 °С.

[7] Найдите удельную теплоемкость стали. Ответ округлите до целых.

(*Г.Н.Степанова*)

Ответ: 499 (допускается 500).

Решение. 1. При остывании цилиндра количество теплоты, которое он потеряет равно количеству теплоты, приобретенному калориметром и водой. Выразим это в виде уравнения

$$c_{ст} m_{ст}(t_1 - t_{кал}) = c_{Al} m_{Al}(t_{кал} - t_в) + c_в m_в (t_{кал} - t_в) \qquad (1)$$

2. Положим $c_{Al} = 900\ (\frac{Дж}{кг*К})$, $c_в = 4200\ (\frac{Дж}{кг*К})$.

3. Выразим из (1) теплоемкость стали и подставим числовые значения

$$c_{ст} = \frac{(c_{ст} m_{ст} + c_в m_в)(t_{кал} - t_в)}{m_{ст}(t_1 - t_{кал})} = \frac{(900 * 0{,}045 + 4200 * 0{,}1) * 12}{0{,}156 * 71} = 499\ (\frac{Дж}{кг * К})$$

8.8. (7 баллов) Из двух спиралей сопротивлениями 100 Ом и 200 Ом сделали электроплитку, рассчитанную на напряжение 210 В. Мощность плитки меняется переключением спиралей.

[8] Найти минимально возможную мощность плитки.

(*Ю.В. Максимачев*)

Ответ: 147.

Решение. 1. Мощность участка электрической цепи равна

$$P = \frac{U^2}{R}$$

2. Для минимальной мощности необходимо использовать максимальное сопротивление, равное сумме сопротивлений

$$P_{min} = \frac{U^2}{R_{max}} = \frac{U^2}{R_1 + R_2}$$

3. Подставляем числовые значения и получаем

$$P_{min} = \frac{210 * 210}{300} = 7 * 21 = 147 \text{ (Вт)}$$

8.9. (5 баллов) Два связанных вместе изолированных проводника длинной по 10 см расположены перпендикулярно силовым линиям магнитного поля с индукцией 0,2 Тл.

[9] Найти модуль равнодействующей сил Ампера, если в проводниках токи 7 А и 9 А текут навстречу друг другу.

(Ю.В. Максимачев)

Ответ: 0,04.

Решение. 1. В случае перпендикулярности проводника с током и индукции магнитного поля сила Ампера равна

$$F_A = IlB$$

2. Так как проводники связаны, а токи в них противоположны, то результирующая сила равна разности сил, действующих на проводники

$$F_{A\text{рез}} = (I_2 - I_1)lB$$

3. Подставляем числовые значения и получаем

$$F_{A\text{рез}} = 2 * 0{,}1 * 0{,}2 = 0{,}04 \text{ (Н)}$$

Международная физическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2023–2024 учебный год. Отборочный этап

Решения задач для 9 класса

9.1. (7 баллов) Из большого бака насосом откачивают воду. Мощность насоса 4 кВт, а КПД установки 12,5%

[1] С какой по модулю скоростью вытекает вода плотность ρ=1000 кг/м^3 из гладкого шланга сечением 10 см^2, наконечник которого находится на одном уровне с поверхностью воды в баке?

(А.Г.Арешкин, О.С. Комарова, В.Г. Мозговая, Д.Л. Федоров)

Ответ: 10.

Решение. 1. По определению полезной мощности и того факта, что работа идет на приобретение некоторой массой воды кинетической энергии (изменения потенциальной энергии нет, так как бак большой и наконечник находится на одном уровне с поверхностью воды в баке), получаем

$$P_{\text{полезн}} = \frac{A}{t} = \frac{mv^2}{2t} \qquad (1)$$

2. Из определения КПД имеем

$$\nu = \frac{P_{\text{полезн}}}{P_{\text{полн}}}; P_{\text{полезн}} = \nu P_{\text{полн}} \qquad (2)$$

3. Объединяя (1) и (2) получаем

$$\nu P_{\text{полн}} = \frac{mv^2}{2t} = \frac{\rho S l v^2}{2t}$$

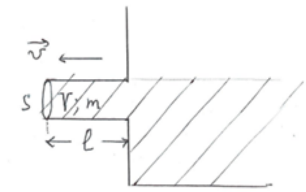

Рис. 3

Здесь ρ - плотность воды, S - площадь сечения трубы, l – длина участка трубы, вода из которой выльется за время t (см. рисунок 3)

4. Так как отношение l и t равно скорости, то

$$\nu P_{\text{полн}} = \frac{\rho S v^3}{2}$$

5. Преобразуем (3), подставляем числовые значения и получаем

$$v = \sqrt[3]{\frac{2\nu P_{\text{полн}}}{\rho S}} = \sqrt[3]{\frac{2 * 12{,}5 * 10^{-2} * 4 * 10^3}{10^3 * 10^{-2}}} = 10 \ (\frac{\text{м}}{\text{с}})$$

9.2. (7 баллов) Тело массой 2 кг движется по горизонтальной поверхности под действием силы, равной по модулю 20 Н и направленной под углом 30° к горизонту.

[2] Определить модуль силы взаимодействия тела с поверхностью, если коэффициент трения скольжения равен 1.

(Ю.В. Максимачев, Т.Н. Стрелкова, Б.К. Галякевич)

Ответ: 14,1.

Решение. 1. Изобразим действующие на тело силы на рисунке 4

2. Полная сила, действующая на тело со стороны поверхности, это комбинация реакции опоры N и $F_{\text{тр}}$, поэтому

$$F_{\text{вз}} = \sqrt{N^2 + F_{\text{тр}}^2} = \sqrt{N^2 + \mu^2 N^2} = N\sqrt{1+\mu^2} = N\sqrt{2} \qquad (1)$$

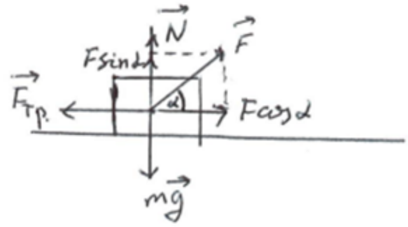

Рис. 4

3. Запишем уравнение для компонент сил относительно вертикальной оси

$$F\sin\alpha + N = mg \qquad (2)$$

4. Преобразуем (2) и подставим числовые значения

$$N = mg - F\sin\alpha = 20 - 20 * \frac{1}{2} = 10 \text{ (Н)} \qquad (3)$$

5. Комбинируя (1) и (3), получим

$$F_{\text{вз}} = 1{,}41 * 10 = 14{,}1 \text{ (Н)}$$

9.3. (6 баллов) Дан мяч массой 0.2 кг и объёмом 7 литров.

[3] Найти минимальную работу, необходимую для погружения мяча в воду плотностью 1 г/см^3 с глубины 1 м до глубины 21 м. Силу сопротивления воды не учитывать.

(*Ю.В. Максимачев*)

Ответ: 1360.

Решение. 1. Изобразим силы, действующие на тело на рисунке 5

2. Минимальная работа будет при бесконечно медленном процессе, когда скорость перемещения тела бесконечно мала и результирующая всех сил равна нулю

$$\vec{v} = const; F_{\text{рез}} = 0$$

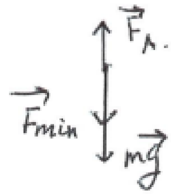

Рис. 5

3. Тогда

$$F_{min} + mg = F_A$$

и

$$F_{min} = F_A - mg = \rho g V - mg = g(\rho V - m)$$

4. По определению работы постоянной силы

$$A_{min} = F_{min}(h_2 - h_1) = g(\rho V - m)(h_2 - h_1) \qquad (1)$$

5. Подставляем в (1) числовые значения и получаем

$$A_{min} = 10(10^3 * 7 * 10^{-3} - 0{,}2)20 = 6{,}8 * 200 = 68 * 20 = 1360 \text{ (Дж)}$$

9.4. (5 баллов) Тонкий однородный стержень массой 60 грамм, сделанный из дерева, подвешен на нити за один из концов, а другим концом наполовину погружен в воду.

[4] Найти величину силы Архимеда, приложенную к стержню.

(*Д.Л. Федоров, В.А. Живулин*)

Ответ: 0,4.

Решение. 1. Изобразим все силы действующие на стержень на рисунке 6

2. Запишем уравнение равновесия (равенства моментов сил отноительно точки крепления к нити)

$$mg\frac{l}{2}\cos\alpha = F_A\frac{3}{4}l\cos\alpha \qquad (1)$$

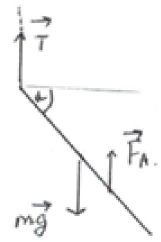

Рис. 6

3. Преобразуем (1)

$$mg = \frac{3}{2}F_A; F_A = \frac{2}{3}mg$$

4. Подставляем числовые значения

$$F_A = \frac{2}{3} * 0{,}06 * 10 = 0{,}4 \text{ (Н)}$$

9.5. (6 баллов) При изготовлении бетонной смеси в бункер засыпали некоторую массу песка и вдвое большую массу цемента. Удельная теплоемкость песка равна 960 Дж/(кг·К), а цемента — 810 Дж/(кг·К).

