



Решения задач для 8 класса

8.1. (3 балла) Два шарика массами m (первый) и nm (второй) движутся прямолинейно друг за другом в одном направлении с одинаковой скоростью v_0 . Первый абсолютно упруго отскакивает от массивной стенки ($M \gg m$), движущейся ему навстречу со скоростью kv_0 . После этого шарик сталкивается абсолютно неупруго.

Во сколько раз уменьшилась суммарная кинетическая энергия шариков после их столкновения (по сравнению с начальной) при $n = 4$, $k = 2$? (В. В. Кузьмичев, С. А. Старовойтов)

Ответ: 25.

Решение. Рассмотрим упругий удар первого шарика со стенкой. Шарик налетает и отскакивает от стенки со скоростью $v_0 + kv_0 = (k + 1)v_0$ в системе отсчёта массивной стенки. В неподвижной системе отсчёта его скорость:

$$v_1 = (2k + 1)v_0.$$

При неупругом соударении шариков:

$$nmv_0 - m(2k + 1)v_0 = (n + 1)mv_2,$$

где v_2 — скорость слипшихся шариков.

$$v_2 = \frac{n - 2k - 1}{n + 1} \cdot v_0.$$

Начальная кинетическая энергия шариков

$$E_1 = \frac{(n + 1)mv_0^2}{2}.$$

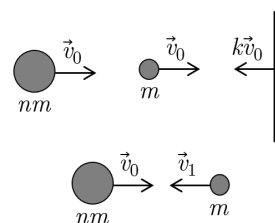
Конечная энергия

$$E_2 = \frac{(n - 2k - 1)^2 mv_0^2}{2(n + 1)}.$$

Тогда

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{(n + 1)^2}{(n - 2k - 1)^2}.$$

При $n = 4$, $k = 2$: $\eta = 25$.



8.2. (3 балла) Тонкий деревянный цилиндр (карандаш) высотой $a = 20$ см удерживают на дне водоёма в вертикальном положении. Глубина водоёма $h = 1$ м.

На какую максимальную высоту над водой сможет подняться верхний торец цилиндра, если его быстро отпустить?

Примечание. Сопротивлением воды и воздуха пренебрегите. Плотность воды $\rho_v = 1000$ кг/м³, средняя плотность карандаша $\rho_d = 400$ кг/м³. (М. А. Крупина)

Ответ: 1,45 м.

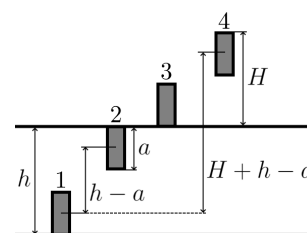
Решение. Изобразим на рисунке (см. справа) 4 положения карандаша:

- 1) начальное на дне;
- 2) верхний конец карандаша на поверхности жидкости;
- 3) нижний конец карандаша на поверхности жидкости;
- 4) максимальная высота подъёма.

Вычислим работу силы Архимеда при перемещении из положения 1 в положение 2:

$$A_{\text{Арх1}} = \rho_v g V (h - a).$$

Вычислим работу силы Архимеда при перемещении из положения 2 в положение 3, учитывая,



что сила Архимеда пропорциональна длине части карандаша внутри водоёма (см. рис.):

$$A_{\text{Арх2}} = \frac{1}{2} \cdot \rho_{\text{в}} g V a.$$

Из закона сохранения механической энергии полная работа силы Архимеда равна изменению потенциальной энергии силы тяжести:

$$A_{\text{Арх1}} + A_{\text{Арх2}} = \Delta E_{\text{п}} = mg(H + h - a).$$

Преобразуем:

$$\rho_{\text{в}} g V \left(h - a + \frac{a}{2} \right) = \rho_{\text{д}} g V (H + h - a) \Leftrightarrow \rho_{\text{в}} \left(h - \frac{a}{2} \right) = \rho_{\text{д}} (h - a) + \rho_{\text{д}} H.$$

Подставляем числовые значения и получаем результат.

$$H = \frac{\rho_{\text{в}} \left(h - \frac{a}{2} \right) - \rho_{\text{д}} (h - a)}{\rho_{\text{д}}} = 1,45 \text{ м.}$$

8.3. (2 балла) В длинную тонкую трубку залили равные объёмы двух несмешивающихся жидкостей с различными плотностями, заполнив её ровно наполовину. Трубку свернули в кольцо, расположив его в вертикальной плоскости (см. рис.). Угол, который составляет с вертикалью отрезок, проходящий через границу раздела жидкостей и центр кольца, равен $\alpha = 10^\circ$.

Найдите плотность лёгкой жидкости ρ_2 , если плотность тяжёлой известна и равна $\rho_1 = 1000 \text{ кг/м}^3$.

(М. П. Коробков, Т. А. Андреева)

Ответ: 700 кг/м³.

Решение. Напишем гидростатические давления внизу трубок. В правой:

$$P_{\text{п}} = \rho_1 g h_1 = \rho_1 g R \left(1 - \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right) = \rho_1 g R (1 - \sin \alpha).$$

В левой:

$$P_{\text{л}} = \rho_1 g R (1 - \cos \alpha) + \rho_2 g R \cos \alpha + \rho_2 g R \sin \alpha.$$

В состоянии равновесия гидростатические давления внизу трубки в левой и правой частях кольца равны:

$$P_{\text{п}} = P_{\text{л}} \Leftrightarrow \rho_1 (1 - \sin \alpha) = \rho_1 (1 - \cos \alpha) + \rho_2 (\cos \alpha + \sin \alpha).$$

Выразим нужную плотность:

$$\rho_2 = \rho_1 \cdot \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha} = \rho_1 \cdot \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha} = 700 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

8.4. (3 балла) В калориметре смешали $m_1 = 60 \text{ г}$ льда при температуре $t_1 = -15^\circ\text{C}$ и $m_2 = 30 \text{ г}$ водяного пара при температуре $t_2 = +100^\circ\text{C}$.

Чему равна масса воды в системе после установления теплового равновесия?

Примечание. Теплообменом с окружающей средой и теплоёмкостью калориметра пренебрегите. Удельная теплоёмкость воды $c_{\text{в}} = 4200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{К}}$. Удельная теплоёмкость льда $c_{\text{л}} = 2100 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{К}}$. Удельная теплота плавления льда $\lambda = 330 \text{ кДж/кг}$. Удельная теплота парообразования воды $r = 2300 \text{ кДж/кг}$.

(Фольклор)

Ответ: 80 граммов.

