Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2022–2023 учебный год. Отборочный этап

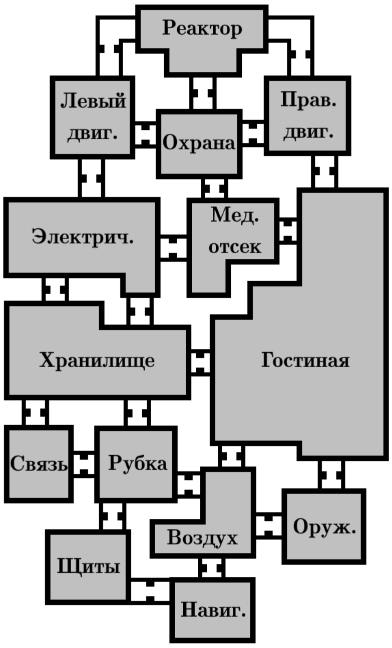
Задачи для 5 класса

Работы сдаются в электронном виде (например, в виде сканов или doc-файлов с текстом), подробности на странице formulo.org/ru/olymp/2022-math-ru/. Последний срок сдачи — **9 ноября 2022 года в 23:59:59 по UTC** (то есть 10 ноября в 02:59:59 по московскому времени).

Работа должна быть сделана самостоятельно. В большинстве задач нужны не только ответы, но и полные обоснования. В работе не должно быть личных данных участника, то есть **подписывать работу не следует**.

1. Три прямые делят круг на 7 частей. Можно ли распределить числа от 1 до 7 по одному в каждой области так, чтобы суммы чисел, стоящих по одну и по другую сторону от каждой прямой, были равны?

2. Марине для участия в олимпиаде нужно купить тетрадку, ручку, линейку, карандаш и ластик. Если она купит тетрадку, карандаш и ластик, то потратит 47 тугриков. Если купит тетрадку, линейку и ручку, то потратит 58 тугриков. Сколько ей понадобится денег на весь набор, если тетрадь стоит 15 тугриков?

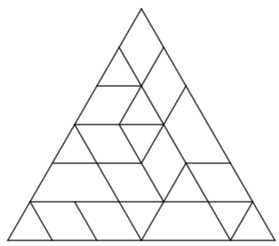


3. На исследовательском космическом корабле произошла авария в реакторе, и из него утекают ядовитые вещества. Все коридоры между помещениями оборудованы герметичными дверями, однако времени на закрытие отдельных дверей уже нет. Тем не менее, капитан может успеть отдать команду «Закрыть N дверей», после которой искусственный интеллект корабля закроет случайные N дверей. Чему равно наименьшее N, чтобы вся команда гарантированно смогла спастись в гостиной?

4. На острове рыцарей, которые всегда говорят правду, и лжецов, которые всегда врут, открыли школу. Все $2N$ учеников разного роста встали в круг, после чего каждый сказал: «Я выше ученика, стоящего напротив меня!» Сколько рыцарей учится в школе?

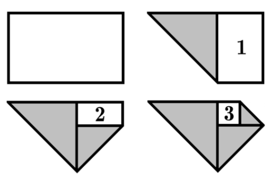
5. Егор написал на доске число и зашифровал его по правилам буквенных ребусов (разным буквам соответствуют разные цифры, одинаковым буквам — одинаковые цифры). Получилось слово «ГВАТЕМАЛА». Сколько различных чисел Егор мог изначально написать, если его число делилось на 5?

6. Разрежьте данный треугольник по отмеченным линиям на три равные части (то есть совпадающие и по форме, и по размеру).



7. Три автомобиля A, B и C стартуют одновременно из одной и той же точки круговой трассы. A и B едут по часовой стрелке, а C — против. Все автомобили движутся с постоянными (но попарно различными) скоростями. Спустя ровно 7 минут после начала гонки A впервые встречает C. Через ещё 46 минут A и B встречаются впервые. А через какое время после начала гонки все три машины встретятся в первый раз?

8. Есть прямоугольный лист, белый с одной стороны и серый с другой. Его согнули так, как показано на картинке. Периметр первого прямоугольника на 20 больше периметра второго прямоугольника. А периметр второго прямоугольника на 16 больше периметра третьего прямоугольника. Найдите периметр исходного листа.



Авторы задач: Л. С. Корешкова (1, 7, 8), П. Д. Муленко (2, 3, 4, 5, 6).