[5] Определить удельную теплоемкость смеси после перемешивания.

(*Ю.В. Максимачев*)

Ответ: 860.

Решение. 1. По определению удельная теплоемкость смеси равна отношению количеству теплоты, переданной смеси, к произведению массы смеси на изменение ее температуры

$$c_{\text{см}} = \frac{Q_{\text{см}}}{m_{\text{см}}\Delta T}$$

2. Учитывая, что полное количество теплоты распределяется между песком и цементом, а сумма их масс равна массе смеси, получаем

$$c_{\text{см}} = \frac{Q_{\text{см}}}{m_{\text{см}}\Delta T} = \frac{Q_{\text{ц}} + Q_{\text{п}}}{(m_{\text{ц}} + m_{\text{п}})\Delta T} = \frac{c_{\text{ц}}m_{\text{ц}}\Delta T + c_{\text{п}}m_{\text{п}}\Delta T}{(m_{\text{ц}} + m_{\text{п}})\Delta T} = \frac{c_{\text{ц}}m_{\text{ц}} + c_{\text{п}}m_{\text{п}}}{m_{\text{ц}} + m_{\text{п}}} \qquad (1)$$

3. Учтем соотношение масс компонентов и преобразуем (1)

$$c_{\text{см}} = \frac{c_{\text{ц}}m_{\text{ц}} + c_{\text{п}}m_{\text{п}}}{m_{\text{ц}} + m_{\text{п}}} = \frac{c_{\text{ц}} * 2m_{\text{п}} + c_{\text{п}}m_{\text{п}}}{2m_{\text{п}} + m_{\text{п}}} \qquad (2)$$

4. Подставляем в (2) числовые значения, сокращаем и получаем

$$c_{\text{см}} = \frac{c_{\text{ц}} * 2 + c_{\text{п}}}{2+1} = \frac{1620 + 960}{3} = 540 + 320 = 860 \ (\frac{\text{Дж}}{\text{кг} * \text{К}})$$

9.6. (6 баллов) В открытом сосуде объемом 0,45 м^3 находится 120 г газа. Температуру газа увеличивают от 300 К до 450 К при постоянном давлении 166 кПа.

[6] Сколько молей газа выйдет из сосуда?

(*Ю.В. Максимачев*)

Ответ: 10.

Решение. 1. Запишем уравнение Клапейрона – Менделеева для газа внутри сосуда при начальной температуре

$$pV = \frac{m_1}{M}RT_1 \qquad (1)$$

2. Обозначим через Δv количество молей газа, которые выйдут из сосуда

3. Запишем уравнение Клапейрона – Менделеева для газа внутри сосуда при новой температуре

$$pV = \left(\frac{m_1}{M} - \Delta v\right) RT_2 \qquad (2)$$

4. Объединяя (1) и (2), получим

$$\frac{m_1}{M} RT_1 = \left(\frac{m_1}{M} - \Delta v\right) RT_2 \qquad (3)$$

5. Подставляем в (3) числовые значения, преобразуем и получаем

$$300\frac{m_1}{M} = 450\left(\frac{m_1}{M} - \Delta v\right); \frac{m_1}{M} = 1{,}5\left(\frac{m_1}{M} - \Delta v\right); \frac{m_1}{M} = 1{,}5\frac{m_1}{M} - 1{,}5\Delta v; 1{,}5\Delta v = 0{,}5\frac{m_1}{M}$$

6. Тогда, используя (1), имеем

$$\Delta v = \frac{1}{3}\frac{m_1}{M} = \frac{1}{3}\frac{pV}{RT_1} = \frac{1}{3}\frac{166 * 10^3 * 0{,}45}{8{,}3 * 300} = \frac{9 * 10^3}{9 * 10^2} = 10 \text{ (молей)}$$

9.7. (7 баллов) Два одинаковых конденсатора без диэлектрика, соединенных параллельно, зарядили до напряжения 40 В и отключили от цепи.

[7] Определить разность потенциалов на воздушном конденсаторе, если пространство между обкладками другого конденсатора заполнили веществом с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 7$.

(*Ю.В. Максимачев*)

Ответ: 10.

Решение. 1. Изобразим на рисунке 7 начальную и конечную ситуацию с распределением напряжений на конденсаторах

2. Так как конденсаторы после зарядки отключили от цепи, то

$$q_{\text{полн}} = const$$

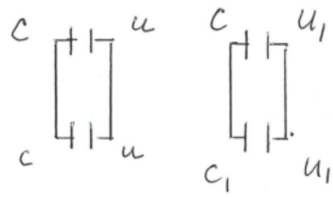

Рис. 7

3. По определению емкости

$$C = \frac{q}{U}$$

4. Для первого случая заряды на обоих конденсаторах одинаковые, поэтому

$$q_{\text{полн}} = 2CU$$

5. Для второго случая заряды на конденсаторах разные, но напряжения равны, поэтому

$$q_{\text{полн}} = (C + C_1)U_1$$

6. Поэтому

$$2CU = (C + C_1)U_1 \qquad (1)$$

7. По формуле емкости плоского конденсатора

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{\text{возд}} S}{d}; C_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}; \varepsilon_{\text{возд}} = 1; C_1 = \varepsilon C \qquad (2)$$

8. Из (1) и (2) получим

$$2CU = C(\varepsilon + 1)U_1 \qquad (3)$$

9. Преобразуя (3) и подставляя числовые значения, имеем

$$U_1 = \frac{2U}{\varepsilon + 1} = \frac{80}{8} = 10 \text{ (В)}$$

9.8. (6 баллов) Моток медной проволоки имеет массу 1,78 кг и сопротивление 3,4 Ом. Удельное сопротивление меди равно $1{,}7\cdot10^{-8}$ Ом·м, а плотность меди – $8{,}9\cdot10^3$ кг/м^3.

[8] Определить в мм^2 поперечное сечение проволоки.

(*Ю.В. Максимачев*)

Ответ: 1.

Решение. 1. По определению удельного сопротивления

$$R = \frac{\rho_{\text{уд}} * l}{S} \qquad (1)$$

2. По определению плотности

$$\rho_{\text{пл}} = \frac{m}{V} = \frac{m}{Sl} \qquad (2)$$

3. Перемножим (1) и (2), тогда

$$R * \rho_{\text{пл}} = \frac{\rho_{\text{уд}} * l}{S} * \frac{m}{Sl} = \frac{\rho_{\text{уд}} m}{S^2 l}$$

4. Преобразуем (3) и подставим числовые значения

$$S^2 = \frac{\rho_{\text{уд}} m}{R * \rho_{\text{пл}}} = \frac{1{,}7 * 10^{-8} * 1{,}78}{3{,}4 * 8{,}9 * 10^3} = \frac{1{,}78 * 10^{-8}}{17{,}8 * 10^3} = 10^{-12}$$

5. Найдем площадь сечения

$$S = \sqrt{10^{-12}} = 10^{-6}\ (\text{м}^2) = 1\ (\text{мм}^2)$$

9.9. (7 баллов) Небольшой шарик удерживается в неподвижном состоянии над очень длинной и ровной наклонной плоскостью, образующей угол $\alpha = 30^\circ$ с горизонтом. Начальное расстояние от шарика до наклонной поверхности равно h = 1 м. шарик отпускают без начальной скорости.

[9] Найти расстояние между первым и 2022 ударом шарика о наклонную поверхность. Влиянием воздуха пренебречь, все удары считать абсолютно упругими. Ответ дать с точностью до 1 см.

(*А.С. Чирцов*)

Ответ: 8172924.

Решение. 1. Из закона сохранения механической энергии определим скорость v_0, с которой шарик впервые ударяется о поверхность

$$\frac{mv_0^2}{2} = mgh$$

Тогда $v_0 = \sqrt{2gh}$

2. Введем систему координат xOy для описания движения шарика после первого отскока от поверхности. Точка O - место первого столкновения, ось x - вдоль наклонной плоскости, ось y - перпендикулярна плоскости и направлена вверх.

3. Обозначим через v_{nx} и v_{ny} компоненты скорости шарика вдоль осей в момент n-ого отскока, где n принимает значения от 1 до 2021, так как движение после 2022 отскока нас не интересует.