Решение. Определим количество теплоты, необходимое для нагрева заданного количества льда до температуры кипения:

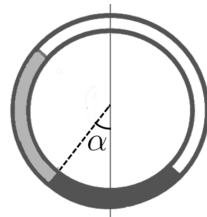
$$Q_{+} = c_{\text{л}} m_1 (t_0 - t_1) + c_{\text{в}} m_1 (t_{100} - t_0) + \lambda m_1 = \\ = 60 \cdot 10^{-3} \cdot (2100 \cdot 15 + 4200 \cdot 100 + 330000) = 46890 \text{ Дж.}$$

Определим количество теплоты, необходимое для конденсации заданного количества пара:

$$Q_{-} = m_2 r = 30 \cdot 10^{-3} \cdot 2300000 = 69000 \text{ Дж.}$$

Так как $Q_{-} > Q_{+}$, то пар сконденсировался не весь.

Так как в системе установилась равновесная температура 100°C , то масса сконденсировавшегося



гося пара равна:

$$\Delta m = \frac{Q_+}{r} = \frac{46890}{2300000} = 0,02 \text{ кг} = 20 \text{ г}.$$

Суммарная масса воды равна $m_{\text{в}} = m_1 + \Delta m = 80$ граммов.

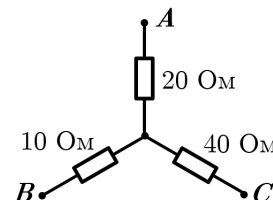
8.5. (2 балла) На крышке маленького чёрного ящичка находятся три клеммы A , B , C , а внутри — схема, собранная из трёх резисторов сопротивлением 10 Ом, 20 Ом и 40 Ом. Сопротивление между клеммами A и B равно $R_{AB} = 30$ Ом, между клеммами B и C — $R_{BC} = 50$ Ом.

Чему равно сопротивление между клеммами A и C ? Нарисуйте схему соединения резисторов в чёрном ящичке. (Т. А. Андреева)

Ответ: $R_{AC} = 60$ Ом; соединение — «звёздочка».

Решение. Возможно 24 разных схемы с подключёнными тремя резисторами и всеми задействованными клеммами: по 6 вариантов «звезды», «треугольника», с двумя параллельно соединёнными и с двумя последовательно соединёнными резисторами. Очевидно, что перебирать все варианты не нужно.

30 Ом можно получить, только соединяя последовательно 10 Ом и 20 Ом, 50 Ом — соединяя последовательно 10 Ом и 40 м. Таким образом 10 Ом участвует в обоих сопротивлениях и подключён к клемме B . Ко второму его концу подключены резистор 20 Ом (второй его конец на A) и 40 Ом (второй конец на C) — соединение «звездой». Сопротивление между клеммами A и C определяется последовательно соединёнными резисторами 20 Ом и 40 Ом и равно 60 Ом.



8.6. (2 балла) Электрометр представляет собой проводящий шар, соединённый со стрелкой. Стрелка отклоняется на число делений, пропорциональное заряду на шаре. У Вани были одинаковые заряженные металлические кубики. Он берёт их (изолирующими перчатками для чистоты эксперимента) и по очереди по одному прикладывает к электрометру, а затем отбрасывает в сторону. Исходно электрометр показывал ноль. Когда Ваня приложил и отбросил 1 кубик, электрометр показал $Q_1 = 18$ единиц заряда. А в момент, когда приложил и отбросил 3 кубика — показал $Q_3 = 38$ единиц.

Чему равнялся (в этих единицах) исходный заряд одного кубика? (А. М. Минарский)

Ответ: 27.

Решение. Пусть заряд одного кубика — q единиц. При контакте кубика и шара электрометра весь общий заряд (который был у кубика и шара до контакта) распределяется в некоторой постоянной пропорции между кубиком и шаром. Пусть на шаре остаётся доля x от всего их общего с кубиком заряда.

Имеем:

$$\text{после касания шара с 1-м кубиком на шаре: } Q_1 = xq = 18;$$

$$\text{после касания со 2-м кубиком на шаре: } Q_2 = x(q + Q_1) = x(q + 18);$$

$$\text{после касания с 3-м кубиком на шаре: } Q_3 = x(q + Q_2) = x(q + x(q + 18)) = 38.$$

Подставляя $xq = 18$ в последнее соотношение, получим

$$18 + 18x + 18x^2 = 38.$$

Решив это квадратное уравнение, получаем $x = 2/3$ или $x = -5/3$. Только первое значение x физично (ясно, что заряды на металлических кубике и шаре после их контакта одинаковы по знаку, то есть доля x заведомо положительна и меньше 1). Из $xq = 18$ имеем $q = 27$.



Решения задач для 9 класса

9.1. (2 балла) Два пиратских корабля, находящиеся на экваторе, поделив добычу, стали двигаться один строго на запад, а второй строго на восток с одинаковыми по модулю скоростями $v = 20$ км/час относительно Земли. Каждому кораблю досталось ровно по $m = 100$ килограммов золота (взвешивание производилось с помощью рычажных весов на покоеющихся относительно Земли кораблях). По прошествии некоторого времени взвешивание повторили уже на движущихся судах, используя точные электронные весы.

Определите, на сколько показания весов будут отличаться на корабле, идущем на запад, от показаний весов, движущихся с кораблём на восток.

Примечание. Считайте Землю шаром с продолжительностью суток $T = 24$ часа, $g = 10$ м/с².
(В. В. Кузьмичев, С. А. Старовойтов)

Ответ: 16 граммов.

Решение. Обозначим корабли: №1 идёт на запад, №2 — на восток. Вес золота на 1-м корабле равен разности силы тяжести и произведения массы на величину центростремительного ускорения. Расчёт центростремительного ускорения производится с учётом того, что скорость корабля в инерциальной системе равна разности скоростей вращения Земли и корабля относительно поверхности Земли:

$$P_1 = mg - ma_{n1} = mg - \frac{m(v_3 - v)^2}{R_3}.$$

Аналогично вес золота на 2-м корабле:

$$P_2 = mg - ma_{n2} = mg - \frac{m(v_3 + v)^2}{R_3}.$$

Вычислим разность:

$$\Delta P = P_1 - P_2 = \frac{m}{R_3} \cdot ((v_3 + v)^2 - (v_3 - v)^2) = \frac{m}{R_3} \cdot 4v_3v = \frac{m}{R_3} \cdot 4 \cdot \frac{2\pi R_3}{T} \cdot v = \frac{8\pi mv}{T}.$$

Отсюда различие в показаниях весов:

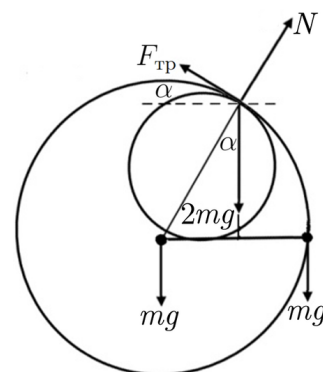
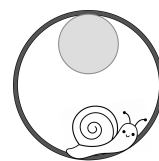
$$\Delta m = \frac{\Delta P}{g} = \frac{8\pi mv}{gT} = 16 \text{ г.}$$

9.2. (3 балла) На цилиндрическом карнизе для портьер свободно надето тонкое кольцо. В нижней точке кольца находится улитка (см. рис.). Масса улитки и кольца одинаковы. Улитка начинает медленно двигаться вверх по кольцу. При каком минимальном значении коэффициента трения кольца о карниз улитка сумеет добраться до верхней точки кольца? (А. А. Юринов, С. А. Старовойтов)

Ответ: $1/\sqrt{3}$.

