

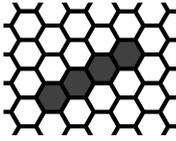
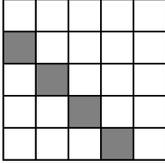
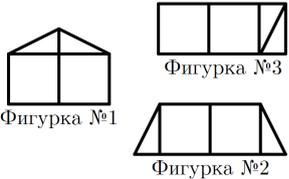


Задачи для 5 класса

Пользоваться справочной литературой, интернетом, калькуляторами и подобными средствами запрещено.

Пожалуйста, не подписывайте работу своими именем и фамилией, а укажите свой код участника.

Не публикуйте и не обсуждайте задачи в интернете до 30 марта 2023 года!

1. Том и Джерри играют на бесконечном во все стороны поле из шестиугольных клеток. Изначально только 4 клетки чёрные, остальные — белые (см. рисунок). Игроки по очереди перекрашивают клетки, начиная с Тома: Том своим ходом перекрашивает одну чёрную клетку в белый цвет, а Джерри — одну белую в чёрный. При этом запрещено перекрашивать ту клетку, которую только что покрасил соперник. Если в какой-то момент на поле не окажется двух чёрных клеток, соседних друг с другом, Том выиграет. Сможет ли Джерри продолжать игру бесконечно и почему?
(О. А. Пяйве)

2. Есть 49 одинаковых квадратиков. Составьте из них два прямоугольника так, так чтобы их периметры отличались в 2 раза. Лишних квадратиков остаться не должно.
(Л. С. Корешкова)
3. В клетках квадрата 5×5 стоят натуральные числа от 1 до 5 так, что в каждом столбце, каждой строке и каждой из двух главных диагоналей все числа различны. Может ли сумма чисел в клетках, закрашенных на рисунке, равняться 20?
(Л. С. Корешкова)

4. У Иры есть два одинаковых квадратика и два одинаковых треугольничка, из которых она сложила три фигурки, как показано на рисунке, а затем посчитала периметры этих фигур. У первой фигуры он оказался равен 26, у второй — 32, у третьей — 30. Найдите длины сторон треугольника.
(Л. С. Корешкова)

5. Участники весеннего математического лагеря в день числа π (14 марта) решили подарить друг другу квадраты, если просто знакомы, и круги, если дружат. Андрей обнаружил, что каждому мальчику подарили 3 круга и 8 квадратов, а каждой девочке — 2 квадрата и 9 кругов. А Катя подсчитала, что всего было подарено 4046 фигурок. Докажите, что кто-то из них ошибся.
(П. Д. Муленко)
6. Сколько чисел от 1 до 999 без цифр «0» записываются в римской системе счисления ровно на один символ длиннее, чем в десятичной?
(П. Д. Муленко)

Справка. Чтобы записать число римскими цифрами, надо разбить его на разрядные слагаемые, каждое разрядное слагаемое записать в соответствии с таблицей, а потом записать их последовательно от наибольшего к наименьшему. Например, пусть надо записать число 899, в соответствии с таблицей $800 = DCCC$, $90 = XC$, $9 = IX$, получаем $DCCCXCIX$.

1 I	10 X	100 C	1000 M
2 II	20 XX	200 CC	2000 MM
3 III	30 XXX	300 CCC	3000 MMM
4 IV	40 XL	400 CD	
5 V	50 L	500 D	
6 VI	60 LX	600 DC	
7 VII	70 LXX	700 DCC	
8 VIII	80 LXXX	800 DCCC	
9 IX	90 XC	900 CM	



Задачи для 6 класса

Пользоваться справочной литературой, интернетом, калькуляторами и подобными средствами запрещено.

Пожалуйста, не подписывайте работу своими именем и фамилией, а укажите свой код участника.

Не публикуйте и не обсуждайте задачи в интернете до 30 марта 2023 года!

1. Игорь и Паша играют в игру, по очереди ставя натуральные числа в вершины правильного шестиугольника (каждый может выбрать любую свободную вершину и поставить в неё любое натуральное число). После шести ходов, когда игра заканчивается, судья записывает на каждой стороне шестиугольника произведение чисел, стоящих в двух её концах. Затем все 12 чисел складываются. Если сумма нечётная, то выигрывает Игорь, а если чётная, то Паша.

