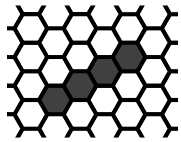
Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2022–2023 учебный год. Заключительный этап

# Решения задач для 5 класса

Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.
Для некоторых задач есть частные критерии, указанные ниже.

---

1. Том и Джерри играют на бесконечном во все стороны поле из шестиугольных клеток. Изначально только 4 клетки чёрные, остальные — белые (см. рисунок). Игроки по очереди перекрашивают клетки, начиная с Тома: Том своим ходом перекрашивает одну чёрную клетку в белый цвет, а Джерри — одну белую в чёрный. При этом запрещено перекрашивать ту клетку, которую только что покрасил соперник. Если в какой-то момент на поле не окажется двух чёрных клеток, соседних друг с другом, Том выиграет. Сможет ли Джерри продолжать игру бесконечно и почему? (*О. А. Пяйве*)



**Решение.** После первого хода Тома в любом случае останутся две чёрные соседние клетки (назовём их клетками $A$ и $B$). Джерри достаточно сделать «треугольник» из трёх клеток (то есть закрасить один из двух шестиугольников, соседних одновременно и с $A$, и с $B$ — назовём его $C$). Какую бы клетку из этих трёх Том ни перекрасил (пусть $A$), две другие будут оставаться соседними, то есть Джерри не проиграет. Более того, у Джерри будет возможность «восстановить» треугольник, закрасив другой шестиугольник, соседний с $B$ и $C$ с другой стороны. (Если же Том перекрасил четвёртую клетку, не входящую в треугольник, то Джерри может закрасить клетку в любом месте.) Таким образом, Джерри может действовать так, чтобы игра продолжалась бесконечно.

**Критерии.** Верный ответ, но неверная или отсутствующая стратегия Джерри — 0 баллов.

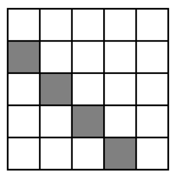
2. Есть 49 одинаковых квадратиков. Составьте из них два прямоугольника так, так чтобы их периметры отличались в 2 раза. Лишних квадратиков остаться не должно. (*Л. С. Корешкова*)

**Ответ:** $7 \times 4$ и $1 \times 21$ или $1 \times 33$ и $1 \times 16$.

**Решение.** Сумма их площадей равна 49 ($28 + 21$ в первом варианте и $33 + 16$ во втором), и их периметры действительно отличаются в 2 раза: в первом случае $2 \cdot (7 + 4) = 22$, $2 \cdot (1 + 21) = 44$; во втором $2 \cdot (1 + 16) = 34$, $2 \cdot (1 + 33) = 68$.

**Критерии.** Приведен верный пример без подсчетов, показывающих, что он подходит — 5 баллов. Хотя бы одна из сторон не является целым числом — 0 баллов.

3. В клетках квадрата $5 \times 5$ стоят натуральные числа от 1 до 5 так, что в каждом столбце, каждой строке и каждой из двух главных диагоналей все числа различны. Может ли сумма чисел в клетках, закрашенных на рисунке, равняться 20? (*Л. С. Корешкова*)

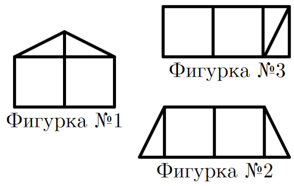


**Ответ:** нет.

**Решение.** Пусть может. Тогда, чтобы сумма чисел в закрашенных клетках равнялась 20, все числа в них должны быть «5». Тогда остаётся вписать только одно число «5», при этом обе диагонали данного числа все еще не содержат, поэтому его надо ставить в центр доски, но тогда в центральных строке и столбце будут по два числа «5». Противоречие.

**Критерии.** Озвучена идея, что в закрашенных клетках пятерки — 3 балла.

4. У Иры есть два одинаковых квадратика и два одинаковых треугольничка, из которых она сложила три фигурки, как показано на рисунке, а затем посчитала периметры этих фигур. У первой фигуры он оказался равен 26, у второй — 32, у третьей — 30. Найдите длины сторон треугольника. (*Л. С. Корешкова*)




**Ответ:** 3, 4, 5.

**Решение.** Обозначим стороны треугольничка: самую короткую назовём $k$, среднюю — $c$, длинную — $d$. Периметр фигурки №2 отличается от фигурки №1 двумя короткими сторонами треугольника, поэтому $k = (32 - 26) : 2 = 3$. Теперь можем найти среднюю сторону треугольника из фигурки №3 — действительно, её периметр состоит из двух коротких сторон и шести средних, поэтому $c = (30 - 2k) : 6 = 4$. Наконец, теперь из фигурки №1 найдём длинную сторону: $d = (26 - 4c) : 2 = 5$.

**Критерии.** Неверный ответ (кроме арифметической ошибки) и/или частичные рассуждения, никуда не ведущие — 0 баллов.

Верный ответ без какого-либо объяснения — 2 балла. Верный ответ с проверкой и/или подбором длин — 3 балла.

5. Участники весеннего математического лагеря в день числа $\pi$ (14 марта) решили подарить друг другу квадраты, если просто знакомы, и круги, если дружат. Андрей обнаружил, что каждому мальчику подарили 3 круга и 8 квадратов, а каждой девочке — 2 квадрата и 9 кругов. А Катя подсчитала, что всего было подарено 4046 фигурок. Докажите, что кто-то из них ошибся. (*П. Д. Муленко*)

**Решение.** Заметим, что каждому участнику лагеря подарили ровно $3 + 8 = 2 + 9 = 11$ фигурок. Тогда общее количество фигурок равно произведению 11 на количество участников, но 4046 не делится нацело на 11.

**Критерии.** Идея равного количества фигурок у участников — 3 балла.

Никуда не приводящие рассуждения о количестве мальчиков и/или девочек — 0 баллов.

6. Сколько чисел от 1 до 999 без цифр «0» записываются в римской системе счисления ровно на один символ длиннее, чем в десятичной? (*П. Д. Муленко*)

**Справка.** Чтобы записать число римскими цифрами, надо разбить его на разрядные слагаемые, каждое разрядное слагаемое записать в соответствии с таблицей, а потом записать их последовательно от наибольшего к наименьшему. Например, пусть надо записать число 899, в соответствии с таблицей 800 = DCCC, 90 = XC, 9 = IX, получаем DCCCXCIX.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 I | 10 X | 100 C | 1000 M |
| 2 II | 20 XX | 200 CC | 2000 MM |
| 3 III | 30 XXX | 300 CCC | 3000 MMM |
| 4 IV | 40 XL | 400 CD | |
| 5 V | 50 L | 500 D | |
| 6 VI | 60 LX | 600 DC | |
| 7 VII | 70 LXX | 700 DCC | |
| 8 VIII | 80 LXXX | 800 DCCC | |
| 9 IX | 90 XC | 900 CM | |

**Решение.** Заметим, что, независимо от разряда и других цифр числа, десятичная цифра $a$ записывается как:

- одна римская цифра при $a = 1$ и $a = 5$,
- две римские цифры при $a$, равном 2, 4, 6, 9,
- три римские цифры при $a = 3$ и $a = 7$,
- четыре римские цифры при $a = 8$.

Значит, в подходящих числах используются только цифры 1, 5 и ровно одна из цифр 2, 4, 6, 9 (иначе общая длина записи будет длиннее более чем на один символ). То есть подходят 4 однозначных числа, $4 \cdot 2 + 2 \cdot 4 = 16$ двузначных чисел и $4 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 4 = 48$ трёхзначных чисел. Итого 68 чисел.

**Критерии.** Верный ответ без обоснования — 2 балла.

Потерян один из описанных выше случаев или учетны лишние случаи — 0 баллов.

Неверно трактовано условие про отсутствие нуля (например, как «без учета нуля», то есть что длина римской записи числа должна быть на единицу больше количества ненулевых цифр — не более 3 баллов.

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2022–2023 учебный год. Заключительный этап

# Решения задач для 6 класса

Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.
Для некоторых задач есть частные критерии, указанные ниже.

---

1. Игорь и Паша играют в игру, по очереди ставя натуральные числа в вершины правильного шестиугольника (каждый может выбрать любую свободную вершину и поставить в неё любое натуральное число). После шести ходов, когда игра заканчивается, судья записывает на каждой стороне шестиугольника произведение чисел, стоящих в двух её концах. Затем все 12 чисел складываются. Если сумма нечётная, то выигрывает Игорь, а если чётная, то Паша.
Известно, что первым ходит Игорь. Кто из игроков сумеет выиграть при любых действиях соперника и как ему нужно действовать? (*Л. С. Корешкова*)

**Ответ:** Паша.

**Решение.** Пронумеруем вершины по кругу от 1 до 6 и мысленно разобьём на 3 пары диаметрально противоположных (1–4, 2–5, 3–6).

