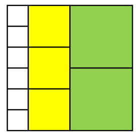
Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2023-2024 учебный год. Отборочный этап

Задачи для 5 класса

Работы сдаются в электронном виде (например, в виде сканов или doc-файлов с текстом), подробности на странице formulo.org/ru/olymp/2023-math-ru/. Последний срок сдачи — **10 ноября 2023 года в 23:59:59 по UTC** (то есть 11 ноября в 02:59:59 по московскому времени).

Работа должна быть сделана самостоятельно. В большинстве задач нужны не только ответы, но и полные обоснования. В работе не должно быть личных данных участника, то есть **подписывать работу не следует**.

1. Можно ли разрезать какой-нибудь квадрат на 12 квадратов пяти различных размеров? (Каждый из пяти размеров должен встречаться хотя бы один раз.) **Примечание.** Справа приведён пример разрезания квадрата на 11 квадратов трёх различных размеров. (*А. А. Теслер*)



2. Катя написала на доске пример на умножение и зашифровала его по правилам буквенных ребусов так: $TRIO \times 111 = JARMILO$ (одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные). Найдите хотя бы одно решение этого ребуса. (*П. Д. Муленко*)

   Примечание. В переводе с языка эсперанто «trio» — тройка, «jarmilo» — тысячелетие.

3. Пятиклассник Паша хочет во время летних каникул регулярно ходить в бассейн. Он планирует каждую неделю тренироваться 2 дня утром и вечером и 4 дня — только вечером. При этом он не сможет тренироваться и утром, и вечером два дня подряд. Он хочет спланировать свои тренировки на неделю и придерживаться этого расписания всё лето. Сколькими способами он может это сделать? (*Л. С. Корешкова*)

4. Турист Олег посетил деревню Хитрецово, в которой три касты: *рыцари*, которые отвечают «Да», если то, о чём их спрашивают, верно, и «Нет», если неверно; *лжецы*, действующие наоборот; и *подражатели*, которые повторяют последнюю услышанную фразу. Олег подошёл к шести жителям и спросил (один раз), являются ли они подражателями, на что услышал в ответ 3 разных фразы, каждую по два раза. Сколько среди этих шести жителей могло быть подражателей? Укажите все возможные варианты. (*П. Д. Муленко*)

5. Маленький мальчик Андрюша очень боится грозы, поэтому, чтобы заснуть, считает овец. При этом, когда до него доносится гром, он (от испуга) считает очередную овцу за две. Овцы пробегают раз в k секунд (где k — целое число больше двух). Гром раздаётся через равные промежутки времени, причём каждый раскат грома совпадает с появлением какой-то овцы. Первая овца пробежала во время грома, за первые 60 секунд включительно (и с учётом первой овцы и первого раската) гром ударил трижды, а за первые 90 секунд включительно он насчитал 23 овцы. Как часто бегают овцы? (*П. Д. Муленко*)

6. После инцидента с Гарри Поттером в Хогвартсе отменили ограничение на число участников в Турнире Нескольких Волшебников, зато ввели предварительное испытание: свободный чемпионат по волшебным дуэлям, в котором участники в свободном порядке выбирали себе соперников и устраивали дуэль (ничьих не бывает). Проигравший два раза из Турнира выбывает. Когда все приняли участие в трёх дуэлях, оказалось, что в Турнире остались всего 2 участника, причём оба ни разу не проиграли. Сколько же участников соревновались за участие в Турнире Нескольких Волшебников? Для каждого возможного количества приведите пример. (*П. Д. Муленко*)

7. Какое наибольшее количество попарно различных натуральных чисел, не больших 10, можно выбрать так, чтобы для любого числа N из выбранных было верно, что произведение всех остальных чисел нацело делится на N? (*С. П. Павлов*)

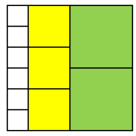
Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2023-2024 учебный год. Отборочный этап

Задачи для 6 класса

Работы сдаются в электронном виде (например, в виде сканов или doc-файлов с текстом), подробности на странице formulo.org/ru/olymp/2023-math-ru/. Последний срок сдачи — **10 ноября 2023 года в 23:59:59 по UTC** (то есть 11 ноября в 02:59:59 по московскому времени).