Известно, что первым ходит Игорь. Кто из игроков сумеет выиграть при любых действиях соперника и как ему нужно действовать? (Л. С. Корешкова)

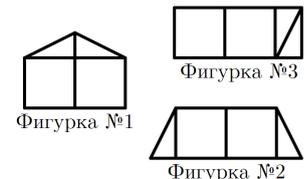
2. Есть 81 квадратик одинакового размера. Составьте из них два прямоугольника так, как чтобы их периметры были одинаковы. Лишних квадратиков остаться не должно. (Л. С. Корешкова)

3. Восемь мальчиков (Вася, Дима, Егор, Илья, Коля, Петя, Тема и Фёдя) встали друг за другом в каком-то порядке, после чего рассчитались от 1 до 8, при этом:

- номер Димы оказался втрое больше номера Ильи;
- Фёдя встал где-то после третьего мальчика, но до Коли;
- номер Васи вдвое меньше номера Пети;
- четвёртый мальчик сразу за Тёмой и где-то до Пети.

В каком порядке встали мальчики? Объясните, почему Вы так считаете. (П. Д. Муленко)

4. У Иры есть два одинаковых квадрата и два одинаковых треугольника, из которых она сложила три фигурки, как показано на рисунке, а затем посчитала периметры этих фигур. У первой фигуры он оказался равен 74, у второй — 84, у третьей — 82. Найдите длины сторон треугольника. (Л. С. Корешкова)



5. В весенний математический лагерь приехали от 50 до 70 детей. В честь дня числа π (14 марта) они решили подарить друг другу квадраты, если просто знакомы, и круги, если дружат. Андрей подсчитал, что каждому мальчику подарили 3 круга и 8 квадратов, а каждой девочке — 2 квадрата и 9 кругов. А Катя обнаружила, что всего кругов и квадратов было подарено одинаковое количество. Сколько детей приехали в лагерь? (П. Д. Муленко)

6. Сколько чисел от 1 до 999 записываются в римской системе счисления тем же количеством символов, что и в десятичной? (П. Д. Муленко)

Справка. Чтобы записать число римскими цифрами, надо разбить его на разрядные слагаемые, каждое разрядное слагаемое записать в соответствии с таблицей, а потом записать их последовательно от наибольшего к наименьшему. Например, пусть надо записать число 899, в соответствии с таблицей $800 = DCCC$, $90 = XC$, $9 = IX$, получаем $DCCCXCIX$.

1 I	10 X	100 C	1000 M
2 II	20 XX	200 CC	2000 MM
3 III	30 XXX	300 CCC	3000 MMM
4 IV	40 XL	400 CD	
5 V	50 L	500 D	
6 VI	60 LX	600 DC	
7 VII	70 LXX	700 DCC	
8 VIII	80 LXXX	800 DCCC	
9 IX	90 XC	900 CM	



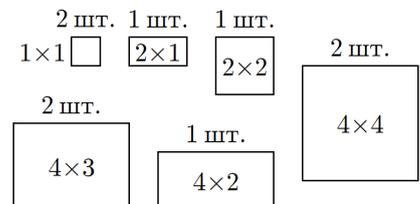
Задачи для 7 класса

Пользоваться справочной литературой, интернетом, калькуляторами и подобными средствами запрещено.

Пожалуйста, не подписывайте работу своими именем и фамилией, а укажите свой код участника.

Не публикуйте и не обсуждайте задачи в интернете до 30 марта 2023 года!

