Olimpiada matemática internacional
"Fórmula de la Unidad" / "Tercer Milenio"
Año escolar 2022–2023. Etapa preliminar

Problemas para el nivel R5

Los trabajos se aceptan en forma electrónica (archivos editados en computadora o imágenes escaneadas de las hojas). Para las instrucciones vea formulo.org/ru/olymp/2022-math-en/. Fecha límite — **9/11/22 a las 23:59:59 UTC**.

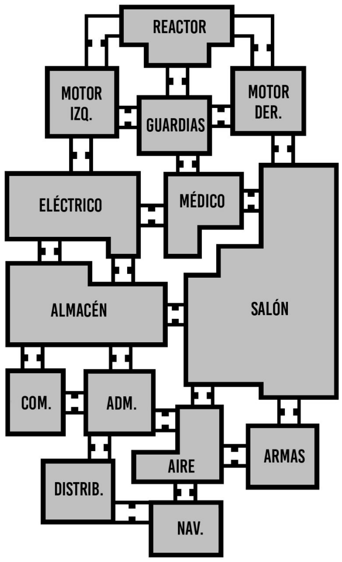
Cada participante debe entregar su propio trabajo. La mayoría de los problemas requiere un procedimiento completo, no solamente la respuesta. El trabajo no debe contener datos personales del participante, es decir, **no incluya su nombre, correo, etc. en el trabajo.**

---

1. Tres rectas dividen un círculo en 7 partes. ¿Podemos colocar los números de 1 a 7 (un número en cada parte) de tal manera que para cada recta la suma de los números colocados a un lado de la recta sea igual a la suma de los números colocados al otro lado?

2. Camila quiere participar en un concurso de matemáticas y necesita un cuaderno, una pluma, una regla, un lápiz y un borrador. Si ella compra un cuaderno, un lápiz y un borrador, va a gastar 47 céntimos. Si compra un cuaderno, una regla y una pluma, va a gastar 58 céntimos. Si un cuaderno cuesta 15 céntimos, ¿cuánto va a gastar Camila para comprar todo lo que necesita para el concurso?

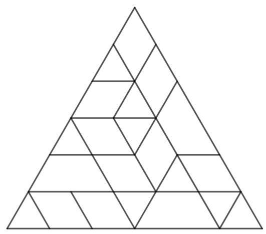
3. Una nave espacial científica sufrió una falla del reactor y ahora el reactor emite sustancias tóxicas. Todos los pasillos de la nave están equipados con puertas herméticas, mas ya no hay tiempo para cerrar las puertas una por una. Sin embargo, el capitán está a tiempo para dar un comando "Cerrar N puertas", después de lo cual la inteligencia artificial de la nave cerrará N puertas de una manera aleatoria. ¿Cuál es el mínimo N para garantizar que toda la tripulación se puede salvar en el salón de la nave?



4. En una isla viven dos tipos de personas: los caballeros que siempre dicen la verdad y los mentirosos que siempre mienten. Abrieron una escuela en la isla, hay $2N$ alumnos en la escuela y todos tienen las estaturas distintas. Cuando los alumnos se formaron en un círculo mirando hacia el centro, cada uno dijo: "¡Soy más alto que el compañero justo en frente de mi!" ¿Cuántos caballeros hay en la escuela?

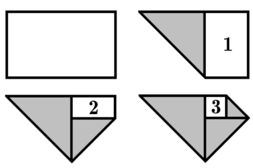
5. Jorge escribió en el pizarrón un número que se divide entre 5 y luego lo encriptó escribiendo una letra en lugar de cada cifra, de tal manera que letras distintas representan cifras distintas y letras iguales representan cifras iguales. Como resultado obtuvo la palabra "GUATEMALA". ¿Cuántas opciones hay para descifrar el número?

6. Corte el triángulo mostrado en la figura a lo largo de las líneas marcadas en tres partes congruentes (es decir, iguales en tamaño y forma).



7. Tres coches A, B y C inician una carrera simultáneamente del mismo punto de una pista circular. Los coches A y B corren en la dirección de las manecillas del reloj mientras C corre en la dirección contrarreloj. Los coches mantienen velocidades constantes pero distintas una de la otra. Exactamente 7 minutos después del inicio de la carrera A encuentra C por primera vez. Pasan otros 46 minutos cuando A y B se encuentran por primera vez. ¿Cuánto tiempo pasará desde el inicio de la carrera hasta que se encuentren por primera vez los tres coches juntos?