Работа должна быть сделана самостоятельно. В большинстве задач нужны не только ответы, но и полные обоснования. В работе не должно быть личных данных участника, то есть **подписывать работу не следует**.

1. Можно ли разрезать какой-нибудь квадрат на 12 квадратов пяти различных размеров? (Каждый из пяти размеров должен встречаться хотя бы один раз.) **Примечание.** Справа приведён пример разрезания квадрата на 11 квадратов трёх различных размеров. (*А. А. Теслер*)



2. Катя написала на доске пример на умножение и зашифровала его по правилам буквенных ребусов так: $TRIO \times 111 = JARMILO$ (одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные). Найдите наименьшее возможное значение числа $TRIO$ (и докажите, что оно наименьшее возможное). (*П. Д. Муленко*)

   Примечание. В переводе с языка эсперанто «trio» — тройка, «jarmilo» — тысячелетие.

3. Сколькими способами можно расставить в вершинах куба числа 1, 2, 3 или 4 при условии, что сумма чисел, лежащих в вершинах любой грани, должна быть кратна 4? Варианты, отличающиеся поворотом или отражением куба, считаются различными; каждое из четырёх чисел можно использовать любое число раз (в том числе и не использовать вовсе). (*Л. С. Корешкова*)

4. В деревне Хитрецово живут 10 человек: *рыцари*, которые отвечают «Да», если то, о чём их спрашивают, верно, и «Нет», если неверно; *лжецы*, действующие наоборот; и *подражатели*, которые повторяют последнюю услышанную фразу. Новый глава деревни решил узнать, кто есть кто, для чего выстроил их в колонну и спросил (один раз): «Сосед перед вами — рыцарь?», а дальше каждый ответил по очереди от первого до последнего. Среди ответов прозвучало ровно 6 раз «Да» и ровно 1 раз «Нет». Какое наибольшее число подражателей могло быть среди жителей? (*П. Д. Муленко*)

5. Маленький мальчик Андрюша очень боится грозы, поэтому, чтобы заснуть, считает овец. При этом, когда до него доносится гром, он (от испуга) считает очередную овцу за две. Овцы пробегают раз в k секунд (где k — целое число больше двух). Гром раздаётся через равные промежутки времени, причём каждый раскат грома совпадает с появлением какой-то овцы. Первая овца пробежала во время грома, и, начиная отсчёт времени с этого момента (то есть с учётом первой овцы), на 60-й секунде Андрюша посчитал 16-ю овцу, а на 100-й секунде — 26-ю овцу. Как часто бьют молнии? (*П. Д. Муленко*)

6. После инцидента с Гарри Поттером в Хогвартсе отменили ограничение на число участников в Турнире Нескольких Волшебников, зато ввели предварительное испытание: свободный чемпионат по волшебным дуэлям, в котором участники в свободном порядке выбирали себе соперников и устраивали дуэль (ничьих не бывает). Проигравший два раза из Турнира выбывает. Когда все приняли участие в трёх дуэлях, оказалось, что в Турнире остались всего 5 участников, причём только трое из них ни разу не проиграли. Сколько же участников соревновались за участие в Турнире Нескольких Волшебников? Для каждого возможного количества приведите пример. (*П. Д. Муленко*)

7. Найдите как можно большее натуральное число с попарно различными цифрами, обладающее следующим свойством: любое двузначное число, образованное двумя соседними цифрами в порядке их следования в числе, является простым. (Например, таким свойством обладает число 473, поскольку 47 и 73 — простые числа.) (*С. П. Павлов*)

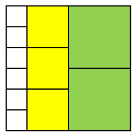
Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2023-2024 учебный год. Отборочный этап

Задачи для 7 класса

Работы сдаются в электронном виде (например, в виде сканов или doc-файлов с текстом), подробности на странице formulo.org/ru/olymp/2023-math-ru/. Последний срок сдачи — **10 ноября 2023 года в 23:59:59 по UTC** (то есть 11 ноября в 02:59:59 по московскому времени).