1. В кружке по математике собралось 20 человек, среди них есть ровно 49 пар людей, которые знали друг друга до начала занятий. Докажите, что кто-то знал не более 4 участников. (Л. С. Корешкова)
2. Есть 81 квадратик одинакового размера. Составьте из них два прямоугольника так, чтобы их периметры отличались в 2 раза. Лишних квадратиков остаться не должно. (Л. С. Корешкова)
3. На доске записаны два двузначных числа. Андрей их перемножил, получилось четырёхзначное число с первой цифрой 2. Паша их сложил и получил трёхзначное число. Если из числа Андрея вычеркнуть первую цифру, получится число Паши. Какие числа были записаны? (Л. С. Корешкова)
4. Дан равнобедренный треугольник ABC , в котором $\angle A = 30^\circ$, $AB = AC$. Точка D — середина BC . На отрезке AD выбрали точку P , а на стороне AB — точку Q , так что $PB = PQ$. Чему равен угол PQC ? (Л. С. Корешкова)
5. Несколько лет назад в компьютерной игре «Майнкрафт» было 9 различных картин (см. рисунок): по одной горизонтальной размерами 2×1 и 4×2 и квадратной 2×2 , а также по две штуки размерами 1×1 , 4×3 (горизонтальные) и 4×4 . Сколькими способами все 9 картин можно разместить на прямоугольной стене размером 12 блоков в длину и 6 в высоту? Картины не должны накладываться друг на друга; поворачивать их нельзя. (П. Д. Муленко)
6. В Тридевятом царстве 17 островов, на каждом из которых живут 119 человек. Жители царства делятся на две касты: рыцари, всегда говорящие правду, и лжецы, которые всегда лгут. Во время переписи населения каждого человека сперва спросили: «Не считая вас, на вашем острове живёт поровну рыцарей и лжецов?». Оказалось, что на 7 островах все ответили «Да», а на остальных все ответили «Нет». Затем каждого человека спросили: «Правда ли, что, считая вас, людей вашей касты меньше половины жителей острова?». На этот раз на каких-то 7 островах все ответили «Нет», а на остальных все ответили «Да». Сколько лжецов в царстве? (П. Д. Муленко)





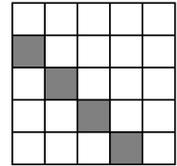
Задачи для 8 класса

Пользоваться справочной литературой, интернетом, калькуляторами и подобными средствами запрещено.

Пожалуйста, не подписывайте работу своими именем и фамилией, а укажите свой код участника.

Не публикуйте и не обсуждайте задачи в интернете до 30 марта 2023 года!

1. В клетках квадрата 5×5 стоят натуральные числа от 1 до 5 так, что в каждом столбце, каждой строке и каждой из двух главных диагоналей все числа различны. Может ли сумма чисел в клетках, закрашенных на рисунке, равняться 19?



(Л. С. Корешкова)

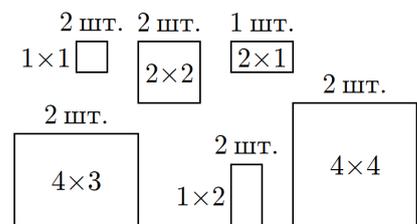
2. Где-то в океане есть остров Невезения, на котором расположены $2n$ городов, соединённых между собой дорогами так, что из каждого города выходит больше n дорог. Турист услышал в новостях, что какие-то два города пришлось закрыть на карантин, поэтому все дороги, ведущие к этим городам, были перекрыты. К сожалению, он не смог разобрать названия городов. Докажите, что турист, несмотря на перекрытия, всё ещё может доехать из любого незакрытого города в любой другой.
3. Решите уравнение: $[20x + 23] = 20 + 23x$. Напомним, что $[a]$ обозначает целую часть числа, то есть наибольшее целое число, не превосходящее a .
4. Дан четырёхугольник $ABCD$ с тупыми углами B и C . На диагоналях отмечены такие точки M и N , что $BM \parallel CD$, $CN \parallel AB$. Докажите, что $AD \parallel MN$.

(П. Д. Муленко)

(Л. С. Корешкова)

(Л. С. Корешкова)

5. Несколько лет назад в компьютерной игре «Майнкрафт» было 11 различных картин (см. рисунок): одна горизонтальная размерами 2×1 , и по две штуки размерами 1×1 , 1×2 (вертикальные), 2×2 , 4×3 (горизонтальные) и 4×4 . Сколькими способами все 11 картин можно разместить на прямоугольной стене размером 12 блоков в длину и 6 в высоту? Картины не должны накладываться друг на друга; поворачивать их нельзя.



(П. Д. Муленко)

6. В Тридевятом царстве 17 островов, на каждом из которых живут 119 человек. Жители царства делятся на две касты: рыцари, всегда говорящие правду, и лжецы, которые всегда лгут. Во время переписи населения каждого человека сперва спросили: «Не считая вас, на вашем острове живёт поровну рыцарей и лжецов?». Оказалось, что на 7 островах все ответили «Да», а на остальных все ответили «Нет». Затем каждого человека спросили: «Правда ли, что, считая вас, людей вашей касты меньше половины жителей острова?». На этот раз на каких-то 7 островах все ответили «Нет», а на остальных все ответили «Да». Сколько лжецов в царстве?