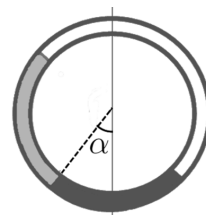
Решение. Т.к. массы кольца и улитки равны, максимальный угол отклонения кольца будет соответствовать положению улитки, изображённого на рисунке (вертикаль из точки касания кольца и карниза должна пройти через середину радиуса кольца). Следовательно, угол α равен 30° , а коэффициент трения $\mu \geq \tan \alpha = 1/\sqrt{3}$.

Центр масс системы (кольцо — улитка) находится на середине радиуса, проведённого из центра кольца в улитку. При движении улитки по кольцу из нижней точки к верхней, например, против часовой, центр масс смещается вправо, соответственно, вправо смещается и вертикаль, проходящая через точку касания кольца и карниза и центр масс. Кольцо поворачивается на карнизе без скольжения, а точка касания перемещается по поверхности карниза по часовой. Сила трения (покоя) приложена в точке



касания и направлена по касательной к кольцу вверх и влево. Угол наклона касательной к горизонту возрастает и становится максимальным, когда улитка и центр кольца будут лежать на одной горизонтали. Как видно из рисунка, этот угол равен 30° . Причём ситуация аналогична брусочку на шероховатой наклонной плоскости. Там, как известно, критерием покоя является соотношение между коэффициентом трения и углом наклона плоскости $\mu \geq \operatorname{tg} \alpha$. Таким образом, если кольцо не сорвётся в скольжение по карнизу даже в положении, показанном на рисунке, улитка доберётся до верхней точки кольца. Её дальнейшее движение по кольцу будет приводить к смещению центра масс влево и, как следствие, уменьшению угла наклона касательной в точке касания.

9.3. (2 балла) В длинную тонкую трубку залили равные объёмы двух несмешивающихся жидкостей с различными плотностями, заполнив её ровно наполовину. Трубку свернули в кольцо, расположив его в вертикальной плоскости (см. рис.). Угол, который составляет с вертикалью отрезок, проходящий через границу раздела жидкостей и центр кольца, равен $\alpha = 10^\circ$. Найдите плотность лёгкой жидкости ρ_2 , если плотность тяжёлой известна и равна $\rho_1 = 1000 \text{ кг/м}^3$. (М. П. Коробков, Т. А. Андреева)



Ответ: 700 кг/м^3 .

Решение. Напишем гидростатические давления внизу трубок. В правой:

$$P_{\text{п}} = \rho_1 g h_1 = \rho_1 g R \left(1 - \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right) = \rho_1 g R (1 - \sin \alpha).$$

В левой:

$$P_{\text{л}} = \rho_1 g R (1 - \cos \alpha) + \rho_2 g R \cos \alpha + \rho_2 g R \sin \alpha.$$

В состоянии равновесия гидростатические давления внизу трубки в левой и правой частях кольца равны:

$$P_{\text{п}} = P_{\text{л}} \Leftrightarrow \rho_1 (1 - \sin \alpha) = \rho_1 (1 - \cos \alpha) + \rho_2 (\cos \alpha + \sin \alpha).$$

Выразим нужную плотность:

$$\rho_2 = \rho_1 \cdot \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha} = \rho_1 \cdot \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha} = 700 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

9.4. (1 балл) Осёл, козёл, мартышка и косолапый мишка выступали на юбилей Политехнического. Помня о дурной славе своего квартета, они заменили альт и контрабас на гобой и фагот, а скрипки оставили. И перед концертом проверили, что все инструменты звучат в унисон. Взлетали и лопались наполненные гелием шары, а сотрудники кафедры гидроаэродинамики надували из баллонов всё новые и новые...



К концу вечера музыканты обнаружили, что духовые безнадежно перестали попадать в ноты. От распада квартет спас студент-физик, который напомнил, что, прижимая струну, скрипачи задают частоту её колебаний, а клапаны духовых инструментов задают длину волны издаваемого звука. Из-за значительного количества гелия в воздухе скорость звука увеличилась на 10%.

На сколько герц стали отличаться частоты инструментов, изначально настроенных на 300 Гц? (Т. А. Андреева)

Ответ: на 30 Гц.

Решение. Так как длина волны духовых инструментов не изменилась, то, по определению:

$$\lambda = \frac{v_{\text{зв}0}}{f_0} = \frac{v_{\text{зв}}}{f},$$

где индексом 0 обозначены значения в отсутствии гелия, а без индекса — при его наличии. Преобразуем:

$$f = f_0 \cdot \frac{v_{\text{зв}}}{v_{\text{зв}0}} = 1,1 \cdot 300 = 330 \text{ Гц}.$$

Тогда разность частот $\Delta f = 30 \text{ Гц}$.

9.5. (3 балла) Колесо радиуса 20 см, двигаясь по прямой дороге равномерно со скоростью 9 км/ч, из-за наличия проскальзывания, переместилось всего на 2 метра, сделав при этом целых 5 оборотов.

На какой максимальной высоте от земли сможет побывать капля, оторвавшаяся от колеса в точке A ?

Примечание. Сопротивлением воздуха пренебрегите. (М. А. Крупина)

Ответ: 3,325 м.

Решение. Вертикальная составляющая скорости капли в начальный момент времени равна скорости вращения обода колеса и направлена вверх:

$$v' = \omega R. \quad (*)$$

Определим расстояние, пройденное колесом за N оборотов:

$$S = v_0 t = v_0 T \cdot N.$$

Из определения угловой скорости получим связь между ней и скоростью движения колеса, и подставим в (*):

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{S} \cdot v_0 N \Rightarrow v' = \frac{2\pi R v_0 N}{S} = v_y.$$

Запишем уравнение для высоты подъёма капли относительно начального положения h и приравняем к нулю выражение для скорости капли:

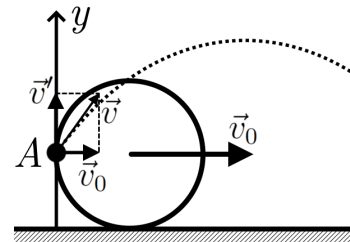
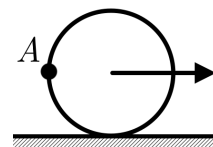
$$\begin{cases} h = v_y t - g \cdot \frac{t^2}{2}, \\ 0 = v_y - gt. \end{cases}$$

Получим из второго уравнения значение момента времени t , когда капля достигнет максимальной высоты: $t = v_y/g$. Подставим это в первое уравнение, учитывая, что полная высота подъёма равна $H = h + R$:

$$h = \frac{v_y^2}{g} - \frac{v_y^2}{2g} = \frac{v_y^2}{2g} = \frac{4\pi^2 R^2 v_0^2 N^2}{2g S^2}.$$

Получим отсюда окончательное выражение для высоты h , подставив численные значения, получим требуемую высоту:

$$H = R + \frac{4\pi^2 R^2 v_0^2 N^2}{2g S^2} = 3,325 \text{ м.}$$



9.6. (2 балла) На главной оптической оси OO' тонкой линзы имеются три замечательные точки: A , B , C , причём $AB = BC = L$. Если точечный источник света поместить в одну из них, то изображение оказывается в одной из двух других.