Работа должна быть сделана самостоятельно. В большинстве задач нужны не только ответы, но и полные обоснования. В работе не должно быть личных данных участника, то есть **подписывать работу не следует**.

1. Можно ли разрезать какой-нибудь квадрат на 10 квадратов пяти различных размеров? (Каждый из пяти размеров должен встречаться хотя бы один раз.) **Примечание.** Справа приведён пример разрезания квадрата на 11 квадратов трёх различных размеров. (*А. А. Теслер*)



2. На доске написано пятизначное число. Рядом написали четырёхзначное число, полученное из исходного вычеркиванием средней цифры (например, если было написано 20723, то рядом написано 2023). Когда результат деления исходного пятизначного числа на это четырёхзначное будет целым? Найдите все такие пятизначные числа. (*Л. С. Корешкова*)
3. Сколькими способами можно расставить в вершинах куба числа 1, 2, 3 или 4 при условии, что сумма чисел, лежащих в вершинах любой грани, должна быть кратна 4? Варианты, отличающиеся поворотом или отражением куба, считаются различными; каждое из четырёх чисел можно использовать любое число раз (в том числе и не использовать вовсе). (*Л. С. Корешкова*)
4. В деревне Хитрецово живут 10 человек: *рыцари*, которые отвечают «Да», если то, о чём их спрашивают, верно, и «Нет», если неверно; *лжецы*, действующие наоборот; и *подражатели*, которые повторяют последнюю услышанную фразу. Новый глава деревни решил узнать, кто есть кто, для чего выстроил их в колонну и спросил (один раз): «Сосед перед вами — рыцарь?», а дальше каждый ответил по очереди от первого до последнего. Среди ответов прозвучало ровно 6 раз «Да» и ровно 1 раз «Нет». Затем он так же спросил всех, кроме последнего: «Сосед за вами — лжец?» На этот раз среди ответов снова прозвучало ровно 6 раз «Да». Какое наибольшее число лжецов могло быть среди жителей? (*П. Д. Муленко*)
5. Маленький мальчик Андрюша очень боится грозы, поэтому, чтобы заснуть, считает овец. При этом, когда до него доносится гром, он (от испуга) вычитает очередную овцу, а не прибавляет. Овцы пробегают раз в k секунд (где k — целое число больше двух). Гром раздаётся через равные промежутки времени, причём каждый раскат грома совпадает с появлением какой-то овцы. Начиная отсчёт времени с первой овцы, на 60-й секунде Андрюша посчитал 8-ю овцу, а на 100-й секунде — 12-ю овцу. Как часто бьют молнии? (*П. Д. Муленко*)
6. После инцидента с Гарри Поттером в Хогвартсе отменили ограничение на число участников в Турнире Нескольких Волшебников, зато ввели предварительное испытание: свободный чемпионат по волшебным дуэлям, в котором участники в свободном порядке выбирали себе соперников и устраивали дуэль (ничьих не бывает). Проигравший три раза из Турнира выбывает. Когда все приняли участие в четырёх дуэлях, оказалось, что в Турнире остались аккурат трое участников. При каком наибольшем числе участников такое могло произойти? Не забудьте привести пример. (*П. Д. Муленко*)
7. В выражении $\dfrac{a+b}{c+d-e}+\dfrac{f+g}{h+i-k}$ буквами обозначены попарно различные цифры. Чему равно наибольшее возможное значение этого выражения? (*С. П. Павлов*)

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2023-2024 учебный год. Отборочный этап

Задачи для 8 класса

Работы сдаются в электронном виде (например, в виде сканов или doc-файлов с текстом), подробности на странице formulo.org/ru/olymp/2023-math-ru/. Последний срок сдачи — **10 ноября 2023 года в 23:59:59 по UTC** (то есть 11 ноября в 02:59:59 по московскому времени).