Паше, чтобы победить, следует ставить то же самое число, что поставил Игорь предыдущим ходом, во противоположную вершину. Тогда после окончания игры все числа в противоположных вершинах будут совпадать, поэтому и числа на противоположных рёбрах будут совпадать. Таким образом, сумма чисел в вершинах окажется чётной и сумма чисел на рёбрах тоже. Значит, и общая сумма будет чётной.

**Критерии.** Верный ответ без обоснования — 0 баллов.

Если в неверной стратегии Паши фигурирует симметрия или симметричная стратегия неверно обоснована — 3 балла.

2. Есть 81 квадратик одинакового размера. Составьте из них два прямоугольника так, так чтобы их периметры были одинаковы. Лишних квадратиков остаться не должно.
(*Л. С. Корешкова*)

**Ответ:** $3 \times 11$ и $6 \times 8$.

**Решение.** Сумма их площадей равна $33+48 = 81$, и их периметры действительно равны: $2 \cdot (3 + 11) = 2 \cdot (6 + 8) = 28$.

**Примечание.** Других подходящих пар прямоугольников нет.

**Критерии.** Приведен верный пример без подсчетов, показывающих, что он подходит — 5 баллов.

Хотя бы одна из сторон не является целым числом — 0 баллов.

3. Восемь мальчиков (Вася, Дима, Егор, Илья, Коля, Петя, Тема и Федя) встали друг за другом в каком-то порядке, после чего рассчитались от 1 до 8, при этом:

- номер Димы оказался втрое больше номера Ильи;
- Федя встал где-то после третьего мальчика, но до Коли;
- номер Васи вдвое меньше номера Пети;

- четвёртый мальчик сразу за Тёмой и где-то до Пети.

В каком порядке встали мальчики? Объясните, почему Вы так считаете. (*П. Д. Муленко*)

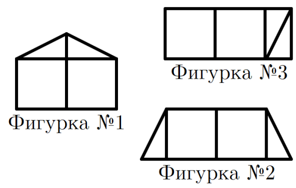
**Ответ:** Егор, Илья, Тёма, Вася, Федя, Дима, Коля, Петя.

**Решение.** Согласно четвёртому условию, Тёма стоит на третьем месте. Так как номер Димы делится на 3 по первому условию, а третий номер занят, то Дима имеет номер 6, а Илья — номер 2. Из третьего условия следует, что номер Пети — чётный и не равен 4 (так как Илья уже занял номер 2), так что Петя имеет номер 8, а Вася — 4. Тогда номера Феди и Коли получаются из второго условия, а Егор получает оставшийся номер 1.

**Критерии.** Правильный ответ без обоснования или только с проверкой выполнения условий — 1 балл.

Правильные объяснения расстановки пар ребят (Дима и Илья, Вася и Петя, Федя и Коля) — по 2 балла за каждую пару.

4. У Иры есть два одинаковых квадратика и два одинаковых треугольничка, из которых она сложила три фигурки, как показано на рисунке, а затем посчитала периметры этих фигур. У первой фигуры он оказался равен 74, у второй — 84, у третьей — 82. Найдите длины сторон треугольника. (*Л. С. Корешкова*)




**Ответ:** 5, 12, 13.

**Решение.** Обозначим стороны треугольничка: самую короткую назовём $k$, среднюю — $c$, длинную — $d$. Периметр фигурки №2 отличается от фигурки №1 двумя короткими сторонами треугольника, поэтому $k = (84 - 74) : 2 = 5$. Теперь можем найти среднюю сторону треугольника из фигурки №3 — действительно, её периметр состоит из двух коротких сторон и шести средних, поэтому $c = (82 - 2k) : 6 = 12$. Наконец, теперь из фигурки №1 найдём длинную сторону: $d = (74 - 4c) : 2 = 13$.

**Критерии.** Неверный ответ (кроме арифметической ошибки) и/или частичные рассуждения, никуда не ведущие — 0 баллов.

Верный ответ без какого-либо объяснения — 2 балла. Верный ответ с проверкой и/или подбором длин — 3 балла.

5. В весенний математический лагерь приехали от 50 до 70 детей. В честь дня числа $\pi$ (14 марта) они решили подарить друг другу квадраты, если просто знакомы, и круги, если дружат. Андрей подсчитал, что каждому мальчику подарили 3 круга и 8 квадратов, а каждой девочке — 2 квадрата и 9 кругов. А Катя обнаружила, что всего кругов и квадратов было подарено одинаковое количество. Сколько детей приехали в лагерь? (*П. Д. Муленко*)

**Ответ:** 60.

**Решение.** Обозначим количество мальчиков за $m$, а девочек — $d$. Тогда $3m+9d = 8m+2d$ (число кругов равно числу квадратов). Преобразуя, имеем $5m = 7d$, то есть количества мальчиков и девочек соотносятся как $7 : 5$. Значит, общее число детей делится на 12. Между 50 и 70 подходит только число 60.

**Критерии.** Неверно понятое условие (например, что поровну подарили мальчикам и девочкам) — 0 баллов.

Верный ответ без объяснения — 2 балла. Верный ответ с проверкой — 3 балла.

6. Сколько чисел от 1 до 999 записываются в римской системе счисления тем же количеством символов, что и в десятичной? (*П. Д. Муленко*)

**Справка.** Чтобы записать число римскими цифрами, надо разбить его на разрядные слагаемые, каждое разрядное слагаемое записать в соответствии с таблицей, а потом записать их последовательно от наибольшего к наименьшему. Например, пусть надо записать число 899, в соответствии с таблицей 800 = DCCC, 90 = XC, 9 = IX, получаем DCCCXCIX.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 I | 10 X | 100 C | 1000 M |
| 2 II | 20 XX | 200 CC | 2000 MM |
| 3 III | 30 XXX | 300 CCC | 3000 MMM |
| 4 IV | 40 XL | 400 CD | |
| 5 V | 50 L | 500 D | |
| 6 VI | 60 LX | 600 DC | |
| 7 VII | 70 LXX | 700 DCC | |
| 8 VIII | 80 LXXX | 800 DCCC | |
| 9 IX | 90 XC | 900 CM | |

**Решение.** Заметим, что, независимо от разряда и других цифр числа, десятичная цифра $a$ записывается как:

- ноль римских цифр при $a = 0$,
- одна римская цифра при $a = 1$ и $a = 5$,
- две римские цифры при $a$, равном 2, 4, 6, 9,
- три римские цифры при $a = 3$ и $a = 7$,
- четыре римские цифры при $a = 8$.

Таким образом, чтобы число соответствовало условию, оно должно:

1) либо состоять **только** из цифр 1 и 5,
2) либо содержать **пару** цифр 0 и $x$, где $x$ — одна из цифр 2, 4, 6 или 9 и, возможно, одну цифру 1 или 5,
3) либо состоять из одной цифры 3 или 7 и двух нулей.

Всего существует $2+2\cdot 2+2\cdot 2\cdot 2 = 14$ чисел первого типа и 2 числа третьего типа (DCC и CCC). Двухзначных чисел второго типа существует ровно 4, трехзначных — $2\cdot 2\cdot 4\cdot 2 = 32$ (2 способа поставить цифру «0», два способа выбрать место для односимвольной цифры, 4 способа написать двухсимвольную цифру и 2 способа — односимвольную). Всего $14 + 2 + 4 + 32 = 52$ числа.

**Критерии.** Верный ответ без обоснования — 2 балла.

Каждый из потерянных случаев, описанных выше — $-2$ балла.

Арифметическая ошибка в каждом из случаев — $-1$ балл.

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2022–2023 учебный год. Заключительный этап

# Решения задач для 7 класса

Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.
Для некоторых задач есть частные критерии, указанные ниже.

---

1. В кружке по математике собралось 20 человек, среди них есть ровно 49 пар людей, которые знали друг друга до начала занятий. Докажите, что кто-то знал не более 4 участников. (*Л. С. Корешкова*)

**Решение.** Докажем от противного: предположим, что все знали не менее 5 людей. Тогда до начала занятий было не менее $\dfrac{20 \cdot 5}{2} = 50$ пар знакомых людей. Противоречие.

**Критерии.** Задача решена в предположении, что каждый знал ровно 5 человек — 5 баллов.

2. Есть 81 квадратик одинакового размера. Составьте из них два прямоугольника так, так чтобы их периметры отличались в 2 раза. Лишних квадратиков остаться не должно. (*Л. С. Корешкова*)

**Ответ:** $3 \times 19$ и $3 \times 8$ или $3 \times 23$ и $1 \times 12$.

**Решение.** Сумма их площадей равна 81 ($57+24$ в первом варианте и $69+12$ во втором), и их периметры действительно отличаются в 2 раза: $2 \cdot (3+8) = 22$, $2 \cdot (3+19) = 44$ или $2 \cdot (1+12) = 26$, $2 \cdot (3+23) = 52$.

**Критерии.** Приведен верный пример без подсчетов, показывающих, что он подходит — 5 баллов.
В решении перепутаны площади и периметры — 0 баллов.