Найдите расстояние между точками L , если фокусное расстояние линзы $F = 12$ см.

(С. А. Старовойтов)

Ответ: 27 см.

Решение. Условию задачи может удовлетворять только собирающая линза. Причём одно из изображений будет действительным, а другое мнимым.

Пусть источник расположен в точке A , а линза — между точками B и C . Обозначим расстояние от точки B до линзы за x , тогда:

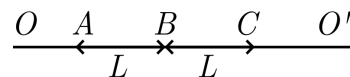
$$\frac{1}{F} = \frac{1}{L+x} + \frac{1}{L-x}.$$

Теперь поместим источник в точку B , а линза по-прежнему находится между точками B и C . Тогда

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{x} - \frac{1}{L+x}.$$

Приравняв правые части уравнений, получим (после несложных преобразований), что $x = L/3$. Подставив это в любое из первых двух уравнений, найдём расстояние L :

$$L = \frac{9F}{4} = 27 \text{ см.}$$





Решения задач для 10 класса

10.1. (2 балла) Гриша со склона горы кинул огромный камень. Подойдём к этому поступку формально. Выберем начало координат в точке броска, ось x направим вниз, вдоль склона, а ось y — перпендикулярно поверхности и будем считать, что она совпадает по направлению с начальной скоростью камня. Уравнение траектории камня описывается функцией $y(x) = -\sqrt{3}x + 10\sqrt{x}$.

Чему равна начальная скорость камня?

Примечание. Ускорение свободного падения считайте равным 10 м/с^2 . (М. А. Крупина)

Ответ: $15,8 \text{ м/с}$.

Решение. Введём прямоугольную систему координат с осью x вдоль наклонной плоскости и осью y , перпендикулярной плоскости (см. справа). Обозначим коэффициенты в заданном уравнении траектории камня за $a = \sqrt{3}$ и $b = 10$. В выбранной системе координат составляющие ускорения равны

$$\begin{cases} a_x = g \sin \alpha, \\ a_y = g \cos \alpha. \end{cases}$$

Запишем уравнение движения камня вдоль оси x и выразим время через координату:

$$x = \frac{g \sin \alpha \cdot t^2}{2} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2x}{g \sin \alpha}}.$$

Запишем уравнение движения камня вдоль оси y :

$$y = v_0 t - \frac{g \cos \alpha \cdot t^2}{2}.$$

Подставим в него выражение для t :

$$y(x) = v_0 \cdot \sqrt{\frac{2x}{g \sin \alpha}} - \frac{g \cos \alpha \cdot 2x}{2g \sin \alpha}.$$

Таким образом, уравнение траектории имеет вид

$$y(x) = -\operatorname{ctg} \alpha \cdot x + \frac{v_0 \sqrt{2}}{\sqrt{g \sin \alpha}} \cdot \sqrt{x}.$$

Свяжем коэффициенты с заданными параметрами задачи:

$$a = \operatorname{ctg} \alpha \Rightarrow \alpha = 30^\circ; \quad \frac{v_0 \sqrt{2}}{\sqrt{g \sin \alpha}} = b \Rightarrow \frac{2v_0^2}{g \sin \alpha} = b^2.$$

Тогда для скорости камня получим:

$$v_0 = \sqrt{\frac{b^2 g \sin \alpha}{2}} = \sqrt{\frac{100 \cdot 10}{4}} = 5\sqrt{10} \approx 15,8 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

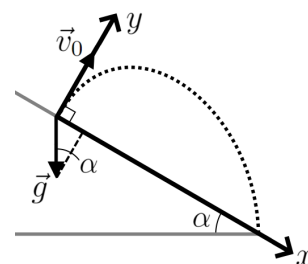
10.2. (2 балла) Два квадрокоптера летают на разных фиксированных высотах по концентрическим окружностям разного радиуса, но всё время находятся на одной прямой относительно оператора, стоящего на земле. Оператор ошибся и коптер, летевший на меньшей высоте, начал ускоряться. В момент времени, когда они впервые снова оказались на одной прямой с оператором, скорости коптеров стали одинаковыми. При этом коптер, который двигался равноускоренно, сделал $n = 5$ оборотов.

По окружности какого радиуса летел ускоряющийся коптер, если второй летел по окружности радиуса $r_2 = 24 \text{ м}$? (Т. В. Воробьева, С. А. Старовойтов)

Ответ: 16 м .

Решение. Вначале угловые скорости коптеров одинаковы, следовательно

$$\frac{v_1}{r_1} = \frac{v_2}{r_2} \Rightarrow v_1 = v_2 \cdot \frac{r_1}{r_2}. \quad (*)$$



Когда скорости коптеров сравнялись после начала ускорения нижнего:

$$v_2 = v_1 + at \Rightarrow v_2 \left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right) = at \Rightarrow t = \frac{v_2 \cdot \left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right)}{a}. \quad (**)$$

Нижний коптер совершил n оборотов:

$$\pi n r_1 = v_1 t + \frac{at^2}{2}.$$

Подставляя (*) и (**), получим, после преобразований:

$$2\pi n r_1 = \frac{v_2^2}{a} \cdot \frac{1}{2} \left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right) \left(1 + \frac{r_1}{r_2}\right).$$

За то же время верхний коптер совершил $n - 1$ оборот:

$$2\pi(n - 1)r_2 = v_2 t.$$

Подставим (**) и получим:

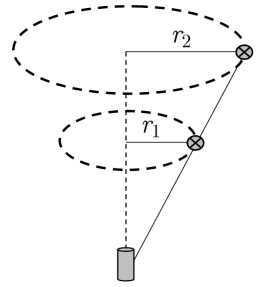
$$\frac{v_2^2}{a} = \frac{2\pi(n - 1)r_2}{1 - \frac{r_1}{r_2}}.$$

Таким образом,

$$2\pi n r_1 = \frac{2\pi(n - 1)r_2}{1 - \frac{r_1}{r_2}} \cdot \frac{1}{2} \left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right) \left(1 + \frac{r_1}{r_2}\right).$$

В итоге, после несложных преобразований, получим ответ:

$$r_1 = r_2 \cdot \frac{n - 1}{n + 1} = 16 \text{ м.}$$



10.3. (3 балла) Вова и Ваня играли в пинг-понг. Вова сильно, но неточно ударил ракеткой по теннисному шарик, шарик полетел в потолок, отскочил от потолка, ударился о пол и стал прыгать. После первого удара о пол скорость шарика была равна $v_1 = 7$ м/с и направлена вертикально вверх. При каждом ударе о пол шарик теряет $k = 14\%$ скорости.