Работа должна быть сделана самостоятельно. В большинстве задач нужны не только ответы, но и полные обоснования. В работе не должно быть личных данных участника, то есть **подписывать работу не следует**.

1. Для каких натуральных N верно, что квадрат можно разрезать на N квадратов, среди которых нет одинаковых, и один шестиугольник? (*А. А. Теслер*)

2. Катя написала на доске два числа, после чего зашифровала их по правилам буквенных ребусов (одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные). Получились слова $FORMULO$ и $JARMILO$. Какое минимальное и максимальное значения может принимать разность между исходными числами? (*А. А. Теслер*)

   Примечание. В переводе с языка эсперанто «formulo» — формула, «jarmilo» — тысячелетие.

3. В треугольнике ABC на стороне BC взята такая точка D, что $AD + AC = BC$. Известно, что $\angle ACD = 20^\circ$, $\angle CAD = 120^\circ$. Найдите величину угла B. (*С. П. Павлов*)

4. Составителям олимпиады в качестве зарплаты достались 99 бубликов. Первый взял 1, 2 или 3 бублика. Второй забрал на один больше или на один меньше, чем первый. Третий — на один больше или на один меньше, чем второй. И так далее: каждый человек берёт себе на один бублик больше или на один меньше, чем предыдущий. В результате последний составитель как раз забрал все оставшиеся бублики. Определите минимальное возможное количество составителей. (*Л. С. Корешкова*)

5. Сколькими способами можно расставить в вершинах куба числа 1, 2, 3 или 4 при условии, что сумма чисел, лежащих в вершинах любой грани, должна быть кратна 4? Варианты, отличающиеся поворотом или отражением куба, считаются различными; каждое из четырёх чисел можно использовать любое число раз (в том числе и не использовать вовсе). (*Л. С. Корешкова*)

6. На острове живут 2023 человека. Некоторые из них дружат между собой (если А дружит с Б, то и Б дружит с А), причём у каждого не более 10 друзей. На остров едет бригада врачей, которые собираются привить часть жителей. Требуется, чтобы у каждого, кто останется не привит, все друзья были привиты. Какое минимальное количество доз вакцины врачи должны взять с собой, чтобы их гарантированно хватило? (*О. А. Пяйве*)

7. Найдите все целочисленные решения уравнения $x^2(y-1) + y^2(x-1) = 1$. (*С. П. Павлов*)

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2023-2024 учебный год. Отборочный этап

Задачи для 9 класса

Работы сдаются в электронном виде (например, в виде сканов или doc-файлов с текстом), подробности на странице formulo.org/ru/olymp/2023-math-ru/. Последний срок сдачи — **10 ноября 2023 года в 23:59:59 по UTC** (то есть 11 ноября в 02:59:59 по московскому времени).

Работа должна быть сделана самостоятельно. В большинстве задач нужны не только ответы, но и полные обоснования. В работе не должно быть личных данных участника, то есть **подписывать работу не следует**.