4. После первого отскока

$$v_{1x} = v_0 \sin\alpha$$

$$v_{1y} = v_0 \cos\alpha$$

5. Соответственно в выбранной системе координат ускорения вдоль осей

$$g_x = g \sin\alpha$$

$$g_y = g\cos\alpha$$

ускорение g_y направлено противоположно направлению оси y.
6. Запишем выражения для компонент скорости после n-ого отскока

$$v_y(t) = v_{ny} - g_y t \qquad (1)$$

$$v_x(t) = v_{nx} + g_x t \qquad (2)$$

Из формулы (2) следует, что компонента скорости вдоль оси x после каждого отскока будет расти.
7. Запишем уравнения для координат шарика после n-ого отскока (здесь время отсчитывается от момента n-ого отскока)

$$y(t) = v_{ny}t - \frac{g_y t^2}{2} \qquad (3)$$

$$x(t) = L_n + v_{nx}t + \frac{g_x t^2}{2} \qquad (4)$$

Здесь L_n - расстояние вдоль оси x от начальной точки до точки n-ого отскока.
8. Определим время движения $t_{nп}$ между n-м и (n+1)-м отскоками. Для этого приравняем $y(t_{nп})$ к нулю. Тогда

$$v_{ny}t_{nп} - \frac{g_y t_{nп}^2}{2} = 0$$

Следовательно

$$t_{nп} = \frac{2v_{ny}}{g_y} \qquad (5)$$

9. Подставим (5) в (1) и получим y-ую компоненту скорости перед следующим соударением

$$v_{nп} = v_{ny} - g_y\frac{2v_{ny}}{g_y} = -v_{ny}$$

то есть по абсолютной величине $v_{nп}$ и v_{ny} равны. Поэтому все v_{ny} одинаковые и равны v_{1y}. Следовательно все времена между последовательными соударениями также равны

$$t_{nп} = \frac{2v_{1y}}{g_y} = \frac{2v_0}{g} \qquad (6)$$

10. Найдем величину перемещения вдоль оси x между двумя последовательными соударениями. Для этого поставим (6) в (4)

$$\Delta x_n = x(t_{nп}) - x(0) = v_{nx}t_{nп} + \frac{g_x t_{nп}^2}{2} = (v_{1x} + g_x(n-1)t_{nп})t_{nп} + \frac{g_x t_{nп}^2}{2} =$$

$$= (v_0\sin\alpha + g\sin\alpha(n-1)\frac{2v_0}{g})\frac{2v_0}{g} + \frac{g\sin\alpha}{2}\frac{4v_0^2}{g^2} = 4\frac{v_0^2}{g}n\sin\alpha \qquad (7)$$

11. Чтобы определить расстояние между 1-м и 2022-м соударениями необходимо сложить все Δx_n от первого до 2021-го.

$$L_{2021} = \sum_{n=1}^{2021}\Delta x_n = 4\frac{v_0^2}{g}\sin\alpha\sum_{n=1}^{2021} n \qquad (8)$$

12. Сумму можно найти как сумму арифметической прогрессии

$$\sum_{n=1}^{2021} n = \frac{2022 * 2021}{2}$$

13. Используя выражение для v_0, получим

$$L_{2021} = 4\frac{2gh}{g}\sin\alpha * 2021 * 1011 = 8h\sin 30^\circ * 2021 * 1011 = 8172924 \text{ (м)}$$

Международная физическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2023–2024 учебный год. Отборочный этап

Решения задач для 10 класса

10.1. (7 баллов) В запаянной с одной стороны трубке находится столб воздуха, запертый каплей ртути. Длина столба воздуха при расположении трубки вертикально открытым концом вверх равна 10 см, а при отклонении трубки на 60° от вертикали – 12 см.

[1] Определить в сантиметрах длину столба воздуха, если трубку расположить открытым концом вниз.

(А.Г.Арешкин, О.С. Комарова, В.Г. Мозговая, Д.Л. Федоров)

Ответ: 30.

Решение. 1. Изобразим на рисунке 3 положения трубки и обозначим на нем указанные длины и давления

2. Запишем уравнения равновесия для первых двух случаев

$$P_1 = P_{\text{ат}} + \frac{mg}{S}; P_2 = P_{\text{ат}} + \frac{mgcos\alpha}{S} \qquad (1)$$

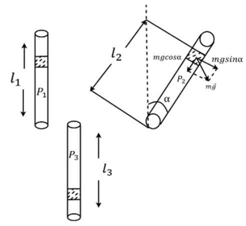

Рис. 8

3. Выразим объемы воздуха через площадь сечения трубки и длины столба воздуха

$$V_1 = l_1 S; V_2 = l_2 S$$

4. Так как температура постоянна, то

$$PV = const \qquad (2)$$

5. Преобразуем (2) и подставим выражения для объемов

$$P_1 V_1 = P_2 V_2;$$

$$P_1 l_1 S = P_2 l_2 S$$

6. Сокращаем на S и получаем

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{l_1}{l_2} = \frac{0.12}{0.1} = 1.2$$

Тогда

$$P_1 = 1.2 P_2 \qquad (3)$$

7. Подставляем выражения (1) в (3)

$$P_{\text{ат}} + \frac{mg}{S} = 1.2 \left(P_{\text{ат}} + \frac{mgcos\alpha}{S} \right)$$

Преобразуем и получим

$$P_{\text{ат}} + \frac{mg}{S} = 1.2 P_{\text{ат}} + 1.2 \frac{mg * 0.5}{S}$$

$$P_{\text{ат}} + \frac{mg}{S} = 1.2 P_{\text{ат}} + 0.6 \frac{mg}{S}$$

$$P_{\text{ат}} = 2 \frac{mg}{S} \qquad (4)$$

8. Запишем уравнения равновесия для третьего случая

$$P_3 + \frac{mg}{S} = P_{\text{ат}} \qquad (5)$$

9. Подставим соотношение (4) в (5) и (1), тогда

$$P_3 = \frac{mg}{S}; P_1 = \frac{3mg}{S} \qquad (6)$$

10. Так как температура постоянная, то по аналогии с пунктами 5 - 6

$$P_1V_1 = P_3V_3$$

$$P_1l_1S = P_3l_3S; l_3 = \frac{P_1l_1}{P_3} = \frac{P_1}{P_3}l_1$$

11. Преобразуем, используя (6), и подставим числовые значения

$$l_3 = \frac{P_1}{P_3}l_1 = 3l_1 = 3 * 0.1 = 0.3 \text{ (м)} = 30 \text{ (см)}$$

10.2. (7 баллов) Газ в цилиндрическом сосуде разделен на две части легкоподвижным поршнем, имеющим массу 40 кг и площадь 10 см^2. При горизонтальном положении цилиндра давление газа в сосуде по обе стороны поршня одинаково и равно 300 кПа.

[2] Определить в кПа давление газа над поршнем, когда он расположен вертикально. Температура газа по обе стороны поршня одинакова.

(*Банк задач по физике для абитуриентов БГТУ «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова*)

Ответ: 200.

Решение. 1. Изобразим на рисунке 9 оба положения цилиндра с обозначением параметров

2. По определению давления

$$P = \frac{F}{S}$$

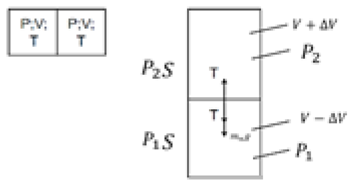

Рис. 9

3. Так как при вертикальном положении цилиндра поршень находится в равновесии, можно записать уравнение равновесия для поршня

$$P_1S = P_2S + m_ng \qquad (1)$$

4. Так как процесс изотермический и полный суммарный объем двух частей цилиндра остается постоянным, можно записать уравнение

$$P_2(V + \Delta V) = P_1(V - \Delta V) = PV \qquad (2)$$

5. Преобразуем (1)

$$P_1 = P_2 + \frac{m_ng}{S} \qquad (3)$$

6. Введем обозначение

$$\frac{V}{\Delta V} = x$$

7. И перепишем (2) в виде

$$P_2(x + 1)\Delta V = P_1(x - 1)\Delta V = Px\Delta V \qquad (4)$$

8. Преобразуем (4) и подставим в (3)

$$P_1 = \frac{Px}{x - 1}; P_2 = \frac{Px}{x + 1} \qquad (5)$$

$$\frac{Px}{x - 1} = \frac{Px}{x + 1} + \frac{m_ng}{S} \qquad (6)$$

9. Подставим в (6) числовые значения, преобразуем и получим

$$\frac{3*10^5x}{x-1}=\frac{3*10^5x}{x+1}+\frac{400}{10^{-3}};\frac{3*10^5x}{x-1}=\frac{3*10^5x}{x+1}+4*10^5$$

$$\frac{3x}{x-1}=\frac{3x}{x+1}+4$$

$$3x(x+1)=3x(x-1)+4(x-1)(x+1)$$

$$3x^2+3x=3x^2-3x+4\left(x^2-1\right)$$

$$6x=4x^2-4;3x=2x^2-2;2x^2-3x-2=0$$

$$x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{4}=\frac{3\pm5}{4}$$

$$x=2 \qquad (7)$$

так как решением может быть только положительный корень.
10. Подставив корень (7) в соотношение (5), получим

$$P_2=\frac{P_x}{x+1}=\frac{3*10^5*2}{3}=2*10^5=200\text{ (кПа)}$$

10.3. (7 баллов) Два одинаково заряженных шарика, подвешенных на нитях равной длины, разошлись на некоторый угол.