Найдите время от момента первого удара до остановки, в течение которого шарик будет прыгать на полу.

Примечание. Движение шарика вертикальное, временем каждого удара и сопротивлением воздуха пренебрегите, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с². (С. А. Старовойтов)

Ответ: 10 с.

Решение. Высоту подъёма шарика после первого удара определим из закона сохранения механической энергии:

$$\frac{mv_1^2}{2} = mgH_1 \Rightarrow H_1 = \frac{v_1^2}{2g}.$$

Время подъёма до максимальной высоты, как и время падения, равны (из кинематики):

$$t_1 = \sqrt{\frac{2H_1}{g}} = \frac{v_1}{g}.$$

Уменьшение скорости на $k = 14\% = 0,14$ при ударе означает, что после каждого удара остаётся доля энергии, равная $(1 - k)^2$.

После первого удара энергия шарика изменится в $(1 - k)^2$ раз, так же уменьшится и высота подъёма после первого удара:

$$H_2 = (1 - k)^2 H_1, \quad t_2 = t_1(1 - k).$$

Полное время движения:

$$t = 2t_1 + 2t_2 + 2t_3 + \dots = 2t_1(1 + (1 - k) + (1 - k)^2 + \dots),$$

где в скобках — убывающая геометрическая прогрессия со знаменателем $(1 - k) < 1$. Сумма такой прогрессии

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - k)^n} = \frac{1}{1 - (1 - k)} = \frac{1}{k}.$$

Тогда

$$t = 2t_1 \cdot \frac{1}{k} = 2 \cdot \frac{v_1}{g} \cdot \frac{1}{k} = 2 \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{1}{0,14} = 10 \text{ с.}$$

10.4. (3 балла) Некоторое количество аргона нагрели, увеличив давление в n раз пропорционально температуре по закону $P = \alpha T$, затем объём увеличили в n раз пропорционально температуре по закону $V = \beta T$ до такой величины, что при последующем охлаждении по закону $T = \lambda V^2$ газ вернулся в исходное состояние.

Определите КПД такого цикла. Для расчёта примите $n = 2$.

(М. А. Крупина)

Ответ: 7,7%.

Решение. Запишем уравнения для всех процессов, входящих в цикл:

$$1 \rightarrow 2: \quad P = \alpha T \Rightarrow V = \text{const},$$

$$2 \rightarrow 3: \quad V = \beta T \Rightarrow P = \text{const},$$

$$3 \rightarrow 1: \quad T = \lambda V^2 \Rightarrow P \sim V.$$

По определению КПД, с учётом того, что теплота поступает в процессах $1 \rightarrow 2$ и $2 \rightarrow 3$:

$$\eta = \frac{A}{Q_+} = \frac{A}{Q_{12} + Q_{23}}.$$

Вычислим работу как площадь внутри цикла:

$$A = \frac{(nP - P)(nV - V)}{2} = \frac{PV(n - 1)^2}{2}.$$

Так как в процессе $1 \rightarrow 2$ работа не совершается, то количество теплоты в этом процессе определяется как изменение внутренней энергии:

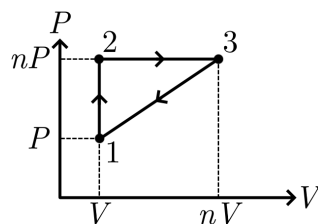
$$Q_{12} = \frac{3}{2} \cdot (nP - P)V = \frac{3}{2} \cdot PV(n - 1).$$

В процессе $2 \rightarrow 3$ количество теплоты определяется из 1 закона термодинамики и формулы для работы при постоянном давлении.

$$Q_{23} = \frac{3}{2} \cdot (n^2PV - nPV) + nP(nV - V) = \frac{3}{2} \cdot nPV(n - 1) + n(n - 1)PV = n(n - 1)PV \cdot \frac{5}{2}.$$

Подставляем и получаем выражение для КПД:

$$\eta = \frac{PV(n - 1)^2}{2 \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot PV(n - 1) + \frac{5}{2} \cdot PVn(n - 1) \right)} = \frac{2PV(n - 1)^2}{2PV(n - 1)(3 + 5n)} = \frac{n - 1}{3 + 5n} = \frac{1}{13} \approx 0,077.$$



10.5. (2 балла) К Рождеству мужчины 26-го экипажа международной космической станции решили приготовить Катерине Коулман, единственной женщине на корабле, подарок. На МКС нашлось только 4 бусинки, которые космонавты привязали на нитку на одинаковом расстоянии друг от друга так, что получилось ожерелье. За время изготовления ожерелья бусинки наэлектризовались, приобретя одинаковые по знаку заряды q , Nq , q , Nq . В результате, висящее в невесомости ожерелье приняло форму ромба.

Найдите отношение диагоналей этого ромба (большой к меньшей). Для расчёта примите $N = 8$.

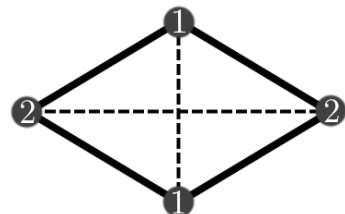
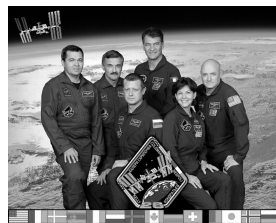
(Т. А. Андреева)

Ответ: 4.

Решение. Вертикальная компонента силы, действующей на верхний заряд 1:

$$-2T \cos \alpha + 2F_{12} \cos \alpha + F_{11} = 0, \quad (10.5.1)$$

где α — угол между правой стороной и вертикалью, T — сила натяжения нити, F_{11} — сила отталкивания от заряда на другом конце диагонали, F_{12} — сила отталкивания от заряда на другом конце стороны ромба.



Горизонтальная компонента силы, действующей на правый заряд 2:

$$-2T \sin \alpha + 2F_{12} \sin \alpha + F_{22} = 0, \quad (10.5.2)$$

где F_{22} — сила отталкивания от заряда на другом конце диагонали.