1. Для каких натуральных N верно, что квадрат можно разрезать на N квадратов, среди которых нет одинаковых, и один шестиугольник? (*А. А. Теслер*)

2. В выпуклом четырёхугольнике точки M и N — середины сторон BC и AD соответственно. Докажите, что середины отрезков AM, DM, BN, CN лежат на одной прямой или образуют параллелограмм. (*Л. С. Корешкова*)

3. График квадратичной функции, старший коэффициент которой равен 1, пересекает прямую $y = x$ в двух точках, расстояние между которыми равно 3, а прямую $y = -x$ — в двух точках, расстояние между которыми равно 2. А каково расстояние между точками, в которых он пересекает прямую $y = 2x$? (*А. А. Теслер*)

4. Дан куб $3 \times 3 \times 3$, из которого убирают по одному маленькому кубику так, чтобы тело «не разваливалось» (должна сохраняться возможность попасть из любого кубика в любой другой, переходя каждый раз в соседний по грани). В конце получается тело, площадь поверхности которого такая же, как у исходного куба. Какое максимальное количество кубиков могли убрать? (*Л. С. Корешкова*)

5. Сумма пяти натуральных чисел a, b, c, d, e равна 2023. Какое наименьшее значение может принять наибольшая из сумм $a+b$, $b+c$, $c+d$, $d+e$? (*С. П. Павлов*)

6. На сейфе есть 20 рубильников, расположенных в ряд. Каждый из них может находиться в положении 0 или 1. Сами переключатели скрыты, можно лишь давать сейфу следующие команды:
   а) переключить одновременно два соседних рубильника;
   б) переключить одновременно два рубильника, между которыми есть ровно один рубильник.
   Если все рубильники окажутся в положении 1, сейф откроется автоматически. Начальное положение рубильников неизвестно, но известно, что количество «нулей» и «единиц» одинаково. Можно ли открыть сейф? (*О. А. Пяйве*)

7. Найдите все целочисленные решения уравнения $x^2(y-1) + y^2(x-1) = 1$. (*С. П. Павлов*)

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2023-2024 учебный год. Отборочный этап

Задачи для 10 класса

Работы сдаются в электронном виде (например, в виде сканов или doc-файлов с текстом), подробности на странице formulo.org/ru/olymp/2023-math-ru/. Последний срок сдачи — **10 ноября 2023 года в 23:59:59 по UTC** (то есть 11 ноября в 02:59:59 по московскому времени).

Работа должна быть сделана самостоятельно. В большинстве задач нужны не только ответы, но и полные обоснования. В работе не должно быть личных данных участника, то есть **подписывать работу не следует**.

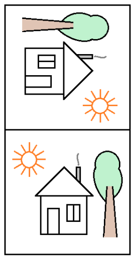
1. Найдите все такие положительные x, что последовательность $\{x\}$, $[x]$, x является геометрической прогрессией. (*Л. С. Корешкова*)

   Примечание. $[x]$ — это целая часть числа x, то есть наибольшее целое число, не превосходящее x; $\{x\}$ — дробная часть числа x, то есть разность между x и его целой частью.

2. На трёх сторонах выпуклого девятиугольника отмечено по одной точке (не совпадающей с вершинами). Внутри девятиугольника выбрали точку O и соединили с точками, отмеченными на сторонах. В результате девятиугольник разбился на три шестиугольника. Могут ли все три шестиугольника оказаться вписанными? (*А. А. Теслер*)

3. Дан куб $3\times3\times3$, из которого убирают по одному маленькому кубику так, чтобы тело «не разваливалось» (должна сохраняться возможность попасть из любого кубика в любой другой, переходя каждый раз в соседний по грани). В конце получается тело, площадь поверхности которого такая же, как у исходного куба. Какое максимальное количество кубиков могли убрать? (*Л. С. Корешкова*)

4. Петя разместил две одинаковых квадратных стеклянных пластины с рисунками, как показано справа. Для всякой точки, лежащей в нижнем квадрате, можно найти расстояние между ней и точкой верхнего квадрата, которая ей соответствует (то есть с которой она совпадёт, если совместить рисунки на пластинах). Для каких точек квадрата это расстояние минимально и чему оно равно, если сторона квадрата — 1 дециметр? (*А. А. Теслер*)

5. Числа a, b, c таковы, что $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}=6$, $\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{b}+\dfrac{a}{c}=2$. Чему может быть равно значение выражения $\dfrac{a^3}{b^3}+\dfrac{b^3}{c^3}+\dfrac{c^3}{a^3}$? (*С. П. Павлов*)