3. На доске записаны два двузначных числа. Андрей их перемножил, получилось четырёхзначное число с первой цифрой 2. Паша их сложил и получил трёхзначное число. Если из числа Андрея вычеркнуть первую цифру, получится число Паши. Какие числа были записаны? (*Л. С. Корешкова*)

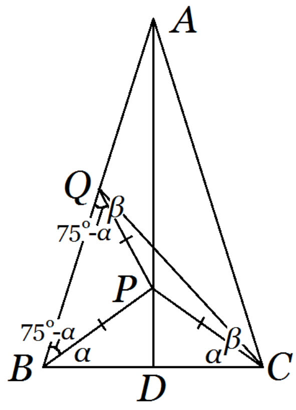
**Решение.** Если были записаны числа $x$ и $y$, то по условию $xy = 2000 + x + y$, то есть $xy - x - y + 1 = 2001$, или $(x-1)(y-1) = 2001$. Так как $2001 = 3 \cdot 23 \cdot 29$ и $x, y$ — двузначные, то $x-1$ и $y-1$) может равняться 23, 29, $23 \cdot 3$ или $29 \cdot 3$. Значит, $x, y \in \{24, 30, 70, 88\}$. Условию удовлетворяют только пары $\{24, 88\}$ и $\{30, 70\}$.

**Критерии.** Среди ответов присутствует неправильный — 0 баллов.
Найдено одно из решений — 1 балл, оба решения — 2 балла при отсутствии верного доказательства отсутствия других решений.
При верном ходе решения одно из решений потеряно в силу логической ошибки в одном из случаев перебора — 5 баллов.

4. Дан равнобедренный треугольник $ABC$, в котором $\angle A = 30^\circ$, $AB = AC$. Точка $D$ — середина $BC$. На отрезке $AD$ выбрали точку $P$, а на стороне $AB$ — точку $Q$, так что $PB = PQ$. Чему равен угол $PQC$? (*Л. С. Корешкова*)

**Ответ:** $15^\circ$.

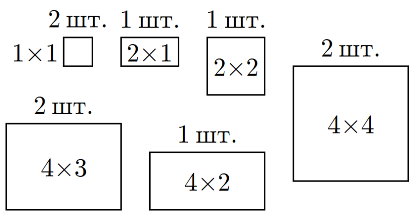
**Решение.** Так как $D$ — середина основания равнобедренного треугольника, то $AD$ — медиана, биссектриса и высота треугольника. Проведем отрезок $PC$. Так как $\Delta PDB = \Delta PDC$ (по двум сторонам и прямому углу между ними), то $PC = PB = PQ$, то есть все три треугольника $\Delta PBC$, $\Delta PBQ$ и $\Delta PQC$ являются равнобедренными.




Заметим, что $\angle ABD = \angle ACB = (180^\circ - 30^\circ) : 2 = 75^\circ$. Обозначим $\angle PBD = \angle PCD = \alpha$, откуда $\angle PBQ = \angle PQB = 75^\circ - \alpha$, а $\angle PQC = \angle PCQ = \beta$. Тогда сумма углов треугольника $\Delta QCB$ равна $2\alpha + 2 \cdot (75^\circ - \alpha) + 2\beta = 180^\circ$, откуда $\beta = 15^\circ$.

**Критерии.** Верный ответ без обоснования — 0 баллов.
Доказано, что $PB = PC = PQ$ — 3 балла.

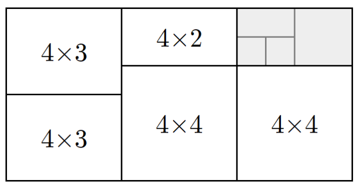
5. Несколько лет назад в компьютерной игре «Майнкрафт» было 9 различных картин (см. рисунок): по одной горизонтальной размерами $2 \times 1$ и $4 \times 2$ и квадратной $2 \times 2$, а также по две штуки размерами $1 \times 1$, $4 \times 3$ (горизонтальные) и $4 \times 4$. Сколькими способами все 9 картин можно разместить на прямоугольной стене размером 12 блоков в длину и 6 в высоту? Картины не должны накладываться друг на друга; поворачивать их нельзя. (*П. Д. Муленко*)



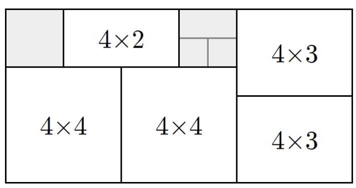

**Ответ:** 896.

**Решение.** Будем говорить, что две картины расположены в разных столбцах, если никакой блок первой картины не находится в одном столбце ни с каким блоком второй. Ясно, что картины $4 \times 4$ находятся в разных столбцах друг с другом и с картинами $4 \times 3$ при любом размещении. Таким образом, картины $4 \times 3$ обязательно будут строго друг под другом. Картины $4 \times 4$ при этом будут прижаты к полу или потолку, так как на стене ещё должны быть картины $4 \times 2$ и $2 \times 2$.

Рассмотрим случай, когда $4 \times 2$ находится строго над или под одной из картин $4 \times 4$. Ясно, что имеется $3 \cdot 2^2 \cdot 2^3 = 96$ способов расставить все картины ширины 4 (если объединение маленьких картин считать одной картиной $4 \times 2$, то получаем 3 способа выбрать столбец для картин $4 \times 3$, $2^2$ способов выбрать прижатие к полу/потолку в каждом из других столбцов и $2^3$ способов поменять друг с другом картины одного размера). Оставшиеся картины можно разместить $2^3 = 8$ способами в остатке стены $4 \times 2$, так как картины $2 \times 2$ и $2 \times 1$ должны быть в разных столбцах.




Пусть теперь картина $4 \times 2$ находится над или под сразу двумя картинами $4 \times 4$. Так как она и картины $2 \times 2$, $2 \times 1$ должны быть в разных столбцах, то имеется 16 способов расставить все картины ширины 4 (2 способа выбрать столбец для $4 \times 3$, 2



способа выбрать «потолок/пол» и $2^2 = 4$ способа переставить картины одного размера). Оставшиеся два участка $2 \times 2$ можно заполнить 8 способами.

Итого $8 \cdot (96 + 16) = 896$ вариантов.

**Критерии.** Показано, что три самые маленькие картины (две $1 \times 1$ и одна $1 \times 2$) можно поставить только вместе в виде квадрата $2 \times 2$ — 1 балл.

Приведены верные рассуждения о расположении картин $4 \times 4$ и $4 \times 3$ — еще 2 балла.

Любая качественная ошибка при вычислении способов расставить картины ширины 4 (например: не учтено, что количество вариантов в случаях, когда картина $4 \times 2$ расположена строго под или над картиной $4 \times 4$ либо под или над двумя из них, различно; или не учтено, что в случаях, когда картины $4 \times 4$ расположены в соседних столбцах, количество оставшихся случаев различно в зависимости от их положения (обе сверху, снизу или одна сверху, другая снизу)) — $-2$ балла.

Арифметическая ошибка в подсчете случаев — $-1$ балл.

6. В Тридевятом царстве 17 островов, на каждом из которых живут 119 человек. Жители царства делятся на две касты: рыцари, всегда говорящие правду, и лжецы, которые всегда лгут. Во время переписи населения каждого человека сперва спросили: «Не считая вас, на вашем острове живёт поровну рыцарей и лжецов?». Оказалось, что на 7 островах все ответили «Да», а на остальных все ответили «Нет». Затем каждого человека спросили: «Правда ли, что, считая вас, людей вашей касты меньше половины жителей острова?». На этот раз на каких-то 7 островах все ответили «Нет», а на остальных все ответили «Да». Сколько лжецов в царстве? (*П. Д. Муленко*)

**Ответ:** 1013.

**Решение.**

1) Рассмотрим первый вопрос. Ответ «да» на него даст либо рыцарь на острове, где рыцарей ровно 60, либо лжец, если рыцарей иное количество. Ответ «нет» — либо лжец на острове, где рыцарей 59, либо рыцарь при ином количестве рыцарей. Значит, на 7 островах, где на первый вопрос все ответили «да», рыцарей либо 60, либо 0; на остальных 10 островах рыцарей либо 59, либо 119.
2) На второй же вопрос — независимо от того, кто отвечает — будет получен ответ «да», если рыцарей меньше половины, и «нет», если лжецов меньше половины. Значит, на 7 островах, где на второй вопрос все ответили «нет», рыцарей хотя бы 60 (то есть, или 60, или 119); а на остальных 10 островах рыцарей не более 59 (то есть, или 59, или 0).
3) Пусть на $x$ островах 60 рыцарей, а на $y$ островах 59 рыцарей; тогда (см. пункт 1) на $7 - x$ островах 0 рыцарей и на $10 - y$ островах 119 рыцарей. Из пункта 2 получаем: $x + (10 - y) = 7$, $y + (7 - x) = 10$. Оба уравнения равносильны равенству $y - x = 3$.
4) Считаем общее число рыцарей:

$$60 \cdot x + 59 \cdot y + (7 - x) \cdot 0 + (10 - y) \cdot 119 = 60x + 59(x + 3) + 119(7 - x) = 59 \cdot 3 + 119 \cdot 7 = 1010.$$

Значит, лжецов — 1013.