[3] Какова должна быть плотность материалов шариков, чтобы при погружении их в керосин угол между ними не изменился? Плотность керосина 0,8 г/см^3, диэлектрическая проницаемость равна 2.

(*Банк задач по физике для абитуриентов БГТУ «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова*)

Ответ: 1600.

Решение. 1. Изобразим на рисунке 10 силы, действующие на заряженный шарик в воздухе
2. Запишем уравнение равновесия вдоль вертикальной оси

$$T_1\cos\frac{\alpha}{2}=mg \qquad (1)$$

3. Запишем уравнение равновесия вдоль горизонтальной оси

$$T_1\sin\frac{\alpha}{2}=9*10^9\frac{q^2}{l^2} \qquad (2)$$

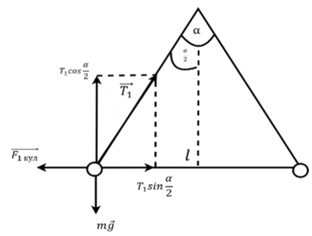

Рис. 10

4. Разделим (2) на (1) и получим

$$tg\frac{\alpha}{2}=9*10^9\frac{q^2}{l^2mg} \qquad (3)$$

5. Изобразим на рисунке силы, действующие на заряженный шарик в керосине
6. Запишем уравнение равновесия вдоль вертикальной оси

$$F_{\text{арх}}+T_2\cos\frac{\alpha}{2}=mg$$

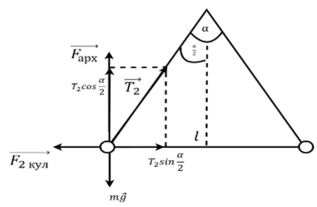

Рис. 11

тогда

$$T_2\cos\frac{\alpha}{2}=mg-F_{\text{арх}} \qquad (4)$$

7. Запишем уравнение равновесия вдоль горизонтальной оси

$$T_2\sin\frac{\alpha}{2}=9*10^9\frac{q^2}{\varepsilon l^2} \qquad (5)$$

8. Разделим (5) на (4) и получим

$$tg\frac{\alpha}{2} = 9*10^9\frac{q^2}{\varepsilon l^2(mg - F_{\text{арх}})} \qquad (6)$$

9. Так как угол не изменился, из (3) и (6) получим

$$\frac{1}{mg} = \frac{1}{\varepsilon\,(mg - F_{\text{арх}})} \qquad (7)$$

преобразуем (7)

$$mg = \varepsilon(mg - \rho_{\text{кер}}gV) \qquad (8)$$

10. Выразим массу шарика через плотность и объем и подставим в (8)

$$V\rho_{\text{шар}}g = \ \varepsilon\,(V\rho_{\text{шар}}g - \rho_{\text{кер}}gV)$$

тогда

$$\rho_{\text{шар}}g = \varepsilon g\,(\rho_{\text{шар}} - \rho_{\text{кер}})$$

сокращая на g и подставляя значение ε, получим

$$\rho_{\text{шар}} = 2\rho_{\text{шар}} - 2\rho_{\text{кер}} \qquad (9)$$

11. Решим уравнение (9) относительно плотности шарика и подставим числовые значения. Тогда

$$\rho_{\text{шар}} = 2\rho_{\text{кер}} = 2*800 = 1600\ (\frac{\text{кг}}{\text{м}^3})$$

10.4. (7 баллов) Внешняя цепь, состоит из двух одинаковых сопротивлений.
[4] Найти мощность, выделяемую во внешней цепи, если известно, что на сопротивлениях выделяется одна и та же мощность, как при последовательном, так и при параллельном их соединении. Источником служит элемент с э.д.с. 12 В и внутренним сопротивлением 2 Ом.

(*Банк задач по физике для абитуриентов БГТУ «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова*)

Ответ: 16.

Решение. 1. Изобразим на рисунке 12 схему при последовательном соединении проводников
2. Так как $R_{\text{посл}} = 2R$, то ток при последовательном соединении равен

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{2R + r}$$

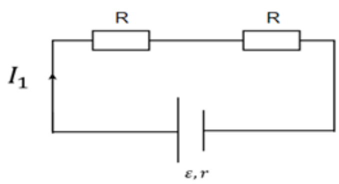

Рис. 12

3. Тогда выделяемая мощность в этом случае

$$P_1 = 2I_1^2R = 2\frac{\varepsilon^2 R}{(2R+2)^2} \qquad (1)$$

Изобразим на рисунке 13 схему при параллельном соединении проводников 5. Так как $R_{\text{пар}} = \frac{R^2}{2R} = \frac{R}{2}$, то ток при параллельном соединении равен

$$I_2 = \frac{\varepsilon}{\frac{R}{2} + r}$$

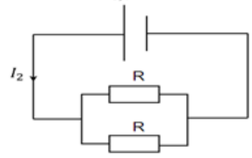

Рис. 13

6. Тогда выделяемая мощность в этом случае

$$P_2 = I_2^2R_{\text{пар}} = \frac{\varepsilon^2 R}{(\frac{R}{2}+r)^2 * 2} \qquad (2)$$

7. Так как мощности в обоих случаях равны, то из (1) и (2) получаем

$$\frac{2\varepsilon^2 R}{(2R+r)^2} = \frac{\varepsilon^2 R}{(\frac{R}{2}+r)^2 2}$$

или

$$4(\frac{R}{2}+r)^2 = (2R+r)^2 \qquad (3)$$

8. Раскрываем в (3) скобки, преобразуем и получаем

$$2\left(\frac{R}{2}+r\right) = 2R+r; R+2r = 2R+r; R = r$$

9. Тогда мощность равна

$$P = \frac{\varepsilon^2 R}{(\frac{R}{2}+r)^2 2} = \frac{\varepsilon^2 r}{2 * 2.25 r^2} = \frac{\varepsilon^2}{4.5r} \qquad (4)$$

10. Подставляем в (4) числовые значения и получаем

$$P = \frac{144}{9} = 16 \text{ (Вт)}$$

10.5. (7 баллов) Нано-автомобиль катится по абсолютно гладкой горизонтальной поверхности дороги, на которой имеется прямоугольная яма глубиной H и шириной L. Размеры ямы существенно превосходят размеры Нано-автомобиля, что позволяет считать последний материальной точкой.

[5] Какую скорость должен иметь Нано-автомобиль для того чтобы он смог продолжить движение по поверхности дороги по другую сторону от ямы? Считать, что все удары наноавтомобиля о дно и стенки ямы абсолютно упругие. Найдите все возможные решения и дайте для них единую краткую и элегантную форму математической записи.

(*А.С. Чирцов*)

Ответ: L*(2k+1)/n*(g/8H)^0,5 (допускается L/n*(g/8H)^0,5).

Решение. 1. Так как потерь при соударении о дно нет, то возможность продолжения движения Нано-автомобиля существует только тогда, когда верхняя точка траектории, где у Наноавтомобиля есть только горизонтальная составляющая скорости, совпадает с границей ямы. Поэтому ширина ямы должна быть равна удвоенной длине падения (расстояние вдоль горизонтальной оси, которое проходит тело от начала падения до первого соударения со дном), умноженной на любое целое число n.

2. Так как длина падения равна $vt_{\text{п}}$, где $t_{\text{п}}$ - время падения, то требуемое соотношение между скоростью и шириной ямы имеет вид

$$L = 2nvt_{\text{п}} \qquad (1)$$

3. Время падения определяем из формулы для равноускоренного движения

$$H = \frac{gt_{\text{п}}^2}{2}$$

Тогда

$$t_{\text{п}} = \sqrt{\frac{2H}{g}} \qquad (2)$$

4. Подставляем (2) в (1) и получаем

$$L = 2nv\sqrt{\frac{2H}{g}} \qquad (3)$$

5. Преобразуем (3) и получаем

$$v = \frac{L}{n}\sqrt{\frac{g}{8H}}$$

6. Если учитывать отражения от вертикальных стенок, то ответ нужно умножить на любое целое нечетное число

$$v = \frac{L(2k+1)}{n}\sqrt{\frac{g}{8H}}$$

10.6. (6 баллов) Два камня брошены с башни горизонтально в противоположных направлениях со скоростями 8 м/с и 2 м/с.