6. У калькулятора есть кнопка включения и ещё две кнопки — красная и синяя. При включении калькулятор показывает число 10, при нажатии на красную кнопку к числу на экране прибавляется 10, а при нажатии на синюю кнопку число умножается на 10. Мария включает калькулятор, а потом в случайном порядке нажимает красную и синюю кнопки — каждую по 10 раз (все последовательности нажатий равновероятны). Какова вероятность, что получилось число, меньшее 111 111 111 111? (*А. А. Теслер*)

7. Назовём натуральное число *красивым*, если у него сумма натуральных делителей, кратных 5, равна сумме чётных натуральных делителей и отлична от нуля. Сколько из чисел от 1 до 10^{12} красивые? (*А. А. Теслер*)

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2023-2024 учебный год. Отборочный этап

Задачи для 11 класса

Работы сдаются в электронном виде (например, в виде сканов или doc-файлов с текстом), подробности на странице formulo.org/ru/olymp/2023-math-ru/. Последний срок сдачи — **10 ноября 2023 года в 23:59:59 по UTC** (то есть 11 ноября в 02:59:59 по московскому времени).

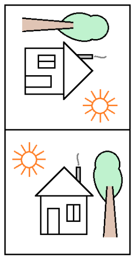
Работа должна быть сделана самостоятельно. В большинстве задач нужны не только ответы, но и полные обоснования. В работе не должно быть личных данных участника, то есть **подписывать работу не следует**.

1. Составителям олимпиады в качестве зарплаты достались 99 бубликов. Первый взял 1, 2 или 3 бублика. Второй забрал на один больше или на один меньше, чем первый. Третий — на один больше или на один меньше, чем второй. И так далее: каждый человек берёт себе на один бублик больше или на один меньше, чем предыдущий. В результате последний составитель как раз забрал все оставшиеся бублики. Определите минимальное возможное количество составителей. (*Л. С. Корешкова*)

2. В треугольнике ABC на стороне BC взята такая точка D, что $AD + AC = BC$. Известно, что $\angle ACD = 20^\circ$, $\angle CAD = 120^\circ$. Найдите величину угла B. (*С. П. Павлов*)

3. Числа a, b, c таковы, что $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = 6$, $\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} = 2$. Чему может быть равно значение выражения $\frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{c^3} + \frac{c^3}{a^3}$? (*С. П. Павлов*)

4. Петя разместил две одинаковых квадратных стеклянных пластины с рисунками, как показано справа. Для всякой точки, лежащей в нижнем квадрате, можно найти расстояние между ней и точкой верхнего квадрата, которая ей соответствует (то есть с которой она совпадёт, если совместить рисунки на пластинах). Для каких точек квадрата это расстояние минимально и чему оно равно, если сторона квадрата — 1 дециметр? (*А. А. Теслер*)



5. Функция f такова, что при любом x выполняется равенство $f(f(x)) = x^2 - x + 1$. Чему может равняться $f(0)$? (*С. П. Павлов*)

6. У калькулятора есть кнопка включения и ещё две кнопки — красная и синяя. При включении калькулятор показывает число 10, при нажатии на красную кнопку к числу на экране прибавляется 5, а при нажатии на синюю кнопку число умножается на 5. Мария включает калькулятор, а потом в случайном порядке нажимает красную и синюю кнопки — каждую по 10 раз (все последовательности нажатий равновероятны). Какова вероятность, что получилось число, которое можно получить на этом калькуляторе и менее чем за 20 нажатий? (*А. А. Теслер*)

7. Назовём натуральное число *красивым*, если у него сумма натуральных делителей, кратных 5, равна сумме чётных натуральных делителей и отлична от нуля. Сколько из чисел от 1 до 10^{12} красивые? (*А. А. Теслер*)