**Критерии.** Верно расписаны все возможные варианты количества рыцарей и лжецов на острове каждого типа — 2 балла.

Задача решена для случая, когда 7 островов в первом и втором вопросе одни и те же — 2 балла.

Задача решена верно, но в ответе указано количество рыцарей, а не лжецов — 6 баллов.

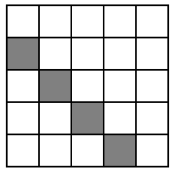
Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2022–2023 учебный год. Заключительный этап

# Решения задач для 8 класса

Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.
Для некоторых задач есть частные критерии, указанные ниже.

---

1. В клетках квадрата $5 \times 5$ стоят натуральные числа от 1 до 5 так, что в каждом столбце, каждой строке и каждой из двух главных диагоналей все числа различны. Может ли сумма чисел в клетках, закрашенных на рисунке, равняться 19? (*Л. С. Корешкова*)



**Решение.** Пусть может. Чтобы получить сумму 19 в закрашенных клетках, там должны стоять три цифры «5» и одна цифра «4» ($19 = 5+5+5+4$). При любой расстановке цифр «5» на главной диагонали (идущей из левого нижнего угла в правый верхний) пятерку можно поставить только в правый верхний угол, но тогда на побочной диагонали (идущей из левого верхнего угла в правый нижний) пятерку поставить уже некуда. Противоречие.

**Критерии.** Замечено, что $19 = 5+5+5+4$ — 1 балл.

В случае перебора расстановок пятерок и четверки в закрашенных клетках, при отсутствии одного или более случаев — 5 баллов.

2. Где-то в океане есть остров Невезения, на котором расположены $2n$ городов, соединённых между собой дорогами так, что из каждого города выходит больше $n$ дорог. Турист услышал в новостях, что какие-то два города пришлось закрыть на карантин, поэтому все дороги, ведущие к этим городам, были перекрыты. К сожалению, он не смог разобрать названия городов. Докажите, что турист, несмотря на перекрытия, всё ещё может доехать из любого незакрытого города в любой другой. (*П. Д. Муленко*)

**Решение.** Докажем от противного. Рассмотрим два незакрытых города А и Б. Поскольку у каждого из них не менее 11 «соседей», а всего соседей не более чем 18, то хотя бы 4 из них совпадают. Поскольку из этих совпадающих соседей не более двух закрытых, то найдётся открытый город, соседний и с А, и с Б. Через него можно попасть из А в Б.

**Критерии.** Задача рассмотрена только для одного примера — 0 баллов.

Задача решена в случае, когда у двух вершин степени строго $n+1$ — 6 баллов.

3. Решите уравнение: $[20x+23] = 20+23x$. Напомним, что $[a]$ обозначает целую часть числа, то есть наибольшее целое число, не превосходящее $a$. (*Л. С. Корешкова*)

**Решение.** Обозначим обе части уравнения через $n$, это целое число. Тогда $x = \frac{n-20}{23}$ и $n \leqslant 20x+23 < n+1$. Это значит, что

$$n \leqslant \frac{20(n-20)}{23} + 23 < n+1,$$

то есть

$$n \leqslant 43 < n + 7\frac{2}{3}.$$

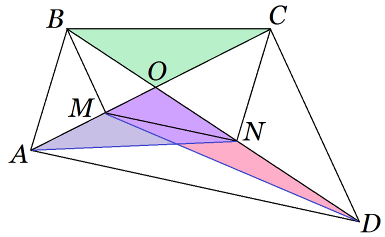
Получается, что $x = 1 - \frac{k}{23}$ для произвольного целого $0 \leqslant k \leqslant 7$.

**Ответ:** $\frac{16}{23}, \frac{17}{23}, \frac{18}{23}, \frac{19}{23}, \frac{20}{23}, \frac{21}{23}, \frac{22}{23}, 1$.

**Критерии.** 0 баллов — решение, в ходе которого было получено, что $x = 1$.
2 балла — получено, что $x$ имеет вид $1 - \frac{k}{23}$.
$-1$ балл за каждый потерянный или лишний ответ.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$ с тупыми углами $B$ и $C$. На диагоналях отмечены такие точки $M$ и $N$, что $BM \parallel CD$, $CN \parallel AB$. Докажите, что $AD \parallel MN$. (*Л. С. Корешкова*)

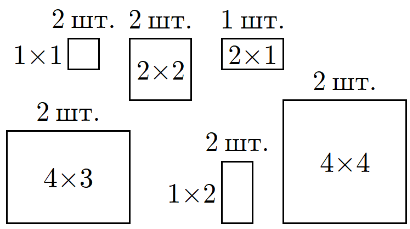
**Решение.**




Пусть $O$ — точка пересечения диагоналей. $BCDM$ — трапеция ($BM \parallel DC$), поэтому треугольники $MOD$ и $BOC$ равновелики. (Действительно, треугольники $MCD$ и $BCD$ имеют равную площадь, поскольку у них общее основание $CD$ и равные высоты; $S_{MOD} = S_{MDC} - S_{COD} = S_{BCD} - S_{COD} = S_{BOC}$.) Аналогично равновелики и треугольники $AON$ и $BOC$.

То есть равновелики $MOD$ и $AON$, а значит, равновелики $AMN$ и $DMN$. Так как у них общее основание, то их высоты равны, то есть точки $A$ и $D$ находятся на равном расстоянии от прямой $MN$. Значит, $AD \parallel MN$, что и требовалось доказать.

5. Несколько лет назад в компьютерной игре «Майнкрафт» было 11 различных картин (см. рисунок): одна горизонтальная размерами $2 \times 1$, и по две штуки размерами $1 \times 1$, $1 \times 2$ (вертикальные), $2 \times 2$, $4 \times 3$ (горизонтальные) и $4 \times 4$. Сколькими способами все 11 картин можно разместить на прямоугольной стене размером 12 блоков в длину и 6 в высоту? Картины не должны накладываться друг на друга; поворачивать их нельзя. (*П. Д. Муленко*)

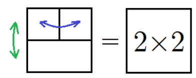


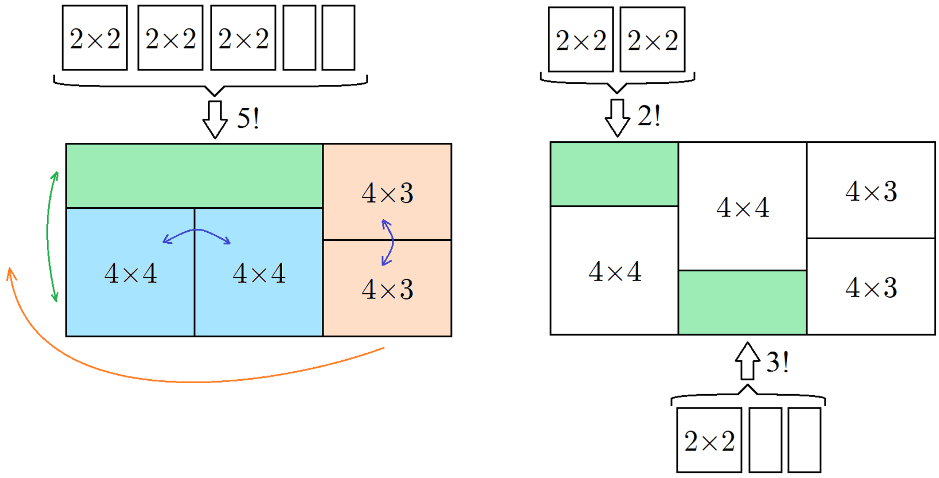

**Ответ:** 16896.

**Решение.** Будем говорить, что две картины расположены в разных столбцах, если никакой блок первой картины не находится в одном столбце ни с каким блоком второй. Ясно, что картины $4 \times 4$ находятся в разных столбцах друг с другом и с картинами $4 \times 3$ при любом размещении. Таким образом, картины $4 \times 3$ обязательно будут строго друг под другом. Обе картины $4 \times 4$ прижаты к полу или потолку, так как хотя бы в 6 столбцах должно остаться по 2 свободных соседних клетки для оставшихся картин высоты 2. Всего есть $3 \cdot 2^4 = 48$ способов так разместить картины ширины 4 (3 способа выбрать столбец с картинами $3 \times 3$, $2^2$ способов выбрать «пол/потолок» в остальных столбцах, 2 способа переставить между собой картины $4 \times 4$ и ещё 2 способа переставить картины $4 \times 3$). Из них в 16 случаях остаётся пустой участок $8 \times 2$ (есть 4 «степени свободы» по 2 варианта в каждой, они показаны цветными стрелками на среднем рисунке). В остальных 32 случаях остаются два отдельных участка $4 \times 2$.

Заметим, что в любом случае картины $1 \times 1$ вместе с картиной $2 \times 1$ будут образовывать квадрат $2 \times 2$, так что можно заменить их на одну склеенную картину (а ответ для нового набора картин домножить на 4 способа её расклеить).