Поделив (10.5.1) на косинус и (10.5.2) на синус, получим:

$$\frac{F_{11}}{\cos \alpha} = \frac{F_{22}}{\sin \alpha} \Leftrightarrow \frac{kq^2}{d_1^2 \cos \alpha} = \frac{k(Nq)^2}{d_2^2 \sin \alpha}. \quad (10.5.3)$$

Из геометрии отношение диагоналей $d_2/d_1 = \operatorname{tg} \alpha$. Подставляя в (10.5.3), получаем:

$$\operatorname{tg} \alpha = N^{2/3} \Rightarrow \frac{d_2}{d_1} = N^{2/3} = 4.$$

10.6. (3 балла) Когда Касым понял, что окончательно забыл волшебные слова и из пещеры сорока разбойников ему уже не выбраться, у него оставалась последняя надежда — позвонить брату, чтобы Али-Баба напомнил ему нужные слова. Однако телефон Касыма показывал критически низкий уровень заряда, и чтобы совершить звонок, нужно было дозарядить его хотя бы на 20 мАч. Среди сокровищ пещеры Касым нашёл лишь один пальчиковый Ni–Cd аккумулятор с напряжением 1,25 В и три суперконденсатора (ионистора) ёмкостью 20 Ф каждый. Касым стал заряжать эти конденсаторы от пальчикового аккумулятора, соединять их последовательно и подключать к аккумулятору телефона.



Сколько раз Касыму придётся повторить эту процедуру, чтобы позвонить Али-Бабе?

Примечание. Напряжение на аккумуляторе телефона равно 3,6 В.

(Т. А. Андреева)

Ответ: 72 раза.

Решение. Заряженная батарея последовательно соединённых конденсаторов имеет ёмкость

$$C = \frac{1}{\frac{1}{C_{\text{и}}} + \frac{1}{C_{\text{и}}} + \frac{1}{C_{\text{и}}}} = \frac{C_{\text{и}}}{3} = \frac{20}{3} \text{ Ф}$$

и напряжение $U = 3 \cdot 1,25 = 3,75$ В. Разряжаясь на аккумулятор телефона с напряжением $U' = 3,6$ В, батарея из конденсаторов отдаёт заряд, равный

$$q = C(U - U') = \frac{20}{3} \cdot 0,15 = 1 \text{ Кл.}$$

Заряд, необходимый для совершения звонка

$$Q = 20 \text{ мА} \cdot \text{ч} = 20 \cdot 10^{-3} \cdot 3600 \text{ А} \cdot \text{с} = 72 \text{ Кл.}$$

Количество зарядок равно

$$N = \frac{Q}{q} = 72.$$



Решения задач для 11 класса

11.1. (2 балла) Муравей бежит с постоянной скоростью v по горизонтальной поверхности. На его пути находится конический холм, вертикальное осевое сечение которого имеет вид равностороннего треугольника со стороной L . Как должен двигаться муравей, чтобы, преодолев холм, оказаться в противоположной точке основания холма за минимальное время? Определите это время t .

Примечание. Скорость муравья считайте неизменной. (А. А. Юринов, С. А. Старовойтов)

Ответ: $t = L\sqrt{2}/v$.

Решение. Муравей должен двигаться так, чтобы длина его траектории (линии на поверхности конуса, соединяющей концы диаметра окружности в основании холма) была минимальна.

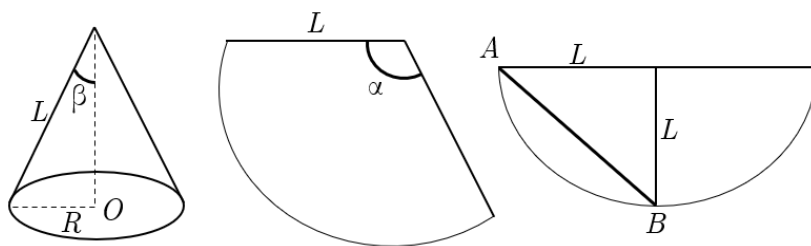
Длину этой линии легко определить на развёртке конуса, которая представляет на плоскости сектор круга радиуса L и с углом раствора α .

Так как длина дуги развёртки равна длине окружности основания конуса:

$$\alpha L = 2\pi R \quad \Rightarrow \quad \alpha = 2\pi \cdot \frac{R}{L} = 2\pi \sin \beta.$$

Поскольку вертикальное осевое сечение — равносторонний треугольник, то $\beta = \pi/6$ и $\alpha = \pi$. Тогда развёртка конуса имеет вид полукруга, откуда легко определить длину и время движения по искомой линии:

$$AB = L\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{L\sqrt{2}}{v}.$$



11.2. (3 балла) Малоизвестная, но совершенно правдивая история, случившаяся с бароном Мюнхгаузеном. Однажды барон прокопал шахту от северного полюса до самого центра Земли. На всякий случай прихватил с собой пушку и ядро. Достигнув центра Земли, барон решил вернуться назад таким способом. Поджёг запал, вскочил на ядро и вылетел на поверхность.

Какова была скорость ядра с бароном в момент старта, если Мюнхгаузен смог теперь поведать эту историю?

Примечание. Землю считайте однородным шаром, радиус Земли примите равным 6400 км, ускорение свободного падения у поверхности Земли — $9,8 \text{ м/с}^2$, силами сопротивления пренебрегите, в эту историю искренне верьте. (С. А. Старовойтов)

Ответ: $7,9 \text{ км/с}$.

Решение. Воспользуемся теоремой Гаусса для гравитационного поля:

$$\oint \vec{g} d\vec{S} = -4\pi Gm,$$

где $\vec{g}$ — напряжённость гравитационного поля, G — гравитационная постоянная, m — масса внутри поверхности, по которой ведётся интегрирование в левой части. Возьмём замкнутую поверхность в виде сферы с центром в центре Земли радиусом $r \geq R_3$. Тогда, из соображений симметрии, получим

$$4\pi r^2 g = -4\pi G \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi r^3,$$

где ρ_3 — плотность Земли:

$$\rho_3 = \frac{M_3}{V_3} = \frac{3M_3}{4\pi R_3^3}.$$

В итоге, напряжённость гравитационного поля внутри Земли линейно зависит от расстояния от центра вдоль радиального направления:

$$g(r) = -\frac{4}{3} \cdot \pi G \rho r,$$

где минус указывает на то, что вектор напряжённости $\vec{g}$ направлен к центру Земли. Тогда величина гравитационной силы, действующей на тело массой m , на расстояниях $r \geq R_3$ равна

$$F = \frac{4}{3} \cdot \pi G \rho m r.$$

Воспользуемся теоремой, согласно которой работа всех сил, действующих на тело (в нашем случае — только гравитационной силы) равна приращению кинетической энергии тела:

$$\Delta E_{\text{кин}} = A_{\text{грав}} \Leftrightarrow \frac{mv_0^2}{2} = \int_0^{R_3} \frac{4}{3} \cdot \pi \rho G m r \, dr$$

(полагая, что барон на ядре достигает поверхности Земли с пренебрежимо малой скоростью). Интегрируя, получаем:

$$v_0 = \sqrt{\frac{4}{3} \cdot \pi G \rho R_3^2} = \sqrt{\frac{M_3 G}{R_3}}.$$

Учитывая, что $M_3 G = g_3 R_3^2$, где g_3 — ускорение свободного падения у поверхности Земли, окончательно получим:

$$v_0 = \sqrt{g_3 R_3} = 7,9 \frac{\text{км}}{\text{с}}$$

(совпадает с первой космической скоростью).