[6] Через какое время векторы скоростей будут взаимно перпендикулярны. Сопротивлением воздуха пренебречь.

(*Банк задач по физике для абитуриентов БГТУ «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова*)

Ответ: 0,4.

Решение. 1. Изобразим на рисунке 14 траектории движения обоих камней и вектора скоростей в произвольный момент времени

2. Условием перпендикулярности векторов является равенство нулю их скалярного произведения

$$\left(\overrightarrow{V_1},\overrightarrow{V_2}\right) = V_1 * V_2 \cos\left(\widehat{\overrightarrow{V_1},\overrightarrow{V_2}}\right) = V_{1x}V_{2x} + V_{1y}V_{2y} = 0 \qquad (1)$$

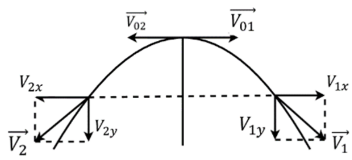

Рис. 14

3. Преобразуем (1) и, исходя из равенства вертикальных компонент обоих камней, получаем

$$V_{1x}\left|V_{2x}\right| = V_{1y}V_{2y}$$

$$V_{1y} = V_{2y} = \sqrt{V_{1x}\left|V_{2x}\right|} = \sqrt{V_{01}V_{02}} \qquad (2)$$

4. Подставим в (2) числовые значения

$$V_{1y} = V_{2y} = \sqrt{V_{01}V_{02}} = \sqrt{8*2} = 4\ \left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right)$$

5. Так как

$$V_y = gt$$

то найдем время и подставим числовые значения

$$t = \frac{V_y}{g} = \frac{4}{10} = 0{,}4\ (\text{с})$$

10.7. (6 баллов) Дан мяч массой 0.2 кг и объёмом 7 литров.

[7] Найти минимальную работу, необходимую для погружения мяча в воду плотностью 1 г/см^3 с глубины 1 м до глубины 21 м. Силу сопротивления воды не учитывать.

(*Ю.В. Максимачев*)

Ответ: 1360.

Решение. 1. Изобразим силы, действующие на тело, на рисунке 15

2. Минимальная работа будет при бесконечно медленном процессе, когда скорость перемещения тела бесконечно мала и результирующая всех сил равна нулю

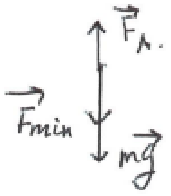

Рис. 15

$$F_{\text{рез}} = 0$$

3. Тогда

$$F_{\min} + mg = F_{\text{А}}$$

и

$$F_{\min} = F_{\text{А}} – mg = \rho gV – mg = g(\rho V – m);$$

4. По определению работы постоянной силы

$$A_{\min} = F_{\min}\,(h_2 – h_1) = g(\rho V – m)\,(h_2 – h_1) \qquad (1)$$

5. Подставляем в (1) числовые значения и получаем

$$A_{\min} = 10\left(10^3 * 7 * 10^{-3} – 0{,}2\right)20 = 6{,}8 * 200 = 68 * 20 = 1360 \text{ (Дж)}$$

10.8. (5 баллов) Вольтметр, рассчитанный на измерение напряжений до 30 В, имеет внутреннее сопротивление 3 кОм.

[8] Какое дополнительное сопротивление нужно присоединить к вольтметру для измерения напряжения до 300В? Ответ дать в килоомах.

(*Ю.В. Максимачев*)

Ответ: 27.

Решение. 1. Обозначим через n отношение максимально возможных напряжений, измеряемых вольтметром, в двух случаях

$$\frac{U}{U_v} = n$$

2. Представим напряжение на вольтметре во втором случае как сумму основного и дополнительного напряжений (падений напряжений на основном и дополнительном сопротивлении)

$$U = U_v + U_{\text{д}}$$

тогда

$$U_{\text{д}} = U - U_v = U_v(n-1) \qquad (1)$$

3. Пусть через вольтметр в обоих случаях проходят равные токи

$$I_v = I_{\text{д}}$$

тогда, из (1) и закона Ома получаем

$$\frac{U_v}{R_v} = \frac{U_v(n-1)}{R_{\text{д}}} \qquad (2)$$

3. Произведем в (2) сокращения и подставим числовые значения

$$R_{\text{д}} = R_v(n-1) = 3 * 10^3(10-1) = 27 * 10^3 \text{ (Ом)} = 27 \text{ (кОм)}$$

10.9. (7 баллов) Теплоизолированный цилиндрический горизонтальный сосуд объемом 5V разделен очень тонкими теплопроводящими поршнями на 5 одинаковых отсеков. Поршни могут двигаться в сосуде свободно. Площадь поперечного сечения сосуда S. Первоначально отсеки заполнены идеальным газом, при этом в каждом отсеке поддерживаются соответственно давление $N\text{p}_0$ и температура $N\text{T}_0$, где N – номер отсека (N = 1, 2, 3, 4, 5), а поршни закреплены.

Поршни отпускают и ждут, когда система придет в равновесие.

[9] Во сколько раз в результате изменится расстояние между вторым и третьим поршнями?

(А.С. Чирцов)

Ответ: 1.

Решение. 1. Для идеального газа справедливо уравнение

$$pV = nRT$$

где n - число молей.

2. Тогда из условия задачи следует, что количество молей в каждом отсеке одинаковое.

3. После установления равновесия (теплового и механического) температуры и давления во всех отсеках должны стать одинаковыми.

4. Так как температуры, давления и число молей во всех отсеках одинаковые, следовательно, одинаковые и объемы. То есть объем не изменится, а значит не изменится и расстояние.

Международная физическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2023–2024 учебный год. Отборочный этап

Решения задач для 11 класса

11.1. (7 баллов) С поверхности земли бросают камень.

[1] С какой минимальной по модулю начальной скоростью его нужно бросить, чтобы он перелетел через стену толщиной 5,2 м? Высота стены равна ее толщине. Точка бросания камня находится на расстоянии 5,2 м от стены. Траектория камня симметрична относительно стены. Сопротивлением воздуха пренебречь.

(*А.Г.Арешкин, О.С. Комарова, В.Г. Мозговая, Д.Л. Федоров*)

Ответ: 13 (допускается 13,0 с уменьшением балла до 6).

Решение. 1. Изобразим на рисунке 16 стену и оптимальную траекторию камня, когда он перелетает через стену

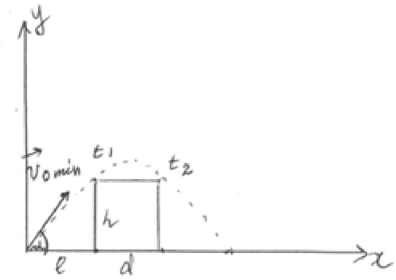

Рис. 16

2. В произвольный момент времени скорость камня равна

$$\vec{v} = \vec{v_0} + \vec{a}t \qquad (1)$$

3. Спроецируем (1) для оптимальной траектории на ось x

$$v_x = v_{o\text{мин}} \cos\alpha$$

4. Оптимальная траектория должна проходить через обе угловые точки стены, соответственно в моменты t_1 и t_2, тогда

$$l = v_x t_1 = v_{0\text{мин}} \cos\alpha * t_1 \qquad (2)$$

5. Так как $l = d$, то

$$t_2 = 2t_1$$

и

$$d + l = 2l = v_x t_2 = v_{0\text{мин}} \cos\alpha * t_2$$

6. Для равноускоренного движения

$$\vec{r} = \vec{v_0} + \frac{\vec{a}t^2}{2} \qquad (3)$$

7. Спроецируем (3) для оптимальной траектории на ось y

$$h = v_{0\text{мин}} \sin\alpha * t - \frac{gt^2}{2}$$

тогда

$$\frac{gt^2}{2} - v_{0\text{мин}} \sin\alpha * t + h = 0 \qquad (4)$$

8. Подставляем в (4) числовые

$$5t^2 - v_{0\text{мин}} \sin\alpha * t + 5.2 = 0 \quad (5)$$

9. Обозначаем $v_{0\text{мин}} \sin\alpha = x$, тогда

$$5t^2 - xt + 5.2 = 0 \qquad (6)$$

10. Решения уравнения (6)

$$t_{1,2} = \frac{x \pm \sqrt{x^2 - 104}}{10} \qquad (7)$$

11. Так как

$$t_2 = 2t_1 \qquad (8)$$

, то подставив в (8) решения (7), получаем:

$$x = 3\sqrt{x^2 - 104} \qquad (9)$$

12. Возведем обе стороны уравнения (9) в квадрат

$$x^2 = 9x^2 - -936$$

тогда

$$x^2 = \frac{936}{8} = 117\ (\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2})$$