Если остался участок $8 \times 2$, то его надо заполнить пятью вертикальными блоками в каком-то порядке, для этого есть $5! = 120$ способов.




Рассмотрим случай, когда остаётся свободно два участка стены вида $4 \times 2$. Тогда один участок должен разбиваться на две картины $2 \times 2$, а второй — на одну картину $2 \times 2$ и две картины $1 \times 2$. Есть два способа выбрать, где какой из них, далее 3 способа выбрать, какая из картин $2 \times 2$ (включая составную) будет на втором участке; после этого — $2!$ способов упорядочить блоки для первого участка и $3!$ для второго. Итого $2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 2 = 72$ способа.

Итого $4 \cdot (32 \cdot 72 + 16 \cdot 120) = 16896$ вариантов.

**Критерии.** Получено, что три самые маленькие картины (две $1 \times 1$ и одна $1 \times 2$) можно поставить только вместе в виде квадрата $2 \times 2$ — 1 балл.

Получено, что картины ширины 4 расставляются 48 способами — еще 2 балла (при ошибке в подсчете — +1 балл).

Получено, что в случае двух «окон» $4 \times 2$ есть 72 способа расставить маленькие картины — еще 2 балла (при ошибке в подсчете +1 балл).

Получено, что в случае единого пространства $8 \times 2$ есть 120 способов расставить маленькие картины — еще 2 балла (при ошибке в подсчете — +1 балл).

6. В Тридевятом царстве 17 островов, на каждом из которых живут 119 человек. Жители царства делятся на две касты: рыцари, всегда говорящие правду, и лжецы, которые всегда лгут. Во время переписи населения каждого человека сперва спросили: «Не считая вас, на вашем острове живёт поровну рыцарей и лжецов?». Оказалось, что на 7 островах все ответили «Да», а на остальных все ответили «Нет». Затем каждого человека спросили: «Правда ли, что, считая вас, людей вашей касты меньше половины жителей острова?». На этот раз на каких-то 7 островах все ответили «Нет», а на остальных все ответили «Да». Сколько лжецов в царстве? (*П. Д. Муленко*)

**Ответ:** 1013.

**Решение.**

1) Рассмотрим первый вопрос. Ответ «да» на него даст либо рыцарь на острове, где рыцарей ровно 60, либо лжец, если рыцарей иное количество. Ответ «нет» — либо лжец на острове, где рыцарей 59, либо рыцарь при ином количестве рыцарей. Значит, на 7 островах, где на первый вопрос все ответили «да», рыцарей либо 60, либо 0; на остальных 10 островах рыцарей либо 59, либо 119.

2) На второй же вопрос — независимо от того, кто отвечает — будет получен ответ «да», если рыцарей меньше половины, и «нет», если лжецов меньше половины. Значит, на 7 островах, где на второй вопрос все ответили «нет», рыцарей хотя бы 60 (то есть, или 60, или 119); а на остальных 10 островах рыцарей не более 59 (то есть, или 59, или 0).
3) Пусть на $x$ островах 60 рыцарей, а на $y$ островах 59 рыцарей; тогда (см. пункт 1) на $7-x$ островах 0 рыцарей и на $10-y$ островах 119 рыцарей. Из пункта 2 получаем: $x+(10-y)=7$, $y+(7-x)=10$. Оба уравнения равносильны равенству $y-x=3$.
4) Считаем общее число рыцарей:

$$60\cdot x+59\cdot y+(7-x)\cdot 0+(10-y)\cdot 119=60x+59(x+3)+119(7-x)=59\cdot 3+119\cdot 7=1010.$$

Значит, лжецов — 1013.

**Критерии.** Верно расписаны все возможные варианты количества рыцарей и лжецов на острове каждого типа — 2 балла.

Задача решена для случая, когда 7 островов в первом и втором вопросе одни и те же — 2 балла.

Задача решена верно, но в ответе указано количество рыцарей, а не лжецов — 6 баллов.

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2022–2023 учебный год. Заключительный этап

# Решения задач для 9 класса

Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.
Для некоторых задач есть частные критерии, указанные ниже.

---

1. Паша и Игорь подбрасывают монетку. Если выпадает орёл, выигрывает Паша, если решка — Игорь. В первый раз проигравший заплатил победителю 1 рубль, во второй — 2 рубля, потом — 4, и так далее (каждый раз проигравший платит в 2 раза больше, чем на прошлом шаге). После 12 игр Паша стал на 2023 рубля богаче, чем был изначально. Сколько из этих игр он выиграл? (*Л. С. Корешкова, А. А. Теслер*)

**Ответ:** 9 (все, кроме 4, 8 и 1024).

**Решение.** Нужно расставить знаки в равенстве $\pm 1 \pm 2 \pm 2^2 \pm 2^3 \pm \ldots \pm 2^9 \pm 2^{10} \pm 2^{11} = 2023$. Если выбрать все плюсы, то будет $2^0 + \ldots + 2^{11} = 2^{12} - 1 = 4095$, поэтому надо заменить плюсы на минусы перед числами с суммой $\frac{4095-2023}{2} = 1036$. Такой набор чисел только один (в силу единственности представления числа в двоичном виде): $1036 = 1024 + 8 + 4$.

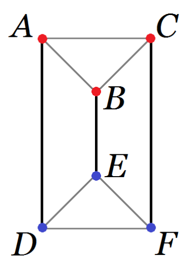
**Критерии.** 1 балл — указано, что вся сумма денег 4095;
ещё 1 балл — найдено, что Паша выиграл 3059;
2 балла — верный ответ с примером;
-2 балла за отсутствие доказательства единственности представления 1036.

2. Где-то в океане есть остров Невезения, на котором расположены несколько городов, соединённых между собой дорогами так, что случайный турист может попасть из любого города в любой другой. Оказалось, что если закрыть любые два города на карантин и перекрыть все ведущие в них дороги, то всё ещё можно проехать из любого из оставшихся городов в любой другой.
Турист случайным образом выбрал три дороги, никакие две из которых не ведут в один город, и хочет проехать по ним, начав и закончив свой маршрут в одном и том же городе, по пути не заезжая ни в какой из городов дважды. Всегда ли он сможет это сделать? (*Е. С. Голикова*)

**Решение.** Не всегда. Докажем, что для примера, показанного на рисунке (выбраны вертикальные рёбра), это не так.

1) Какие бы две дороги мы ни закрыли, граф останется связным (после закрытия одной дороги он приобретает одну из двух форм, показанных ниже; очевидно, в каждом из случаев закрытие ещё одной дороги оставит граф связным).

2) Назовём города $A, B, C$ красными, а $D, E, F$ синими. Если турист не попадает в один город дважды, то по каждой из выбранных дорог он должен проехать ровно один раз. Но всякий раз, когда турист проезжает по одной из выбранных дорог, цвет города меняется (а при использовании остальных дорог — нет). Поскольку выбранных дорог нечётное число, то в конце пути турист окажется в городе не того цвета, что в начале.



**Критерии.** 3 балла — пример; 4 балла — проверка, что он подходит под условие.

3. Решите уравнение: $[20x+23] = 20+23x$. Напомним, что $[a]$ обозначает целую часть числа, то есть наибольшее целое число, не превосходящее $a$. (*Л. С. Корешкова*)

**Решение.** Обозначим обе части уравнения через $n$, это целое число. Тогда $x = \frac{n-20}{23}$ и $n \leqslant 20x+23 < n+1$. Это значит, что
$$n \leqslant \frac{20(n-20)}{23} + 23 < n+1,$$
то есть
$$n \leqslant 43 < n + 7\frac{2}{3}.$$
Получается, что $x = 1 - \frac{k}{23}$ для произвольного целого $0 \leqslant k \leqslant 7$.

**Ответ:** $\frac{16}{23}, \frac{17}{23}, \frac{18}{23}, \frac{19}{23}, \frac{20}{23}, \frac{21}{23}, \frac{22}{23}, 1$.

**Критерии.** 0 баллов — решение, в ходе которого было получено, что $x = 1$.

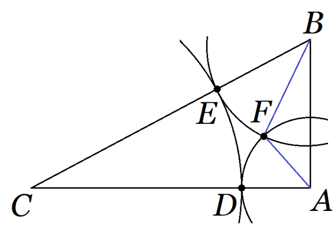
2 балла — получено, что $x$ имеет вид $1 - \frac{k}{23}$.

$-1$ балл за каждый потерянный или лишний ответ.

4. Дан прямоугольный треугольник $ABC$ с прямым углом $A$. На катете $AC$ отмечена точка $D$ такая, что $AD : DC = 1 : 3$, после чего построены окружности $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$ с центрами $A$ и $C$ соответственно, проходящие через точку $D$. $\Gamma_2$ пересекает гипотенузу в точке $E$. Окружность $\Gamma_3$ с центром $B$ и радиусом $BE$ пересекает $\Gamma_1$ внутри треугольника в такой точке $F$, что угол $AFB$ прямой. Найдите $BC$, если $AB = 5$. (*П. Д. Муленко*)

**Ответ:** 13.

**Решение.** Обозначим $AC = x$. Тогда $AD = x/4$, $DC = CE = 3x/4$, $BE = BC - CE = \sqrt{x^2+25} - 3x/4$. По условию, $\angle AFB = 90^\circ$, поэтому $AF^2 + FB^2 = AB^2$, то есть $AD^2 + BE^2 = 25$. Выражая всё через $x$ и преобразуя, получаем $13x = 12\sqrt{x^2+25}$. Возводя обе части в квадрат, получим $x^2 = 144$, то есть $x = 12$ и $BC = 13$.