Другое решение. Рассмотрим движение барона на ядре от центра Земли к поверхности как четверть колебания тела от положения равновесия до крайнего положения под действием квазиупругой силы $F_{\text{ку}} = -kr$, где

$$k = \frac{4}{3} \cdot \pi G \rho m$$

(см. выше). В нашем случае амплитуда колебаний $r_0 = R$. Тогда

$$v_0 = r_0 \omega = R_3 \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{4}{3} \cdot \pi G \rho R_3^2} = \sqrt{\frac{M_3 G}{R_3}} = \sqrt{g_3 R_3} = 7,9 \frac{\text{км}}{\text{с}}.$$

Примечание. К рассмотрению принимаются любые разумные соображения, приводящие к пониманию линейной зависимости гравитационной силы от расстояния до центра Земли внутри Земли.

11.3. (2 балла) Жилой дом обогревается двухблочным кондиционером («сплит-система»), работающим в режиме теплового насоса и потребляющего $P = 1,5$ кВт электроэнергии. Его эффективность в $n = 5$ раз меньше, чем у идеальной тепловой машины, работающей по обратному циклу Карно в тех же условиях. Из-за теплопроводности стен и окон тепло уходит из дома со скоростью, пропорциональной разнице температур в доме и на улице, с коэффициентом пропорциональности $\alpha = 400$ Вт/К. Чему равна температура на улице, если температура в помещении $+27^\circ\text{C}$?



Примечание. Тепловой насос — машина, забирающая тепло при низкой температуре (у «холодильника») и отдающая его при высокой температуре («нагревателю») за счёт совершения внешними силами работы. Эффективность теплового насоса в режиме обогревателя рассчитывается как отношение полученного «нагревателем» тепла к совершённой внешними силами работе, в данном случае — к затраченной электроэнергии. (Т. А. Андреева)

Ответ: 12°C .

Решение. Обозначим K — коэффициент эффективности «динамического отопления», Q_1 — тепло, передаваемое нагревателю, Q_2 — тепло, отбираемое у холодильника, τ — некоторый промежуток времени. Тогда:

$$K = \frac{Q_1}{A} = \frac{Q_1}{Q_1 - Q_2} = \frac{Q_1}{P \cdot \tau}. \quad (11.3.1)$$

Пусть также K_0 — коэффициент эффективности «динамического отопления» идеальной маши-

ны (работающей по обратному циклу Карно), T_1 — температура нагревателя, T_2 — температура холодильника. Тогда:

$$K_0 = \frac{T_1}{T_1 - T_2} = nK. \quad (11.3.2)$$

Тепло, передаваемое нагревателю с учётом потерь на теплопроводность:

$$Q_1 = \alpha(T_1 - T_2) \cdot \tau. \quad (11.3.3)$$

Подставим (11.3.1) в (11.3.2) с учётом (11.3.3) и выразим T_2 :

$$\begin{aligned} \frac{T_1}{T_1 - T_2} &= n \frac{\alpha(T_1 - T_2)}{P} \Leftrightarrow T_1 P = n\alpha(T_1 - T_2)^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow T_1 - T_2 = \sqrt{\frac{T_1 P}{\alpha n}} \Leftrightarrow T_2 = T_1 - \sqrt{\frac{T_1 P}{\alpha n}}. \end{aligned}$$

Подставим числа:

$$T_2 = 300 - \sqrt{\frac{300 \cdot 1,5 \cdot 10^3}{400 \cdot 5}} = 300 - \sqrt{\frac{900}{4}} = 300 - \sqrt{225} = 300 - 15 = 285 \text{ К} = 12^\circ \text{С}.$$

11.4. (4 балла) В двух одинаковых цепях, схема которых изображена на рисунке, в начальный момент все конденсаторы не заряжены и все ключи разомкнуты. В цепях начинают по очереди замыкать ключи: в первой — от ключа K_1 к ключу K_{2023} ($K_1 \rightarrow K_{2023}$),

во второй — в обратном порядке ($K_1 \leftarrow K_{2023}$), выжидая каждый раз достаточно длительное время, чтобы конденсаторы перезарядились. Во сколько раз количество теплоты, которое выделится на резисторе R после замыкания последнего ключа (K_{2023}) в первой схеме, меньше количества теплоты, выделяющегося на том же резисторе при замыкании ключа K_1 во второй?

Примечание. Внутренним сопротивлением источника пренебрегите.

(М. А. Кругина)

Ответ: $4,09 \cdot 10^6$.

Решение. Рассмотрим первую схему. Сразу после замыкания ключа K_n электрический заряд с $(n - 1)$ конденсаторов перераспределится между n конденсаторами согласно уравнению $q_{n-1}^{\text{общ}} = q_n^{\text{общ}}$. Запишем его через ёмкости и напряжения на системе параллельных конденсаторов:

$$ncU_1 = (n - 1)cU_0.$$

Получим значения для напряжённости сразу после коммутации:

$$U_1 = \frac{n - 1}{n} \cdot U_0.$$

Через некоторый промежуток времени на конденсаторах должно установиться единое напряжение U_0 . Для этого через сопротивление должен пройти заряд

$$\Delta q_1 = ncU_0 - ncU_1 = nc(U_0 - U_1) = cU_0.$$

При этом источником тока будет произведена работа $A_{\text{ист1}} = \Delta q_1 \cdot U_0 = cU_0^2$, которая пойдёт на увеличение энергии, запасённой в конденсаторах, и тепло, выделившееся на сопротивлении:

$$A_{\text{ист1}} = \Delta W_1 + Q_1.$$

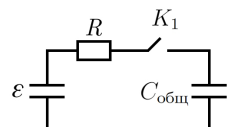
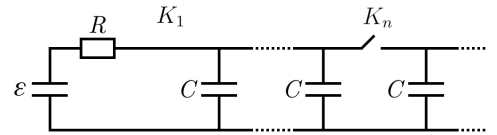
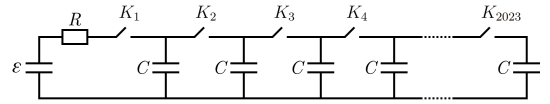
Поэтому тепло, выделившееся на сопротивлении в первой схеме, равно

$$\begin{aligned} Q_1 &= A_{\text{ист1}} - \Delta W_1 = cU_0^2 - \left(\frac{ncU_0^2}{2} - \frac{ncU_1^2}{2} \right) = cU_0^2 - \frac{ncU_0^2}{2} + \frac{nc(n - 1)^2 U_0^2}{2n^2} = \\ &= cU_0^2 \left(1 - \frac{n}{2} + \frac{n^2 - 2n + 1}{2n} \right) = cU_0^2 \cdot \frac{2n - n^2 - 2n + 1 + n^2}{2n} = \frac{cU_0^2}{2n} = \frac{c\varepsilon^2}{2n}. \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим вторую схему в момент, когда все ключи замкнуты, кроме K_1 . Перед его коммутацией полная ёмкость системы равна $C_{\text{общ}} = nC$.