13. Извлечем квадратный корень, тогда

$$v_{0\text{мин}} \sin\alpha = \sqrt{117} = 3\sqrt{13} \qquad (10)$$

14. Так как

$$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \qquad (11)$$

15. Умножим (11) на $v_{0\text{мин}}^2$, тогда

$$v_{0\text{мин}}^2 \sin^2\alpha + v_{0\text{мин}}^2 \cos^2\alpha = v_{0\text{мин}}^2 \qquad (12)$$

16. Из (2) и (7) получаем

$$v_{0\text{мин}} \cos\alpha = \frac{l}{t_1} = \frac{l}{\frac{x-\sqrt{x^2-104}}{10}} = \frac{10l}{x - \sqrt{x^2 - 104}} = \frac{52}{3\sqrt{13} - \sqrt{117 - 104}} = \frac{26}{\sqrt{13}} = 2\sqrt{13} \qquad (13)$$

Тогда

$$v_{0\text{мин}}^2 \cos^2\alpha = 52 \qquad (14)$$

17. Подставляем (10) и (14) в (12), тогда

$$v_{0\text{мин}} = \sqrt{117 + 52} = 13\ (\frac{\text{м}}{\text{с}})$$

11.2. (7 баллов) На одном из островов Бермудского треугольника, почему-то названном Косогравией, ускорение свободного падения, как и везде, равно g $= 9.8$ м/с^2 по величине, но направлено под углом $\alpha = 15°$ к вертикали, то есть слегка скошено в Северном направлении. Очень низкорослый туземец стреляет из лука под углом $\beta = 60°$ к поверхности острова, и сообщает стреле известную начальную скорость $v_0 = 3$ м/с.

[2] На каком расстоянии от туземца стрела упадёт на поверхность острова если выстрел производился в северном направлении? В южном направлении? В западном направлении?

Замечание. Ответ дать с точностью до одного сантиметра. Ответы указывайте через точку с запятой. *(А.С. Чирцов)*

Ответ: 1,21; 0,44; 0,92 (допускается 1,21; 0,44; 0,91 с уменьшением балла до 6).

Решение. 1. Введем систему координат с началом в точке выстрела, осью z, направленной вертикально вверх, осью x - в направлении на север и осью y - в направлении на запад.

2. Тогда составляющие ускорения вдоль осей будут иметь следующие значения

$$g_x = g\sin\alpha$$

$$g_z = -g\cos\alpha$$

$$g_y = 0$$

3. Так как туземец низкорослый, можно считать, что выстрел производится с поверхности земли.
4. Рассмотрим первый случай. Задача двухмерная.
4.1. Компоненты начальной скорости

$$v_{0z} = v_0 \sin\beta \qquad (1)$$

$$v_{0x} = v_0 \cos\beta \qquad (2)$$

4.2. Запишем уравнения для координат стрелы в произвольный момент времени

$$x(t) = v_{0x}t + \frac{g_x t^2}{2} \qquad (3)$$

$$z(t) = v_{0z}t + \frac{g_z t^2}{2} \qquad (4)$$

4.3. Определим время полета $t_{\text{п}}$, приравняв высоту к нулю

$$v_{0z}t_{\text{п}} + \frac{g_z t_{\text{п}}^2}{2} = 0$$

Тогда

$$t_{\text{п}} = \frac{2v_{0z}}{-g_z} \qquad (5)$$

4.4 Подставив (5) в (3), получим

$$x\left(t_{\text{п}}\right) = v_{0x}t_{\text{п}} + \frac{g_x {t_{\text{п}}}^2}{2} = v_{0x}\frac{2v_{0z}}{-g_z} + \frac{g_x}{2}\left(\frac{2v_{0z}}{-g_z}\right)^2 \qquad (6)$$

4.5. Преобразуем (6) и получим

$$L_{\text{север}} = \frac{2v_0^2}{g}\left(\frac{\cos\beta\sin\beta}{\cos\alpha} + \frac{\sin\alpha\left(\sin\beta\right)^2}{\left(\cos\alpha\right)^2}\right)$$

4.6. Подставив числовые значения, получим

$$L_{\text{север}} = 1{,}21 \text{ (м)}$$

5. Рассмотрим второй случай. Задача двухмерная.
5.1. Компоненты начальной скорости

$$v_{0z} = v_0 \sin\beta \qquad (7)$$

$$v_{0x} = -v_0 \cos\beta \qquad (8)$$

5.2. Запишем уравнения для координат стрелы в произвольный момент времени

$$x(t) = v_{0x}t + \frac{g_x t^2}{2} \qquad (9)$$

$$z(t) = v_{0z}t + \frac{g_z t^2}{2} \qquad (10)$$

5.3. Определим время полета $t_{\text{п}}$, приравняв высоту к нулю

$$v_{0z}t_{\text{п}} + \frac{g_z t_{\text{п}}^2}{2} = 0$$

Тогда

$$t_{\text{п}} = \frac{2v_{0z}}{-g_z} \qquad (11)$$

5.4 Подставив (11) в (9), получим

$$x\left(t_{\text{п}}\right) = v_{0x}t_{\text{п}} + \frac{g_x {t_{\text{п}}}^2}{2} = v_{0x}\frac{2v_{0z}}{-g_z} + \frac{g_x}{2}\left(\frac{2v_{0z}}{-g_z}\right)^2 \qquad (12)$$

5.5. Преобразуем (12) и получим

$$L_{\text{юг}} = \frac{2v_0^2}{g}\left(\frac{\cos\beta\sin\beta}{\cos\alpha} - \frac{\sin\alpha\left(\sin\beta\right)^2}{\left(\cos\alpha\right)^2}\right)$$

5.6. Подставив числовые значения, получим

$$L_{\text{юг}} = 0{,}44 \text{ (м)}$$

6. Рассмотрим третий случай. Задача трехмерная.
6.1. Компоненты начальной скорости

$$v_{0z} = v_0\sin\beta \qquad (13)$$

$$v_{0y} = v_0\cos\beta \qquad (14)$$

$$v_{0x} = 0 \qquad (15)$$

6.2. Запишем уравнения для координат стрелы в произвольный момент времени

$$x(t) = \frac{g_x t^2}{2} \qquad (16)$$

$$z(t) = v_{0z}t + \frac{g_z t^2}{2} \qquad (17)$$

$$y(t) = v_{0y}t \qquad (18)$$

6.3. Определим время полета $t_{\text{п}}$, приравняв высоту к нулю

$$v_{0z}t_{\text{п}} + \frac{g_z t_{\text{п}}^2}{2} = 0$$

Тогда

$$t_{\text{п}} = \frac{2v_{0z}}{-g_z} \qquad (19)$$

6.4. Подставив (19) в (16) и (18), получим

$$x\left(t_{\text{п}}\right) = \frac{g_x {t_{\text{п}}}^2}{2} = \frac{g_x}{2}\left(\frac{2v_{0z}}{-g_z}\right)^2 \qquad (20)$$

$$y\left(t_{\text{п}}\right) = v_{0y}t_{\text{п}} = v_{0y}\frac{2v_{0z}}{-g_z} \qquad (21)$$

6.5. В этом случае

$$L_{\text{запад}} = \sqrt{\left(x\left(t_{\text{п}}\right)\right)^2 + \left(y\left(t_{\text{п}}\right)\right)^2} \qquad (22)$$

6.6. Преобразуем (20) - (22) и получим

$$L_{\text{запад}} = \frac{2v_0^2}{g}\frac{\sin\beta}{\cos\alpha}\sqrt{(\sin\beta\tan\alpha)^2 + (\cos\beta)^2}$$

6.7. Подставив числовые значения, получим

$$L_{\text{запад}} = 0{,}92 \text{ (м)}$$

11.3. (5 баллов) Тело массой 10 г равномерно тонет в воде.

[3] Считая, что на нагревание тела идет 50% выделяющейся при движении теплоты, определить, на сколько градусов возрастет температура тела при погружении на 10 м. Теплоемкость тела 0,4 Дж/К. Плотность тела много больше плотности воды.

(*Ю.В. Максимачев, Т.Н. Стрелкова, Б.К. Галякевич*)

Ответ: 1,3 (допускается 1,25 с уменьшением балла до 2).