(П. Д. Муленко)



Задачи для 9 класса

Пользоваться справочной литературой, интернетом, калькуляторами и подобными средствами запрещено.

Пожалуйста, не подписывайте работу своими именем и фамилией, а укажите свой код участника.

Не публикуйте и не обсуждайте задачи в интернете до 30 марта 2023 года!

1. Паша и Игорь подбрасывают монетку. Если выпадает орёл, выигрывает Паша, если решка — Игорь. В первый раз проигравший заплатил победителю 1 рубль, во второй — 2 рубля, потом — 4, и так далее (каждый раз проигравший платит в 2 раза больше, чем на прошлом шаге). После 12 игр Паша стал на 2023 рубля богаче, чем был изначально. Сколько из этих игр он выиграл? (Л. С. Корешкова, А. А. Теслер)
2. Где-то в океане есть остров Невезения, на котором расположены несколько городов, соединённых между собой дорогами так, что случайный турист может попасть из любого города в любой другой. Оказалось, что если закрыть любые два города на карантин и перекрыть все ведущие в них дороги, то всё ещё можно проехать из любого из оставшихся городов в любой другой.
Турист случайным образом выбрал три дороги, никакие две из которых не ведут в один город, и хочет проехать по ним, начав и закончив свой маршрут в одном и том же городе, по пути не заезжая ни в какой из городов дважды. Всегда ли он сможет это сделать? (Е. С. Голикова)
3. Решите уравнение: $[20x + 23] = 20 + 23x$. Напомним, что $[a]$ обозначает целую часть числа, то есть наибольшее целое число, не превосходящее a . (Л. С. Корешкова)
4. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом A . На катете AC отмечена точка D такая, что $AD : DC = 1 : 3$, после чего построены окружности Γ_1 и Γ_2 с центрами A и C соответственно, проходящие через точку D . Γ_2 пересекает гипотенузу в точке E . Окружность Γ_3 с центром B и радиусом BE пересекает Γ_1 внутри треугольника в такой точке F , что угол AFB прямой. Найдите BC , если $AB = 5$. (П. Д. Муленко)
5. Даны шесть карточек, на которых написаны цифры 1, 2, 4, 5, 8 и запятая. Из них составляются всевозможные числа (каждую карточку нужно использовать ровно один раз, запятая не может стоять в начале или в конце числа). Чему равно среднее арифметическое всех таких чисел? (М. В. Карлукова)
6. На координатной плоскости отметили точки $A(0, 0)$ и $B(1000, 0)$, а также точки $C_1(1, 1)$, $C_2(2, 1)$, \dots , $C_{999}(999, 1)$. Потом провели всевозможные прямые AC_i и BC_i ($1 \leq i \leq 999$). Сколько целочисленных точек пересечения у всех этих прямых? (Целочисленная точка — это та, у которой обе координаты целые.) (О. А. Пяйве)



Задачи для 10 класса

Пользоваться справочной литературой, интернетом, калькуляторами и подобными средствами запрещено.

Пожалуйста, не подписывайте работу своими именем и фамилией, а укажите свой код участника.

Не публикуйте и не обсуждайте задачи в интернете до 30 марта 2023 года!

1. Найдите сумму всех корней уравнения:

$$\begin{aligned} \sqrt{2x^2 - 2024x + 1023131} + \sqrt{3x^2 - 2025x + 1023132} + \sqrt{4x^2 - 2026x + 1023133} = \\ = \sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{2x^2 - 2x + 2} + \sqrt{3x^2 - 3x + 3}. \end{aligned}$$

(Л. С. Корешкова)

2. Есть 8 белых кубиков одинакового размера. Марине нужно покрасить 24 грани кубиков в синий цвет, а остальные 24 грани — в красный. После этого Катя склеивает из них куб $2 \times 2 \times 2$. Если на поверхности куба столько же синих квадратов, сколько и красных, то Катя побеждает. Если нет, то побеждает Марина. Сможет ли Марина покрасить кубики так, чтобы Катя не смогла достичь цели?