5. Даны шесть карточек, на которых написаны цифры 1, 2, 4, 5, 8 и запятая. Из них составляются всевозможные числа (каждую карточку нужно использовать ровно один раз, запятая не может стоять в начале или в конце числа). Чему равно среднее арифметическое всех таких чисел? (*М. В. Карлукова*)

**Решение.** Представим сначала, что запятой нет, то есть найдём сумму целых чисел из указанных цифр. Есть $5! = 120$ способов упорядочить цифры. При их суммировании в каждом разряде по $4!$ раз встретится каждая из пяти возможных цифр, поэтому сумма цифр в разряд единиц равна $4! \cdot (1+2+4+5+8) = 24 \cdot 20 = 480$, а в остальных разрядах в 10, 100, 1000, 10000 раз больше. Итого сумма чисел составляет $S = 480 \cdot 11111$.

Однако мы суммируем не целые числа, а числа с различным положением запятой. Запятая после четырёх (трёх, двух, одной) цифры не изменяет количества чисел (их 120 в каждом случае), но уменьшает их сумму в 10, 100, 1000, 10000 раз соответственно. Поэтому количество всех чисел равно $120 \cdot 4 = 480$, а их сумма равна $S \cdot 0{,}1111 = 480 \cdot 11111 \cdot 0{,}1111$. Значит, среднее арифметическое равно $11111 \cdot 0{,}1111 = 1234{,}4321$ (что нетрудно посчитать в столбик).

**Ответ:** 1234,4321.

**Критерии.** 2 балла — найдено количество чисел.

$-1$ балл за арифметическую ошибку в последнем действии, $-3$ балла за арифметическую ошибку в подсчёте в другом месте.

6. На координатной плоскости отметили точки $A(0,0)$ и $B(1000,0)$, а также точки $C_1(1,1)$, $C_2(2,1)$, $\dots$, $C_{999}(999,1)$. Потом провели всевозможные прямые $AC_i$ и $BC_i$ ($1 \leqslant i \leqslant 999$). Сколько целочисленных точек пересечения у всех этих прямых? (Целочисленная точка — это та, у которой обе координаты целые.) (*О. А. Пяйве*)

**Решение.** Обозначим через $a_n$ и $b_n$ прямые, проходящие через $A$ и $B$ соответственно, а также через точку на $l$ с абсциссой, на $n$ большей абсциссы $A$ (где $1 \leqslant n \leqslant 999$). Прямые $a_n$ и $a_m$ при $n < m$ пересекаются в $A$, $b_n$ и $b_m$ — в $B$. Прямые $a_n$ и $b_m$ при $n > m$ пересекаются в нецелой точке (между $AB$ и $l$). Наконец, прямые $a_n$ и $b_m$ при $n \leqslant m$ пересекаются в точке на расстоянии $k$ от $AB$ таком, что $1000(k-1) = k(m-n)$ (она целая в точности если $k$ целое). Значит, $k$ является делителем 1000, и наоборот, для каждого делителя соответствующее $m-n$ целое. Для каждого из них имеется $\frac{1000}{k} - 1$ подходящих пар $(n,m)$, так что ответ — это $1+2+4+8+5+10+20+40+25+50+100+200+125+250+500+1000-16+2 = 2326$.

**Критерии.** 2 балла — за уравнение $1000(k-1) = k(m-n)$;

5 баллов — за утверждение про $\frac{1000}{k} - 1$ подходящих пар $(n,m)$ или нечто эквивалентное ему;

-1 балл за обсчёт в последнем действии.

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2022–2023 учебный год. Заключительный этап

# Решения задач для 10 класса

Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.
Для некоторых задач есть частные критерии, указанные ниже.

---

1. Найдите сумму всех корней уравнения:

$$\sqrt{2x^2-2024x+1023131}+\sqrt{3x^2-2025x+1023132}+\sqrt{4x^2-2026x+1023133}=$$
$$=\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{2x^2-2x+2}+\sqrt{3x^2-3x+3}.$$

(*Л. С. Корешкова*)

**Решение.** Заметим, что подкоренные выражения в левой части получены из соответствующих подкоренных выражений правой части прибавлением $x^2-2023x+1023130=(x-1010)(x-1013)$. Так как все подкоренные выражения положительны (это достаточно проверить для $x^2-x+1$ и для $2x^2-2024x+1023131=2(x-506)^2+511059$), то левая часть меньше правой при $1010<x<1013$ и больше при $x\notin[1010,1013]$. Равенство достигается только при $x=1010$ и $x=1013$, так что ответ — 2023.

**Критерии.** Если найден ответ, но не доказано, что других корней у уравнения нет, то не больше 2 баллов.

2. Есть 8 белых кубиков одинакового размера. Марине нужно покрасить 24 грани кубиков в синий цвет, а остальные 24 грани — в красный. После этого Катя склеивает из них куб $2\times2\times2$. Если на поверхности куба столько же синих квадратов, сколько и красных, то Катя побеждает. Если нет, то побеждает Марина. Сможет ли Марина покрасить кубики так, чтобы Катя не смогла достичь цели? (*Л. С. Корешкова*)

**Ответ:** нет.

**Решение.** Пусть Марина как-то покрасила кубики, а Катя как-то сложила из них куб. Пусть на поверхности куба $a$ синих и $24-a$ красных граней. Используя идею так называемой дискретной непрерывности, покажем, что Катя может постепенно привести куб к нужному ей виду. Заметим, что каждый из 8 кубиков можно повернуть так, чтобы все его грани, которые были снаружи, оказались внутри, и наоборот. Если сделать это со всеми восемью кубиками, то на поверхности окажутся как раз все те грани, которые изначально были внутри, то есть $24-a$ синих и $a$ красных. Заметим теперь, что каждый кубик можно поворачивать постепенно — так, чтобы за один ход две внешних грани оставались на месте и лишь третья заменялась на противоположную. При таком повороте количество синих граней на поверхности меняется не более чем на 1. Итак, изначально синих квадратов было $a$, в конце стало $24-a$, а при каждом действии менялось не более чем на 1. Поскольку число 12 находится между $a$ и $24-a$, то в какой-то момент их было ровно 12.

**Критерии.** За идею о последовательных поворотах — 2 балла.

3. Любимая телеигра Пети называется «Лотерея на диване». В течение игры телезрители могут присылать СМС-сообщения с трёхзначными числами, содержащими только цифры 1, 2, 3 и 4. В конце игры ведущий называет трёхзначное число, также состоящее только из этих цифр. СМС считается выигрышной, если число в ней отличается от числа ведущего не более чем в одном разряде (например, если ведущий назвал число 423, то сообщения 443 и 123 выигрышные, а 243 и 224 — нет).
Петя хочет отправить как можно меньше сообщений таким образом, чтобы хотя бы одно точно было выигрышным. Сколько СМС ему придётся отправить? (*Л. С. Корешкова*)

**Ответ:** 8.

**Решение.** Пример восьми подходящих СМС: 111, 122, 212, 221, 333, 344, 434, 443. Действительно, какое бы число ни назвал ведущий, в нём есть либо хотя бы две цифры из набора $\{1, 2\}$, либо хотя бы две из набора $\{3, 4\}$. Если третья цифра из другого набора, то заменим его на цифру из того же набора, что и другие две, причём так, чтобы сумма цифр была нечётной — обязательно получится один из указанных вариантов.

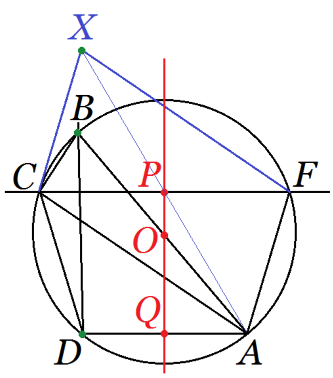
Допустим теперь, что сообщений меньше 8. Тогда на какую-то цифру (например, на цифру 1) начинается максимум одно сообщение. Не умаляя общности, пусть это сообщение 111 (если оно вообще есть). Рассмотрим варианты, когда ведущим названы числа 122, 123, 124, 132, 133, 134, 142, 143, 144. Их 9, и для каждого из них нужно отдельное сообщение (поскольку первая цифра не 1, то вторая и третья должны быть угаданы).

**Замечание**. Задачу можно переформулировать так: «Каким наименьшим количеством ладей можно побить шахматную доску $4 \times 4 \times 4$?». Общее решение (для доски $n \times n \times n$) приведено, например, в комментарии на http://math.hashcode.ru/questions/52123.