Решение. 1. Изобразим на рисунке 17 силы, действующие на тело

2. Так как скорость $v = const$, то

$$\vec{F_{\text{рез}}} = 0 \qquad (1)$$

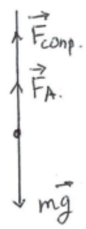

Рис. 17

3. Спроецируем (1) на вертикальную ось

$$F_{\text{сопр}} + F_{\text{А}} - mg = 0 \qquad (2)$$

4. Из формул для силы Архимеда

$$F_{\text{А}} = \rho_{\text{в}} gV$$

5. Так как плотность тела

$$\rho = m/V$$

получим

$$mg = \rho_{\text{т}} gV$$

6. Так как $\rho_{\text{т}} >> \rho_{\text{в}}$, то $mg >> F_{\text{А}}$ и поэтому силой Архимеда можно пренебречь и

$$F_{\text{сопр}} = mg \qquad (3)$$

7. Полные тепловые потери равны мощности силы $F_{\text{сопр}}$. Тогда, используя (3) получаем

$$Q_{\text{полн}} = F_{\text{сопр}} h = mgh \qquad (4)$$

8. По определению теплоемкости

$$Q_{\text{тела}} = c\Delta T$$

9. Так как на нагревание тела идет 50% выделяющейся при движении теплоты

$$c\Delta T = 0.5mgh \qquad (5)$$

10. Преобразуем (5) и подставляем числовые значения

$$\Delta T = \frac{0.5mgh}{c} = \frac{0.5 * 0.01 * 10 * 10}{0.4} = 1.25 \text{ (K)}$$

11. Округляем

11.4. (6 баллов) Электрический чайник имеет две обмотки. При включении только первой из них вода закипает через 40 мин, только второй – через 60 мин.

[4] Через сколько минут закипит вода при одновременном включении обеих обмоток параллельно?

(Ю.В. Максимачев, Т.Н. Стрелкова, Б.К. Галякевич)

Ответ: 24.

Решение. 1. По закону Джоуля - Ленца

$$Q = \frac{U^2 t}{R}$$

2. Так как для осуществления процесса закипания воды необходимо определенное (и одинаковое во всех случаях) количество тепла

$$\frac{U^2 t_1}{R_1} = \frac{U^2 t_2}{R_2} = \frac{U^2 t_{\text{пар}}}{R_{\text{пар}}} \qquad (1)$$

3. Сопротивление при параллельном соединении

$$R_{\text{пар}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

4. Преобразуя (1) находим отношение сопротивлений обмоток плитки

$$\frac{U^2 t_1}{R_1} = \frac{U^2 t_2}{R_2}$$

тогда

$$\frac{t_1}{R_1} = \frac{t_2}{R_2} \qquad (2)$$

5. Подставим в (2) числовые значения

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{t_2}{t_1} = 1.5$$

тогда

$$R_2 = 1.5 R_1 \qquad (3)$$

6. Используя (3) определим сопротивление при параллельном соединении

$$R_{\text{пар}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R_1 * 1.5 R_1}{R_1 + 1.5 R_1} = \frac{1.5 R_1^2}{2.5 R_1} = 0.6 R_1$$

7. Из (1) получим

$$\frac{t_1}{R_1} = \frac{t_{\text{пар}}}{R_{\text{пар}}} \qquad (4)$$

8. Преобразуем (4) и подставляем числовые значения

$$t_{\text{пар}} = \frac{t_1 R_{\text{пар}}}{R_1} = 0.6 * 40 = 24 \text{ (мин)}$$

11.5. (7 баллов) С вершины длинной наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол 60°, бросают вниз тело с начальной скоростью 10 м/с под углом 30° к наклонной плоскости.

[5] На каком расстоянии от точки бросания находится точка падения тела на наклонную плоскость? Сопротивлением воздуха пренебречь.

(Ю.В. Максимачев, Т.Н. Стрелкова, Б.К. Галякевич)

Ответ: 34,6.

Решение. 1. Изобразим на рисунке 18 наклонную плоскость, введенную систему координат и компоненты скорости и ускорения

2. Положение тела в произвольный момент времени при равноускоренном движении задается уравнением

$$\vec{r} = \vec{v_0} + \frac{\vec{a}t^2}{2} \qquad (1)$$

3. Спроецируем (1) на ось x

$$l = v_0 \cos\beta * t + \frac{g \sin\alpha * t^2}{2} \qquad (2)$$

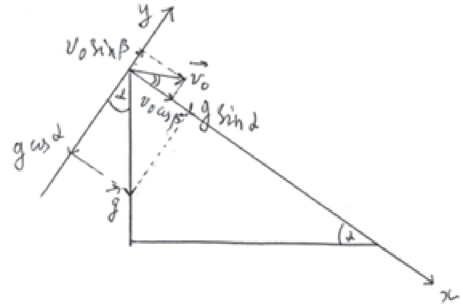

Рис. 18

4. Определим момент времени, когда $v_y = 0$. Для этого запишем уравнение для скорости в произвольный момент времени при равноускоренном движении

$$\vec{v} = \vec{v_0} + \vec{a}t \qquad (3)$$

5. Спроецируем (3) на ось y и приравняем результат к нулю

$$v_y = v_0 \sin\beta - g\cos\alpha * t = 0 \qquad (4)$$

6. Решая (4) и подставляя числовые значения, получим

$$t = \frac{v_0 \sin\beta}{g \cos\alpha} = 1 \text{ (с)}$$

7. Так как $t_{\text{полн}} = t_{\text{подъем}} + t_{\text{спуск}} = 2t_{\text{подъем}} = 2\text{с}$, то подставив численные значения в (2), имеем

$$l = 20\frac{\sqrt{3}}{2} + 20\frac{\sqrt{3}}{2} = 20\sqrt{3} = 34.6 \text{ (м)}$$

11.6. (7 баллов) Тело массой 0,4 кг начинает скользить с начальной скоростью 12 м/с вверх по наклонной плоскости, составляющей угол 30° с горизонтом.

[6] Определить работу сил трения за 3,6 с движения, если коэффициент трения в 6 раз меньше кв. корня из 3.

(*Ю.В. Максимачев, Т.Н. Стрелкова, Б.К. Галякевич*)

Ответ: −14,6.

Решение. 1. Разобьем процесс движения на 2 этапа: подъем и спуск

2. Рассмотрим первый этап - подъем

3. Изобразим на рисунке 19 наклонную плоскость, тело, направление оси и силы, действующие на тело

4. По определению работы постоянной силы

$$A_{F_{\text{тр}}} = -F_{\text{тр}}S \qquad (1)$$

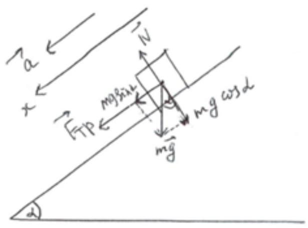

Рис. 19

5. Так как $F_{\text{тр}} = \mu N$ и $N = mg\cos\alpha$, подставив числовые значения, получим

$$F_{\text{тр}} = \mu mgcos\alpha = 1 \text{ (Н)} \qquad (2)$$

6. Спроецируем уравнение второго закона Ньютона $F_{\text{рез}} = ma$ на ось x

$$\mu mg\cos\alpha + mg\sin\alpha = ma \qquad (3)$$

7. Решая (3) и подставив числовые значения, получим

$$a = g(\mu\cos\alpha + \sin\alpha) = 10\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) = 7.5\ (\frac{\text{м}}{\text{с}^2}) \qquad (4)$$

8. Для произвольного момента времени при равноускоренном движении справедливо соотношение

$$v_0^2 - v^2 = 2aS_{\text{подъем}} \qquad (5)$$

тогда

$$S_{\text{подъем}} = \frac{v_0^2}{2\text{a}} = 9.6\ (\text{м}) \qquad (6)$$

9. Согласно (1)

$$A_{F_{\text{тр}}\text{подъем}} = -F_{\text{тр}}S_{\text{подъем}} = -9.6\ (\text{Дж}) \qquad (7)$$

10. Определим время подъема. Для этого приравняем к нулю скорость движения вдоль плоскости

$$v = v_0 - at_{\text{подъем}} = 0$$

тогда

$$t_{\text{подъем}} = \frac{v_0}{a} = 1.6\ (\text{с}) \qquad (8)$$

11. Рассмотрим второй этап - спуск
12. Изобразим на рисунке 20 наклонную плоскость, тело, направление оси и силы, действующие на тело
13. Учитывая (8), определим время спуска

$$t_{\text{спуск}} = t - t_{\text{подъем}} = 3{,}6 - 1{,}6 = 2\ (\text{с}) \qquad (9)$$

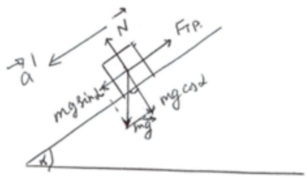

Рис. 20

14. Определим дистанцию спуска

$$S_{\text{спуск}} = \frac{a' t_{\text{спуск}}^2}{2} \qquad (10)$$

15. Спроецируем уравнение второго закона Ньютона $F_{\text{рез}} = ma$ на ось x

$$mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = ma' \qquad (11)$$

тогда

$$a' = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) = g\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2.5\ (\frac{\text{м}}{\text{с}^2}) \qquad (12)$$

16. Подставив (12) в (10), получим

$$S_{\text{спуск}} = 5\ (\text{м})$$

17. Согласно (1)

$$A_{F_{\text{тр}}\text{спуск}} = -F_{\text{тр}}S_{\text{спуск}} = -5\ (\text{Дж}) \qquad (13)$$

18. Складываем (7) и (13), получим

$$A_{F_{\text{тр}}} = A_{F_{\text{тр}}\text{подъем}} + A_{F_{\text{тр}}\text{спуск}} = -9.6 - 5 = -14.6\ (\text{Дж})$$

11.7. (5 баллов) При изотермическом расширении 2 молям идеального газа сообщено 249 Дж теплоты. Затем газ перевели в начальное состояние путем изобарического сжатия и изохорического нагревания. Работа газа за цикл равна 83 Дж.