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2022–2023 учебный год. Отборочный этап

Задачи для 6 класса

Работы сдаются в электронном виде (например, в виде сканов или doc-файлов с текстом), подробности на странице formulo.org/ru/olymp/2022-math-ru/. Последний срок сдачи — **9 ноября 2022 года в 23:59:59 по UTC** (то есть 10 ноября в 02:59:59 по московскому времени).

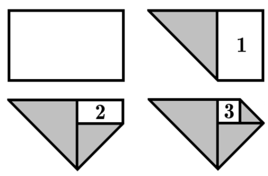
Работа должна быть сделана самостоятельно. В большинстве задач нужны не только ответы, но и полные обоснования. В работе не должно быть личных данных участника, то есть **подписывать работу не следует**.

1. Три прямые делят круг на 7 частей. Можно ли распределить семь последовательных натуральных чисел по одному в каждой области так, чтобы суммы чисел, стоящих по одну и по другую сторону от каждой прямой, были равны?

2. Марине для участия в олимпиаде нужно купить тетрадку, ручку, линейку и карандаш. Если она купит тетрадку, карандаш и линейку, то потратит 47 тугриков. Если купит тетрадку, линейку и ручку, то потратит 58 тугриков. Если же купит только ручку с карандашом, потратит 15 тугриков. Сколько ей понадобится денег на весь набор?

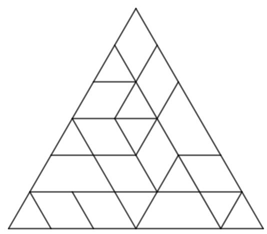
3. Исследовательский космический корабль входит в пояс астероидов, которые могут повредить корпус корабля, что приведет к разгерметизации. Все коридоры между помещениями оборудованы герметичными дверями. У капитана есть дроид-помощник, который может закрывать (но не открывать обратно) двери в тех коридорах, где он проезжает. Сможет ли дроид закрыть все двери на корабле?

4. Есть прямоугольный лист, белый с одной стороны и серый с другой. Его согнули так, как показано на картинке. Периметр первого прямоугольника на 20 больше периметра второго прямоугольника. А периметр второго прямоугольника на 16 больше периметра третьего прямоугольника. Найдите периметр исходного листа.



5. Егор написал на доске число и зашифровал его по правилам буквенных ребусов (разным буквам соответствуют разные цифры, одинаковым буквам — одинаковые цифры). Получилось слово «ГВАТЕМАЛА». Сколько различных чисел Егор мог изначально написать, если его число делилось на 25?

6. Разрежьте данный треугольник по отмеченным линиям на три равные части (то есть совпадающие и по форме, и по размеру).



7. На острове рыцарей, которые всегда говорят правду, и лжецов, которые всегда врут, открыли школу. Все $2N$ учеников построились в колонну по двое (то есть в два столбца). Двое человек, стоящих первыми, сказали: «Я выше двоих: своего соседа в паре и человека за мной». Последние двое сказали: «Я тоже выше двоих: своего соседа в паре и человека передо мной». Наконец, все остальные сказали: «А я выше троих: своего соседа в паре, человека передо мной и человека за мной».
   а) Какое максимальное количество рыцарей учится в школе?
   б) Могут ли в школе учиться только лжецы?

8. Четыре автомобиля A, B, C и D стартуют одновременно из одной и той же точки круговой трассы. A и B едут по часовой стрелке, а C и D — против. Все автомобили движутся с постоянными (но попарно различными) скоростями. Спустя ровно 7 минут после начала гонки A впервые встречает C, и в этот же момент B впервые встречает D. Через ещё 46 минут A и B встречаются впервые. А через какое время после начала гонки в первый раз встретятся C и D?

Авторы задач: Л. С. Корешкова (1, 4, 7, 8), П. Д. Муленко (2, 3, 5, 6).

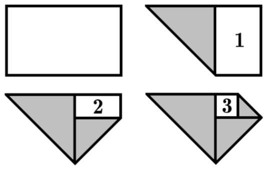
Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2022–2023 учебный год. Отборочный этап

Задачи для 7 класса

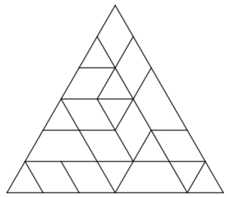
Работы сдаются в электронном виде (например, в виде сканов или doc-файлов с текстом), подробности на странице formulo.org/ru/olymp/2022-math-ru/. Последний срок сдачи — **9 ноября 2022 года в 23:59:59 по UTC** (то есть 10 ноября в 02:59:59 по московскому времени).