**Критерии.** За оценку даётся 4 балла, за пример — 3. За утверждение, что необходимо хотя бы 7 СМС, даётся 1 балл.

4. Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$ с прямым углом $ADB$. Через точку $C$ проведена прямая $l \parallel AD$, на которой отмечена такая точка $F$, что угол $BAF$ равен острому углу между диагоналями $AC$ и $BD$, причём $F$ и $C$ по разные стороны от $AB$. Точка $X$ такова, что $FXCA$ — параллелограмм. Докажите, что точка $X$ лежит на $BD$. (*О. А. Пяйве*)

**Решение.** Для начала заметим, что $F$ лежит на описанной окружности $ABCD$. Действительно, $F$ и $D$ лежат по разные стороны от $AC$ и $\angle DAF + \angle DCF = \angle DAB + \angle BAF + \pi - \angle CDA = \angle DAB + \angle BAF + \frac{\pi}{2} - \angle CDB = \angle DAB + \angle BAF + \frac{\pi}{2} - \angle CAB = \angle DAC + \angle BAF + \frac{\pi}{2} = \pi$.
Обозначим через $P$ середину $CF$, $Q$ — середину $AD$, $O$ — центр описанной окружности. Ясно, что они лежат на одной прямой (серединном перпендикуляре к $AD$). Точки $X$, $B$, $D$ получаются из них гомотетией с центром в $A$ и коэффициентом 2, так что они тоже лежат на одной прямой.




**Критерии.** Если предполагается, что $B$ лежит между $X$ и $D$ или $X$ лежит между $B$ и $D$, то снимается 3 балла.

5. Решите в простых числах уравнение $a^b + a + b = b^a$. *(О. А. Пяйве, П. Д. Муленко)*

**Ответ:** $a = 5$, $b = 2$.

**Решение.** Перенесём $b$ в правую часть и сгруппируем: $a(a^{b-1} + 1) = b(b^{a-1} - 1)$. Так как числа $a$ и $b$ простые и, очевидно, различные, то $a$ не делится на $b$, откуда $a^{b-1} + 1 \,\vdots\, b$, что означает, что $a^{b-1} \equiv -1 \pmod b$. С другой стороны, согласно малой теореме Ферма, $a^{b-1} \equiv +1 \pmod b$. Это означает, что $-1 \equiv +1 \pmod b$ или $2 \equiv 0 \pmod b$, то есть $b = 2$.

Имеем уравнение $a^2 + a + 2 = 2^a$. Непосредственной подстановкой получаем, что $a \neq 2$, $a \neq 3$; $a = 5$ подходит ($5^2+5+2 = 32 = 2^5$). А при любом натуральном $a > 5$ это уравнение не имеет решений, ведь при увеличении $a$ на единицу левая часть увеличивается менее, чем в два раза:
$$\big((a+1)^2+(a+1)+2\big)-2(a^2+a+2) = (a^2+3a+4)-(2a^2+2a+4) = -a^2+a = -a(a-1) < 0.$$

**Замечание.** Можно решить задачу для произвольных натуральных $a$ и $b$ (задача 5 для 11 класса).

**Критерии.** За угаданный ответ даётся 2 балла.

6. На столе лежат 28 конфет. Петя считает некоторые из них вкусными. Вася за один ход может указать любой набор конфет и спросить Петю, сколько из них вкусных. Как Васе гарантированно найти все вкусные конфеты... (а) за 21 ход; (б) за 20 ходов? *(А. А. Теслер, Е. Ю. Воронецкий)*

**Решение.**

а) Разобьём конфеты на 7 групп по 4 штуки. За 3 хода можно узнать всё про данные 4 конфеты $a, b, c, d$, спросив, например, про наборы $\{a, c, d\}$, $\{b, c, d\}$, $\{a, b, c\}$.
Если на первые два вопроса ответы будут разными, то мы узнаем, каковы конфеты $a$ и $b$, а из третьего вопроса поймём, какова $c$. Вернувшись к первому вопросу, узнаем и про $d$.
Если же ответы на первые два вопроса совпадают, значит, $a$ и $b$ одинаковы. Если ответ на третий вопрос меньше 2, то $a$ и $b$ невкусные, а если 2 или более, то вкусные; вкусная ли $c$, определим по чётности этого ответа. И вновь, вернувшись к первому вопросу, определим, какова $d$.

**Замечание**. Подойдёт и другой набор вопросов, например, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\{a, b, d\}$.

б) Возможны различные решения этого пункта. Приведём решение, позволяющее найти все конфеты даже за 19 ходов. Докажем следующее утверждение: «Если для $n > 0$ конфет задача решается за $m$ вопросов, то для $n + 3$ конфет её можно решить за $m + 2$ вопроса». (Поскольку для одной конфеты достаточно одного вопроса, то для $28 = 1 + 9 \cdot 3$ конфет хватит $1 + 9 \cdot 2 = 19$ вопросов.)

Действительно, пусть есть способ узнать про $n$ конфет за $m$ вопросов, и пусть первый из этих вопросов задаётся про некое множество $X$. Добавим три конфеты $a$, $b$, $c$, а к списку вопросов добавим три вопроса про множества $\{a, c\} \cup X$, $\{b, c\} \cup X$, $\{a, b, c\}$ и *уберём* вопрос про $X$. По ответам на эти вопросы можно узнать, каковы конфеты $a, b, c$ и сколько сладких конфет в $X$ (точно так же, как в пункте а, только $d$ заменяется на $X$).

**Критерии.** 2 балла за пункт (а) и 5 баллов за (б).

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2022–2023 учебный год. Заключительный этап

# Решения задач для 11 класса

Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.
Для некоторых задач есть частные критерии, указанные ниже.

---

1. Найдите сумму всех корней уравнения:

$$\sqrt{2x^2-2024x+1023131}+\sqrt{3x^2-2025x+1023132}+\sqrt{4x^2-2026x+1023133}=$$
$$=\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{2x^2-2x+2}+\sqrt{3x^2-3x+3}.$$

(*Л. С. Корешкова*)

**Решение.** Заметим, что подкоренные выражения в левой части получены из соответствующих подкоренных выражений правой части прибавлением $x^2-2023x+1023130=(x-1010)(x-1013)$. Так как все подкоренные выражения положительны (это достаточно проверить для $x^2-x+1$ и для $2x^2-2024x+1023131=2(x-506)^2+511059$), то левая часть меньше правой при $1010<x<1013$ и больше при $x\notin[1010,1013]$. Равенство достигается только при $x=1010$ и $x=1013$, так что ответ — 2023.

**Критерии.** Если найден ответ, но не доказано, что других корней у уравнения нет, то не больше 2 баллов.

2. Есть 8 белых кубиков одинакового размера. Марине нужно покрасить 24 грани кубиков в синий цвет, а остальные 24 грани — в красный. После этого Катя склеивает из них куб $2\times2\times2$. Если на поверхности куба столько же синих квадратов, сколько и красных, то Катя побеждает. Если нет, то побеждает Марина. Сможет ли Марина покрасить кубики так, чтобы Катя не смогла достичь цели? (*Л. С. Корешкова*)

**Ответ:** нет.

**Решение.** Пусть Марина как-то покрасила кубики, а Катя как-то сложила из них куб. Пусть на поверхности куба $a$ синих и $24-a$ красных граней. Используя идею так называемой дискретной непрерывности, покажем, что Катя может постепенно привести куб к нужному ей виду. Заметим, что каждый из 8 кубиков можно повернуть так, чтобы все его грани, которые были снаружи, оказались внутри, и наоборот. Если сделать это со всеми восемью кубиками, то на поверхности окажутся как раз все те грани, которые изначально были внутри, то есть $24-a$ синих и $a$ красных. Заметим теперь, что каждый кубик можно поворачивать постепенно — так, чтобы за один ход две внешних грани оставались на месте и лишь третья заменялась на противоположную. При таком повороте количество синих граней на поверхности меняется не более чем на 1. Итак, изначально синих квадратов было $a$, в конце стало $24-a$, а при каждом действии менялось не более чем на 1. Поскольку число 12 находится между $a$ и $24-a$, то в какой-то момент их было ровно 12.

**Критерии.** За идею о последовательных поворотах — 2 балла.

3. Паша и Игорь подбрасывают монетку. Если выпадает орёл, выигрывает Паша, если решка — Игорь. В первый раз проигравший заплатил победителю 1 рубль, во второй — 2 рубля, потом — 4, и так далее (каждый раз проигравший платит в 2 раза больше, чем на прошлом шаге). В начале игры у Паши была однозначная сумма денег, а у Игоря — четырёхзначная, а в конце у Игоря стала двузначная, а у Паши — трёхзначная. Какое минимальное количество игр мог выиграть Паша? Игроки не могут уходить в минус.