[7] Определить разность максимальной и минимальной температуры газа в цикле.

(*Ю.В. Максимачев, Т.Н. Стрелкова, Б.К. Галякевич*)

Ответ: 10.

Решение. 1. Изобразим на рисунке 21 график рассматриваемого цикла

2. Так как рассматривается цикл, то начальное и конечное состояния совпадают и, следовательно, полное изменение внутренней энергии рано нулю. Поэтому из первого закона термодинамики

$$A = Q_1 - Q_2 \qquad (1)$$

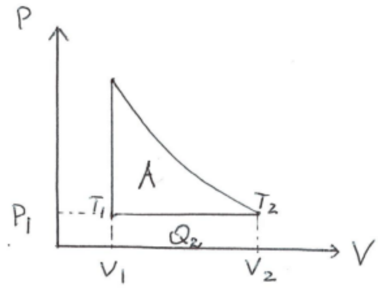

Рис. 21

3. Определим количество тепла, потерянного в ходе изобарического сжатия и изохорического нагревания

$$Q_2 = Q_1 - A = 249 - 83 = 166 \text{ (Дж)} \qquad (2)$$

4. Если рассмотреть суммарный процесс, состоящий из изобарического сжатия и изохорического нагревания, то в начальной и конечной точках температура газа одинаковая и, следовательно, изменение внутренней энергии рано нулю. Поэтому количество тепла в суммарном процессе равно работе при изобарическом сжатии (так как при изохорическом нагревании работа равна нулю)

$$Q_2 = P_1(V_2 - V_1) = P_1 \Delta V \qquad (3)$$

5. Тогда из уравнения Майкельсона - Менделеева

$$Q_2 = P_1 \Delta V = \nu R \Delta T \qquad (4)$$

6. Преобразуем (4) и подставляем числовые значения

$$\Delta T = \frac{Q_2}{\nu R} = \frac{166}{16.6} = 10 \text{ (K)} \qquad (5)$$

7. Очевидно, что $T_1 = T_{min}$, т.к. $P_1 = P_{min}$ и $V_1 = V_{min}$ (см. рис. 21)

8. Докажем, что $T_2 = T_{max.}$ Выберем и зафиксируем V, такое что $V_1 < V < V_2$; ему соответствуют 2 значения давления p' и p, причем $p' > p$. Так как $V = const$, то $T' > T$, следовательно температура изотермы выше температуры изобары при любом $V_1 < V < V_2$, т.к. T_2 - температура изотермы, то $T_2 = T_{max}$.

9. Следовательно

$$T_{max} - T_{min} = 10 \text{ (K)}$$

11.8. (6 баллов) Бусинка может свободно скользить по обручу радиусом 4,5 м, который вращается относительно вертикальной оси, проходящей через его центр с угловой скоростью 2 рад/с.

[8] На какую максимальную высоту относительно нижнего положения поднимется бусинка? Ось лежит в плоскости обруча.

(*Ю.В. Максимачев, Т.Н. Стрелкова, Б.К. Галякевич*)

Ответ: 2 (допускается 2,0).

Решение. 1. Изобразим (рис. 22) обруч и силы, действующие на бусинку при некотором угле отклонения от вертикали

2. Спроецируем уравнение 2 закона Ньютона $\vec{F_{рез}} = m\vec{a}$ на вертикальную и горизонтальную оси, соответственно

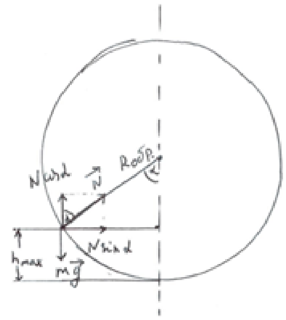

Рис. 22

$$N\cos\alpha - mg = 0 \qquad (1)$$

(так как $a_y = 0$)

$$N\sin\alpha = ma_{цс} = m\omega^2 R_{обр}\sin\alpha \qquad (2)$$

3. Преобразуем (1) и (2) и запишем в виде системы уравнений

$$\begin{cases} N\cos\alpha = mg \\ N = m\omega^2 R_{обр} \end{cases} \qquad (3)$$

4. Из (3) получаем

$$\cos\alpha = \frac{g}{\omega^2 R_{обр}} \qquad (4)$$

5. Используя обозначения на рисунке и формулу (4) и подставив числовые значения, получим

$$h_{max} = R_{обр} - R_{обр}\cos\alpha = R_{обр} - R_{обр}\frac{g}{\omega^2 R_{обр}} = 4.5 - 4.5 * \frac{5}{9} = 2 \text{ (м)}$$

11.9. (6 баллов) Два шарика массами 0,2 г и 0,8 г и зарядами 0,3 мкКл и 0,2 мкКл соединены тонкой нитью длиной 20 см и движутся вдоль силовой линии однородного электрического поля с напряженностью 10 кВ/м, направленной вертикально вниз.

[9] Определить в миллиньютонах модуль силы натяжения нити.

(*Ю.В. Максимачев, Т.Н. Стрелкова, Б.К. Галякевич*)

Ответ: 11,5 или 15,5.

Решение. 1. Изобразим на рисунке 23 нить, направления оси и вектора напряженности электрического поля и силы, действующие на оба шарика

2. Задача - одномерная, все силы направлены вдоль оси x. Запишем уравнение второго закона Ньютона для каждого из шариков

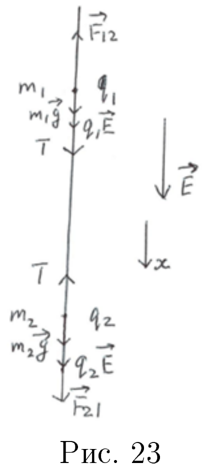

Рис. 23

$$\vec{F_{рез}} = m\vec{a} \qquad (1)$$

3. По 3 закону Ньютона: $F_{12} = F_{21}$

4. Спроецируем уравнение (1) для каждого из шариков на ось x.

$$T + q_1E + m_1g - F_{12} = m_1a \qquad (2)$$

$$F_{21} + q_2E + m_2g - T = m_2a \qquad (3)$$

Так как шарики движутся вместе, у них одинаковые ускорения.

5. Разделим (3) на (2) и подставим числовые значения

$$\frac{F_{21} + q_2E + m_2g - T}{T + q_1E + m_1g - F_{12}} = \frac{m_2a}{m_1a} = \frac{8 * 10^{-4}}{2 * 10^{-4}} = 4 \qquad (4)$$

то есть

$$F_{21} + q_2E + m_2g - T = 4T + 4q_1E + 4m_1g - 4F_{12} \qquad (5)$$

6. Так как $\frac{m_2}{m_1} = 4$, из (5) получим

$$T = F_{21} + \frac{E(q_2 - 4q_1)}{5} = 9*10^9*\frac{q_1 q_2}{c^2} - \frac{E(4q_1 - q_2)}{5} = 9*10^9\frac{6*10^{-14}}{0.04} + \frac{10\,(8*10^{-4} - 8*10^{-4}) - 10^4(12*10^{-7}}{5}$$

$$= \frac{9*6*10^{-3}}{4} - \frac{10*10^{-3}}{5} = 11.5*10^{-3}\text{Н} = 11.5\ (\text{мН})$$

Возможный ответ: 15,5 (если поменять местами шарики)

Международная физическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2023–2024 учебный год. Отборочный этап

Таблица констант

Ускорение свободного падения	g = 10 м/c^2
Скорость света	c = $3 \cdot 10^8$ м/с
Универсальная газовая постоянная	R = 8,3 Дж/(моль·К)
Модуль заряда электрона	e = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл
Число Авогадро	NA = $6 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$
Коэффициент в законе Кулона	k= $9 \cdot 10^9$ Нм^2/Кл^2
Молярная масса водорода	$M_{H2} = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль
Постоянная Планка	h = $6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Дж·с
Молярная масса гелия	$M_{He} = 4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль
Электронвольт	1 эВ = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж
$\pi = 3{,}14$	$\pi^2 = 10$
$\sqrt{2} = 1{,}41$	$\sqrt{3} = 1{,}73$