(Л. С. Корешкова)

3. Любимая телеигра Пети называется «Лотерея на диване». В течение игры телезрители могут присылать СМС-сообщения с трёхзначными числами, содержащими только цифры 1, 2, 3 и 4. В конце игры ведущий называет трёхзначное число, также состоящее только из этих цифр. СМС считается выигрышной, если число в ней отличается от числа ведущего не более чем в одном разряде (например, если ведущий назвал число 423, то сообщения 443 и 123 выигрышные, а 243 и 224 — нет).

Петя хочет отправить как можно меньше сообщений таким образом, чтобы хотя бы одно точно было выигрышным. Сколько СМС ему придётся отправить?

(Л. С. Корешкова)

4. Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$ с прямым углом ADB . Через точку C проведена прямая $l \parallel AD$, на которой отмечена такая точка F , что угол BAF равен острому углу между диагоналями AC и BD , причём F и C по разные стороны от AB . Точка X такова, что $FХСА$ — параллелограмм. Докажите, что точка X лежит на BD .

(О. А. Пяйве)

5. Решите в простых числах уравнение $a^b + a + b = b^a$.

(О. А. Пяйве, П. Д. Муленко)

6. На столе лежат 28 конфет. Петя считает некоторые из них вкусными. Вася за один ход может указать любой набор конфет и спросить Петю, сколько из них вкусных. Как Васе гарантированно найти все вкусные конфеты... (а) за 21 ход; (б) за 20 ходов?

(А. А. Теслер, Е. Ю. Воронецкий)



Задачи для 11 класса

Пользоваться справочной литературой, интернетом, калькуляторами и подобными средствами запрещено.

Пожалуйста, не подписывайте работу своими именем и фамилией, а укажите свой код участника.

Не публикуйте и не обсуждайте задачи в интернете до 30 марта 2023 года!

1. Найдите сумму всех корней уравнения:

$$\begin{aligned} \sqrt{2x^2 - 2024x + 1023131} + \sqrt{3x^2 - 2025x + 1023132} + \sqrt{4x^2 - 2026x + 1023133} = \\ = \sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{2x^2 - 2x + 2} + \sqrt{3x^2 - 3x + 3}. \end{aligned}$$

(Л. С. Корешкова)

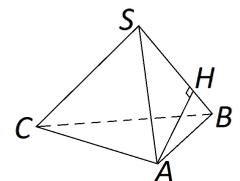
2. Есть 8 белых кубиков одинакового размера. Марине нужно покрасить 24 грани кубиков в синий цвет, а остальные 24 грани — в красный. После этого Катя склеивает из них куб $2 \times 2 \times 2$. Если на поверхности куба столько же синих квадратов, сколько и красных, то Катя побеждает. Если нет, то побеждает Марина. Сможет ли Марина покрасить кубики так, чтобы Катя не смогла достичь цели?

(Л. С. Корешкова)

3. Паша и Игорь подбрасывают монетку. Если выпадает орёл, выигрывает Паша, если решка — Игорь. В первый раз проигравший заплатил победителю 1 рубль, во второй — 2 рубля, потом — 4, и так далее (каждый раз проигравший платит в 2 раза больше, чем на прошлом шаге). В начале игры у Паши была однозначная сумма денег, а у Игоря — четырёхзначная, а в конце у Игоря стала двузначная, а у Паши — трёхзначная. Какое минимальное количество игр мог выиграть Паша? Игроки не могут уходить в минус.

(Л. С. Корешкова, А. А. Теслер)

4. На плоскости в ортогональной проекции изображена правильная пирамида $SABC$ (с основанием ABC) и высота AH грани SAB , как показано на рисунке. Как с помощью циркуля и линейки построить изображение центра сферы, описанной возле пирамиды?



(А. А. Теслер)

5. Решите в натуральных числах уравнение $a^b + a + b = b^a$. (О. А. Пяйве, Е. Ю. Воронецкий)
6. На столе лежат 28 конфет. Петя считает некоторые из них вкусными. Вася за один ход может указать любой набор конфет и спросить Петю, сколько из них вкусных. Как Васе гарантированно найти все вкусные конфеты... (а) за 21 ход; (б) за 20 ходов?

(А. А. Теслер, Е. Ю. Воронецкий)