(*Л. С. Корешкова, А. А. Теслер*)

**Решение.** Обозначим через $n$ сумму денег, на которую Паша стал богаче (а Игорь — беднее). Заметим, что последнюю игру Паша выиграл (иначе за неё он потерял бы больше денег, чем приобрёл на всех предыдущих этапах). Значит, последовательность игр можно разбить на серии, в каждой из которых Паша выиграл последнюю игру и проиграл все остальные (серия может состоять и из одной игры). Если серия началась с игры номер $k$ и окончилась игрой номер $m$, то Паша выиграл за неё $-2^k - 2^{k+1} - \ldots - 2^{m-2} + 2^{m-1} = 2^k$ рублей. Таким образом, двоичное представление числа $n$ однозначно описывает набор выигранных Пашей игр (за исключением номера последней игры): слагаемое $2^k$ означает, что очередная серия началась с игры номер $k+1$, то есть игру номер $k$ Паша выиграл.

По условию, $901 \leqslant n \leqslant 998$. Но все числа от 901 до 998 содержат в двоичном представлении $2^7 + 2^8 + 2^9$, поэтому Паша выиграл седьмую, восьмую, девятую игру, а также последнюю (её номер больше 9, иначе не было бы слагаемого $2^9$) — уже минимум 4 игры.

Кроме этого, за первые 6 игр Паша должен был выиграть хотя бы 3 раза:

1) из первых четырёх игр выиграна хотя бы одна, так как $9 - 1 - 2 - 4 - 8 < 0$;

2) из двух следующих также выиграна хотя бы одна, так как $9 \pm 1 \pm 2 \pm 4 \pm 8 - 16 - 32 < 0$;

3) если из первых четырёх выиграна только одна, то после них сумма не более 10, и пятая и шестая обязательно должны быть выиграны.

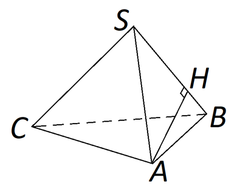
Таким образом, Паша выиграл не менее 7 игр. Вот пример для 7 игр: изначально у Паши было 9 рублей, у Игоря — 1000 рублей, всего сыграно 10 игр. Тогда $n = 985 = 2^0 + 2^3 + 2^4 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9 = (-2^0 - 2^1 + 2^2) + (2^3) + (2^4) + (-2^5 + 2^6) + (2^7) + (2^8) + (2^9)$, то есть Паша выигрывал в играх с номерами $3, 4, 6, 7, 8, 9, 10$, а Игорь — в играх $1, 2, 5$. В конце у Паши окажется 994 рубля, а у Игоря — 15 рублей.

**Ответ:** 7 игр.

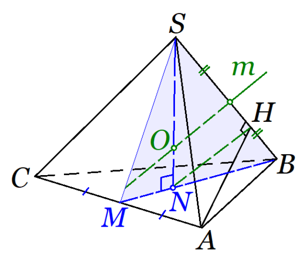
**Критерии.** За оценку даётся 5 баллов (из них 1 за оценку, что прошло всего хотя бы 10 игр), за пример — 2.

4. На плоскости в ортогональной проекции изображена правильная пирамида $SABC$ (с основанием $ABC$) и высота $AH$ грани $SAB$, как показано на рисунке. Как с помощью циркуля и линейки построить изображение центра сферы, описанной возле пирамиды?

(*А. А. Теслер*)




**Решение.** Пусть $M$ — середина $AC$, $N$ — центр основания $ABC$. Тогда центр описанной сферы лежит на $SN$ (поскольку пирамида правильная). Проекция $M$ строится как середина проекции $AC$, а проекция $N$ — как точка, делящая проекцию $BM$ в отношении $2:1$.



Обозначим через $m$ прямую, параллельную $MH$ и проходящую через середину $SB$. Она проходит через центр описанной сферы: $AH$ и $CH$ перпендикулярны $SB$, так что $m$ перпендикулярна $SB$, а также $m$ пересекает $SN$. Проекция $m$ строится как параллельный перенос проекции $MH$, проходящий через середину проекции $SB$. Эта проекция пересекает проекцию $SN$ ровно в проекции центра описанной сферы.

5. Решите в натуральных числах уравнение $a^b+a+b=b^a$. (*О. А. Пяйве, Е. Ю. Воронецкий*)

**Ответ:** $a=5$, $b=2$.

**Решение.** Если $a=1$ или $b=1$, то решений нет.

Если $b=2$, то получим $2^a=a^2+a+1$. При $a<5$ решений нет, $a=5$ подходит, а при $a\geqslant 5$ левая часть увеличивается менее чем в 2 раза при увеличении $a$ на 1.

Пусть $b\geqslant 3$. Тогда

$$b^a=a^b+a+b\leqslant a^b+ab\leqslant a^b+ba^{b-2}<\left(a+\frac{1}{a}\right)^b$$

(последнее неравенство следует из разложения по биному Ньютона для $\left(a+\frac{1}{a}\right)^b$). Значит,

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^b>b^a>a^b;$$

логарифмируя и деля на $ab$, получаем:

$$\frac{\ln\left(a+\frac{1}{a}\right)}{a}>\frac{\ln b}{b}>\frac{\ln a}{a}.$$

Пусть $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$. Заметим, что $f(a)$ убывает при $a\geqslant 3$ и $f(2)=f(4)$ (у этой функции производная равна $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$, и она отрицательна при $x\geqslant e$). Поэтому нет решений с $a=2$, $b\geqslant 4$ и с $b\geqslant a\geqslant 3$.

С другой стороны, можно проверить, что

$$\frac{\ln\left(a+\frac{1}{a}\right)}{a}<\frac{\ln(a-1)}{a-1}$$

при $a\geqslant 4$. Действительно, при $a=4$ это

$$\left(4+\frac{1}{4}\right)^3=64+12+\frac{3}{4}+\frac{1}{64}<81=3^4,$$

и производная выражения $g(a)=a\cdot\ln(a-1)-(a-1)\cdot\ln(a+1/a)$ равна

$$g'(a)=\frac{1}{a-1}+\frac{a^2+2a-1}{a^3+a}-\ln 1+\frac{a+1}{a^2-a}.$$

Но

$$\ln 1+\frac{a+1}{a^2-a}<\frac{a+1}{a^2-a},$$

так что

$$g'(a)>\frac{a^3-3a}{a(a-1)(a^2+1)}>0$$

уже при $a\geqslant 3$.

Таким образом, уравнение не имеет решений при $a\geqslant 4$.

**Замечание.** Вместо оценки $(a+\frac{1}{a})^b$ можно использовать $(a+1)^b$ (верную при $b=2$), тогда упрощаются вычисления, но нужно перебирать больше исключений.

**Критерии.** За угаданный ответ даётся 1 балл. Рассуждение, показывающее, что хотя бы одна переменная ограничена, оценивается в 3 балла.

6. На столе лежат 28 конфет. Петя считает некоторые из них вкусными. Вася за один ход может указать любой набор конфет и спросить Петю, сколько из них вкусных. Как Васе гарантированно найти все вкусные конфеты... (а) за 21 ход; (б) за 20 ходов?

(*А. А. Теслер, Е. Ю. Воронецкий*)

**Решение.**

а) Разобьём конфеты на 7 групп по 4 штуки. За 3 хода можно узнать всё про данные 4 конфеты $a, b, c, d$, спросив, например, про наборы $\{a, c, d\}$, $\{b, c, d\}$, $\{a, b, c\}$.
Если на первые два вопроса ответы будут разными, то мы узнаем, каковы конфеты $a$ и $b$, а из третьего вопроса поймём, какова $c$. Вернувшись к первому вопросу, узнаем и про $d$.
Если же ответы на первые два вопроса совпадают, значит, $a$ и $b$ одинаковы. Если ответ на третий вопрос меньше 2, то $a$ и $b$ невкусные, а если 2 или более, то вкусные; вкусная ли $c$, определим по чётности этого ответа. И вновь, вернувшись к первому вопросу, определим, какова $d$.

**Замечание**. Подойдёт и другой набор вопросов, например, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\{a, b, d\}$.

б) Возможны различные решения этого пункта. Приведём решение, позволяющее найти все конфеты даже за 19 ходов. Докажем следующее утверждение: «Если для $n > 0$ конфет задача решается за $m$ вопросов, то для $n + 3$ конфет её можно решить за $m + 2$ вопроса». (Поскольку для одной конфеты достаточно одного вопроса, то для $28 = 1 + 9 \cdot 3$ конфет хватит $1 + 9 \cdot 2 = 19$ вопросов.)

Действительно, пусть есть способ узнать про $n$ конфет за $m$ вопросов, и пусть первый из этих вопросов задаётся про некое множество $X$. Добавим три конфеты $a$, $b$, $c$, а к списку вопросов добавим три вопроса про множества $\{a, c\} \cup X$, $\{b, c\} \cup X$, $\{a, b, c\}$ и *уберём* вопрос про $X$. По ответам на эти вопросы можно узнать, каковы конфеты $a, b, c$ и сколько сладких конфет в $X$ (точно так же, как в пункте **а**, только $d$ заменяется на $X$).

**Критерии.** 2 балла за пункт (а) и 5 баллов за (б).