Поэтому работа источника тока в этом случае:

$$A_{\text{ист2}} = \Delta q_2 U_0 = ncU_0^2.$$



При этом запасённая в системе конденсаторов энергия равна

$$\Delta W_2 = W_2 = \frac{ncU_0^2}{2}.$$

Тогда тепло, выделившееся на сопротивлении, равно

$$Q_2 = A_{\text{ист}2} - \Delta W_2 = \frac{ncU_0^2}{2}.$$

Осталось найти искомое отношение количеств теплоты:

$$\frac{Q_2}{Q_1} = n^2 \approx 4,09 \cdot 10^6.$$

11.5. (3 балла) Проволочное кольцо радиуса r , обладающее электрическим сопротивлением R , находится в однородном магнитном поле. Линии индукции перпендикулярны плоскости кольца, а модуль изменяется по гармоническому закону $B = B_0 \cos(\omega t)$. Индуктивность кольца пренебрежимо мала. Определите максимальное значение силы натяжения кольца.

(М. А. Крупина)

Ответ: $T_{\text{max}} = \frac{B_0^2 \pi r^3 \omega}{2R}.$

Решение. Выделим малый участок кольца — дугу длиной l , опирающуюся на малый угол α . Магнитное поле изменяется по гармоническому закону: $B = B_0 \cos(\omega t)$, при этом магнитный поток через кольцо:

$$\Phi = BS = B_0 \pi r^2 \cos(\omega t).$$

Наводимая в кольце ЭДС равна

$$\varepsilon_i = -\Phi' = B_0 \pi r^2 \omega \sin(\omega t).$$

Тогда ток в кольце:

$$I = \frac{\varepsilon_i}{R} = \frac{B_0 \pi r^2 \omega \sin(\omega t)}{R}.$$

Магнитная сила, действующая на участок кольца:

$$F_A = IBl = \frac{B_0^2 \pi r^2 l \omega \sin(\omega t) \cos(\omega t)}{R} = \frac{B_0^2 \pi r^2 l \omega}{2R} \cdot \sin(2\omega t).$$

Из условия равновесия получим связь магнитной силы и силы натяжения:

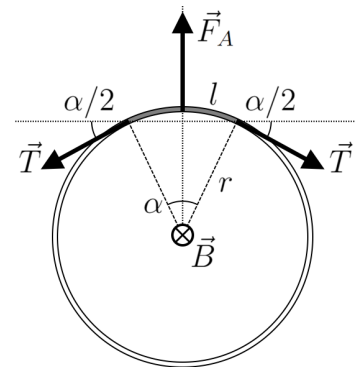
$$F_A = 2T \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \approx T\alpha.$$

Учитывая, что $l = r\alpha$, выражаем T :

$$T = \frac{B_0^2 \pi r^3 \omega}{2R} \cdot \sin(2\omega t).$$

Найдём максимум:

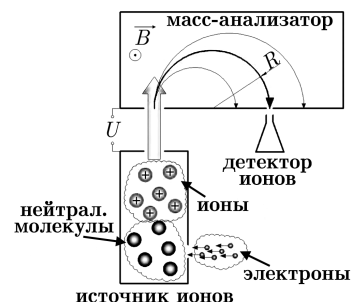
$$T_{\text{max}} = \frac{B_0^2 \pi r^3 \omega}{2R}.$$



11.6. (2 балла) На рисунке представлена блок-схема простейшего масс-спектрометра. Принцип работы данной установки можно описать так:

- 1) в источнике ионов нейтральные атомы или молекулы ионизируются электронным ударом;
- 2) получившиеся ионы ускоряются разностью потенциалов U и попадают в масс-анализатор;
- 3) в масс-анализаторе ионы оказываются в области однородного магнитного поля B , причём скорости частиц перпендикулярны линиям индукции магнитного поля;
- 4) далее, через узкую щель ионы попадают в детектор.

Считая детектор неподвижным относительно масс-анализатора, найдите, во сколько раз необходимо изменить индукцию магнитного поля B_2/B_1 , чтобы в детектор попадали ионы той же массы, что и при магнитном поле B_1 , но с зарядом, на единицу большим (в единицах элементарного заряда).



Примечание. Учитывайте при расчёте, что скорость ионов на выходе из источника (до ускорения электрическим полем) равна нулю. Заряд ионов, которые попадали в детектор в магнитном поле B_1 , равен Ze , где $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, Z примите равным 18.

(В. В. Кузьмичев, С. А. Старовойтов)

Ответ: 0,973.

Решение. Из теоремы о кинетической энергии выражаем скорости ионов:

$$\frac{mV_1^2}{2} = Z \cdot e \cdot U \quad \Rightarrow \quad V_1 = \sqrt{\frac{2Z \cdot e \cdot U}{m}}.$$

Аналогично для второго случая:

$$\frac{mV_2^2}{2} = (Z + 1) \cdot e \cdot U \quad \Rightarrow \quad V_2 = \sqrt{\frac{2(Z + 1) \cdot e \cdot U}{m}}.$$

Из II закона Ньютона:

$$\begin{aligned} Z \cdot e \cdot V \cdot B_1 &= \frac{MV_1^2}{R_1} \quad \Rightarrow \quad B_1 = \frac{mV_1}{R_1 \cdot Z \cdot e}, \\ (Z + 1) \cdot e \cdot V \cdot B_2 &= \frac{MV_2^2}{R_2} \quad \Rightarrow \quad B_2 = \frac{mV_2}{R_2 \cdot (Z + 1) \cdot e}. \end{aligned}$$

Так как детектор неподвижен относительно масс-анализатора, то $R_1 = R_2$, поэтому

$$\frac{B_2}{B_1} = \frac{V_2}{V_1} \cdot \frac{Z}{Z + 1} = \sqrt{\frac{Z + 1}{Z}} \cdot \frac{Z}{Z + 1} = \sqrt{\frac{Z}{Z + 1}} = \sqrt{\frac{18}{18 + 1}} \approx 0,973.$$