Работа должна быть сделана самостоятельно. В большинстве задач нужны не только ответы, но и полные обоснования. В работе не должно быть личных данных участника, то есть **подписывать работу не следует**.

1. Есть прямоугольный лист, белый с одной стороны и серый с другой. Его согнули так, как показано на картинке. Периметр первого прямоугольника на 20 больше периметра второго прямоугольника. А периметр второго прямоугольника на 16 больше периметра третьего прямоугольника. Найдите площадь исходного листа.



2. Разрежьте данный треугольник по отмеченным линиям на три равные части (то есть совпадающие и по форме, и по размеру).

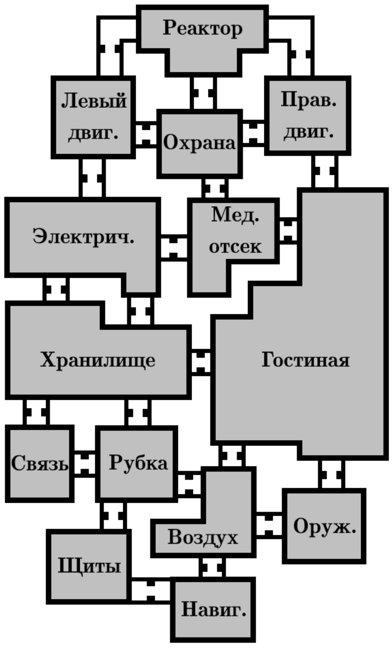


3. Егор написал на доске число и зашифровал его по правилам буквенных ребусов (разным буквам соответствуют разные цифры, одинаковым буквам — одинаковые цифры). Получилось слово «ГВАТЕМАЛА». Сколько различных чисел Егор мог изначально написать, если его число делилось на 8?

4. Четыре автомобиля A, B, C и D стартуют одновременно из одной и той же точки круговой трассы. A и B едут по часовой стрелке, а C и D — против. Все автомобили движутся с постоянными (но попарно различными) скоростями. Спустя ровно 7 минут после начала гонки A впервые встречает C, и в этот же момент B впервые встречает D. Через ещё 46 минут A и B встречаются впервые. А через какое время после начала гонки все машины встретятся в первый раз?

5. В ряд выписаны квадраты первых 2022 натуральных чисел: $1, 4, 9, \ldots, 4088484$. Для каждого выписанного числа, кроме первого и последнего, посчитали среднее арифметическое его левого и правого соседей и записали под ним (например, под числом 4 написали $\frac{1+9}{2} = 5$). Для получившейся строки из 2020 чисел сделали то же самое. Так продолжали, пока не дошли до строки, в которой всего два числа. Чему они равны?

6. На исследовательском космическом корабле произошла авария в реакторе, и из него утекают ядовитые вещества. Все коридоры между помещениями оборудованы герметичными дверями, однако времени на закрытие отдельных дверей уже нет. Тем не менее, капитан может успеть отдать команду «Закрыть N дверей», после которой искусственный интеллект корабля закроет случайные N дверей. Чему равно наименьшее N, чтобы гарантированно хотя бы один из отсеков корабля остался пригодным для жизни?



7. Назовём натуральное число *полезным*, если оно не содержит в своей десятичной записи ни нулей, ни одинаковых цифр, а произведение всех цифр кратно их сумме. Существуют ли два последовательных трёхзначных полезных числа?

8. На острове рыцарей, которые всегда говорят правду, и лжецов, которые всегда врут, открыли школу. Все $2N$ учеников разного роста построились в колонну по двое (то есть в два столбца). Двое человек, стоящих первыми, сказали: «Я выше двоих: своего соседа в паре и человека за мной». Последние двое сказали: «Я тоже выше двоих: своего соседа в паре и человека передо мной». Наконец, все остальные сказали: «А я выше троих: своего соседа в паре, человека передо мной и человека за мной».
   а) Какое максимальное количество рыцарей учится в школе?
   б) Могут ли в школе учиться только лжецы?

Авторы задач: Л. С. Корешкова (1, 4, 8), П. Д. Муленко (2, 3, 6), А. А. Теслер (5), С. П. Павлов (7).

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2022–2023 учебный год. Отборочный этап

Задачи для 8 класса

Работы сдаются в электронном виде (например, в виде сканов или doc-файлов с текстом), подробности на странице formulo.org/ru/olymp/2022-math-ru/. Последний срок сдачи — **9 ноября 2022 года в 23:59:59 по UTC** (то есть 10 ноября в 02:59:59 по московскому времени).

Работа должна быть сделана самостоятельно. В большинстве задач нужны не только ответы, но и полные обоснования. В работе не должно быть личных данных участника, то есть **подписывать работу не следует**.

---

1. Петя разделил круг тремя прямыми на 7 частей и хочет написать в них 7 последовательных целых чисел (в каждой по числу) так, чтобы суммы чисел, стоящих по одну и по другую сторону от каждой из прямых, были одинаковы. Придумайте для него три примера, различающихся наборами использованных чисел.
2. *Разламыванием* остроугольного треугольника ABC будем называть операцию, когда внутри него ставят такую точку O, что $OA = OB = OC$, и разрезают его на треугольники OAB, OAC, OBC. Петя взял треугольник с углами 3°, 88° и 89° и *разломал* его на три треугольника. Потом выбрал один из кусков (тоже остроугольный) и *разломал* его. Так он продолжал до тех пор, пока все треугольники не оказались тупоугольными. Сколько всего треугольников у него получилось?
3. Натуральное число $n > 5$ называется *новым*, если существует число, не кратное n, но кратное всем натуральным числам, меньшим n. Какое наибольшее количество подряд идущих чисел могут быть новыми?
4. Среднее арифметическое нескольких натуральных чисел равно 20,22. Докажите, что среди этих чисел найдутся два равных.
5. В ряд выписаны квадраты первых 2022 натуральных чисел: $1, 4, 9, \ldots, 4088484$. Для каждого выписанного числа, кроме первого и последнего, посчитали среднее арифметическое его левого и правого соседей и записали под ним (например, под числом 4 написали $\frac{1+9}{2} = 5$). Для получившейся строки из 2020 чисел сделали то же самое. Так продолжали, пока не дошли до строки, в которой всего два числа. Чему они равны?
6. Четыре автомобиля A, B, C и D стартуют одновременно из одной и той же точки круговой трассы. A и B едут по часовой стрелке, а C и D — против. Все автомобили движутся с постоянными (но попарно различными) скоростями. Спустя ровно 7 минут после начала гонки A впервые встречает C, и в этот же момент B впервые встречает D. Через ещё 46 минут A и B встречаются впервые. А через какое время после начала гонки в первый раз встретятся C и D?
7. На острове рыцарей, которые всегда говорят правду, и лжецов, которые всегда врут, открыли школу. Все $2N$ учеников разного роста построились в колонну по двое (то есть в два столбца). Двое человек, стоящих первыми, сказали: «Я выше двоих: своего соседа в паре и человека за мной». Последние двое сказали: «Я тоже выше двоих: своего соседа в паре и человека передо мной». Наконец, все остальные сказали: «А я выше троих: своего соседа в паре, человека передо мной и человека за мной».
   а) Какое максимальное количество рыцарей учится в школе?
   б) Могут ли в школе учиться только лжецы?
8. Егор написал на доске число и зашифровал его по правилам буквенных ребусов (разным буквам соответствуют разные цифры, одинаковым буквам — одинаковые цифры). Получилось слово «ГВАТЕМАЛА». Сколько различных чисел Егор мог изначально написать, если его число делилось на 30?

Авторы задач: Л. С. Корешкова (1, 6, 7), А. А. Теслер (2, 4, 5), О. А. Пяйве (3), П. Д. Муленко (8).

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2022–2023 учебный год. Отборочный этап

Задачи для 9 класса

Работы сдаются в электронном виде (например, в виде сканов или doc-файлов с текстом), подробности на странице formulo.org/ru/olymp/2022-math-ru/. Последний срок сдачи — **9 ноября 2022 года в 23:59:59 по UTC** (то есть 10 ноября в 02:59:59 по московскому времени).

Работа должна быть сделана самостоятельно. В большинстве задач нужны не только ответы, но и полные обоснования. В работе не должно быть личных данных участника, то есть **подписывать работу не следует**.

1. Есть ли в XXI веке такой год, номер которого можно представить в виде $\dfrac{a+b\cdot c\cdot d\cdot e}{f+g\cdot h\cdot i\cdot j}$, где $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j$ — попарно различные цифры?

2. Петя разделил круг тремя прямыми на 7 частей и написал в них 7 различных целых чисел так, что суммы чисел, стоящих по одну и по другую сторону от каждой из прямых, были одинаковы. Одно из чисел равно нулю. Докажите, что какое-то число отрицательно.

3. В сельском клубе проводится чемпионат по шахматам: каждый участник должен сыграть с каждым по одной партии. В клубе только одна доска, поэтому две партии не могут проходить одновременно. По регламенту чемпионата, в любой момент число партий, уже сыгранных разными участниками, должно различаться не более чем на 1. Первые несколько партий чемпионата прошли с соблюдением регламента. Всегда ли можно завершить чемпионат, соблюдая регламент?

4. Докажите, что можно разрезать правильный пятиугольник на 4 части, из которых без просветов и наложений составляется прямоугольник.

5. Четыре автомобиля A, B, C и D стартуют одновременно из одной и той же точки круговой трассы. A и B едут по часовой стрелке, а C и D — против. Все автомобили движутся с постоянными (но попарно различными) скоростями. Спустя ровно 7 минут после начала гонки A впервые встречает C, и в этот же момент B впервые встречает D. Через ещё 46 минут A и B встречаются впервые. А через какое время после начала гонки в первый раз встретятся C и D?

6. Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение $(a+1)(b+1)(c+1) = 2abc$?

7. Назовём натуральное число *полезным*, если оно не содержит в своей десятичной записи ни нулей, ни одинаковых цифр, а произведение всех цифр кратно их сумме. Найдите два наибольших последовательных (то есть различающихся на 1) полезных числа.

8. Парк представляет собой квадрат 10×10 клеток. В любую клетку можно поставить фонарь (но не более одного фонаря в каждой клетке).
   а) Парк называется *освещённым*, если, в какой бы клетке ни находился посетитель, найдётся квадрат из 9 клеток, содержащий и посетителя, и какой-нибудь фонарь. Каково минимальное количество фонарей в освещённом парке?
   б) Парк называется *надёжно освещённым*, если он остаётся освещённым даже после поломки одного любого фонаря. Каково минимальное количество фонарей в надёжно освещённом парке?

Авторы задач: С. П. Павлов (1, 7), Л. С. Корешкова (2, 5, 6), А. А. Теслер (3, 4, 8).

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2022–2023 учебный год. Отборочный этап

Задачи для 10 класса

Работы сдаются в электронном виде (например, в виде сканов или doc-файлов с текстом), подробности на странице formulo.org/ru/olymp/2022-math-ru/. Последний срок сдачи — **9 ноября 2022 года в 23:59:59 по UTC** (то есть 10 ноября в 02:59:59 по московскому времени).

Работа должна быть сделана самостоятельно. В большинстве задач нужны не только ответы, но и полные обоснования. В работе не должно быть личных данных участника, то есть **подписывать работу не следует**.

1. Петя разделил круг тремя прямыми на 7 частей и написал в них 7 различных целых чисел так, что суммы чисел, стоящих по одну и по другую сторону от каждой из прямых, были одинаковы. Одно из чисел равно нулю. Докажите, что какое-то число отрицательно.
2. В сельском клубе проводится чемпионат по шахматам: каждый участник должен сыграть с каждым по одной партии. В клубе только одна доска, поэтому две партии не могут проходить одновременно. По регламенту чемпионата, в любой момент число партий, уже сыгранных разными участниками, должно различаться не более чем на 1. Докажите, что при любом числе участников можно провести чемпионат с соблюдением регламента.
3. Докажите, что можно разрезать правильный пятиугольник на 4 части, из которых без просветов и наложений составляется прямоугольник.
4. Будем называть точку *удобной* для окружности, если угол между касательными, проведёнными из этой точки к окружности, равен 60°. Две окружности с центрами A и B касаются друг друга, а точка M является удобной для каждой из них. Найдите отношение радиусов окружностей, если $\triangle ABM$ прямоугольный.
5. Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение $(a+1)(b+1)(c+1) = 2abc$?
6. Парк представляет собой квадрат 10×10 клеток. В любую клетку можно поставить фонарь (но не более одного фонаря в каждой клетке).
   а) Парк называется *освещённым*, если, в какой бы клетке ни находился посетитель, найдётся квадрат из 9 клеток, содержащий и посетителя, и какой-нибудь фонарь. Каково минимальное количество фонарей в освещённом парке?
   б) Парк называется *надёжно освещённым*, если он остаётся освещённым даже после поломки одного любого фонаря. Каково минимальное количество фонарей в надёжно освещённом парке?
7. $f(x)$ — линейная функция, причём уравнение $f(f(x)) = x+1$ не имеет решений. Найдите все возможные значения величины $f(f(f(f(f(2022))))) - f(f(f(2022))) - f(f(2022))$.
8. Назовём *эффективностью* натурального числа n долю всех натуральных чисел от 1 до n включительно, имеющих с n общий делитель, больший 1. Например, эффективность числа 6 равна $\frac{2}{3}$.
   а) Существует ли число с эффективностью более 80%? Если да, найдите наименьшее такое число.
   б) Существует ли число, эффективность которого максимальна (то есть не меньше, чем у любого другого числа)? Если да, найдите наименьшее такое число.

Авторы задач: Л. С. Корешкова (1, 5), А. А. Теслер (2, 3, 4, 6, 7), О. А. Пяйве (8).

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2022–2023 учебный год. Отборочный этап

Задачи для 11 класса

Работы сдаются в электронном виде (например, в виде сканов или doc-файлов с текстом), подробности на странице formulo.org/ru/olymp/2022-math-ru/. Последний срок сдачи — **9 ноября 2022 года в 23:59:59 по UTC** (то есть 10 ноября в 02:59:59 по московскому времени).

Работа должна быть сделана самостоятельно. В большинстве задач нужны не только ответы, но и полные обоснования. В работе не должно быть личных данных участника, то есть **подписывать работу не следует**.

1. Назовём натуральное число *полезным*, если оно не содержит в своей десятичной записи ни нулей, ни одинаковых цифр, а произведение всех цифр кратно их сумме. Найдите два наибольших последовательных (то есть различающихся на 1) полезных числа.
2. Четыре автомобиля A, B, C и D стартуют одновременно из одной и той же точки круговой трассы. A и B едут по часовой стрелке, а C и D — против. Все автомобили движутся с постоянными (но попарно различными) скоростями. Спустя ровно 7 минут после начала гонки A впервые встречает C, и в этот же момент B впервые встречает D. Через ещё 46 минут A и B встречаются впервые. А через какое время после начала гонки все машины встретятся в первый раз?
3. Докажите, что можно разрезать правильный пятиугольник на 4 части, из которых без просветов и наложений составляется прямоугольник.
4. Будем называть точку *удобной* для окружности, если угол между касательными, проведёнными из этой точки к окружности, равен 60°. Две окружности с центрами A и B касаются друг друга, а точка M является удобной для каждой из них. Найдите отношение радиусов окружностей, если $\triangle ABM$ прямоугольный.
5. Найдите все тройки вещественных чисел a, b, c, для которых
$$27^{a^2+b+c+1} + 27^{b^2+c+a+1} + 27^{c^2+a+b+1} = 3.$$
6. Парк представляет собой квадрат 10×10 клеток. В любую клетку можно поставить фонарь (но не более одного фонаря в каждой клетке).
а) Парк называется *освещённым*, если, в какой бы клетке ни находился посетитель, найдётся квадрат из 9 клеток, содержащий и посетителя, и какой-нибудь фонарь. Каково минимальное количество фонарей в освещённом парке?
б) Парк называется *надёжно освещённым*, если он остаётся освещённым даже после поломки одного любого фонаря. Каково минимальное количество фонарей в надёжно освещённом парке?
7. Назовём *эффективностью* натурального числа n долю всех натуральных чисел от 1 до n включительно, имеющих с n общий делитель, больший 1. Например, эффективность числа 6 равна $\frac{2}{3}$.
а) Существует ли число с эффективностью более 80%? Если да, найдите наименьшее такое число.
б) Существует ли число, эффективность которого максимальна (то есть не меньше, чем у любого другого числа)? Если да, найдите наименьшее такое число.
8. Некая непрерывная функция f такова, что $f(f(f(f(f(0))))) = 0$. Докажите, что уравнение $f(f(x)) = x$ имеет хотя бы один корень.

Авторы задач: С. П. Павлов (1), Л. С. Корешкова (2), А. А. Теслер (3, 4, 6, 8), П. Д. Муленко (5), О. А. Пяйве (7).