8. Una hoja de papel tiene una cara de color blanco y otra cara de color gris. Doblaron la hoja como se muestra en la figura. El perímetro del primer rectángulo es 20 unidades mayor que el perímetro del segundo rectángulo. El perímetro del segundo rectángulo es 16 unidades mayor que el perímetro del tercer rectángulo. Encuentre el perímetro de la hoja inicial.



Autores de los problemas: L. Koreshkova (1, 7, 8), P. Mulenko (2, 3, 4, 5, 6).

Olimpiada matemática internacional
"Fórmula de la Unidad" / "Tercer Milenio"
Año escolar 2022–2023. Etapa preliminar

Problemas para el nivel R6

Los trabajos se aceptan en forma electrónica (archivos editados en computadora o imágenes escaneadas de las hojas). Para las instrucciones vea formulo.org/ru/olymp/2022-math-en/. Fecha límite — **9/11/22 a las 23:59:59 UTC**.

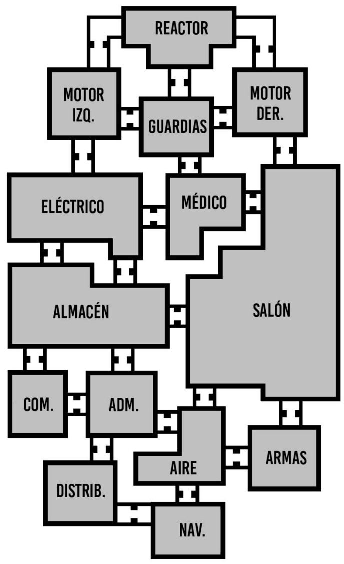
Cada participante debe entregar su propio trabajo. La mayoría de los problemas requiere un procedimiento completo, no solamente la respuesta. El trabajo no debe contener datos personales del participante, es decir, **no incluya su nombre, correo, etc. en el trabajo.**

---

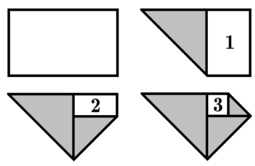
1. Tres rectas dividen un círculo en 7 partes. ¿Podemos colocar siete números naturales consecutivos (un número en cada parte) de tal manera que para cada recta la suma de los números colocados a un lado de la recta sea igual a la suma de los números colocados al otro lado?

2. Camila quiere participar en un concurso de matemáticas y necesita un cuaderno, una pluma, una regla y un lápiz. Si ella compra un cuaderno, un lápiz y una regla, va a gastar 47 pesetas. Si compra un cuaderno, una regla y una pluma va a gastar 58 pesetas. Si compra sólo una pluma y un lápiz va a gastar 15 pesetas. ¿Cuánto cuesta todo lo que necesita para el concurso?

3. Una nave espacial científica está entrando en un cinturón de asteroides, y los asteroides pueden dañar el cuerpo de la nave causando despresurización. Todos los pasillos de la nave están equipados con puertas herméticas. El capitán tiene un androide ayudante que puede cerrar puertas por donde pasa, pero no puede abrir puertas cerradas. ¿Logrará el androide cerrar todas las puertas de la nave?

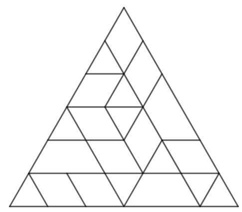


4. Una hoja de papel tiene una cara de color blanco y otra cara de color gris. Doblaron la hoja como se muestra en la figura. El perímetro del primer rectángulo es 20 unidades mayor que el perímetro del segundo rectángulo. El perímetro del segundo rectángulo es 16 unidades mayor que el perímetro del tercer rectángulo. Encuentre el perímetro de la hoja inicial.



5. Jorge escribió en el pizarrón un número que se divide entre 25 y luego lo encriptó escribiendo una letra en lugar de cada cifra, de tal manera que letras distintas representan cifras distintas y letras iguales representan cifras iguales. Como resultado obtuvo la palabra "GUATEMALA". ¿Cuántas opciones hay para descifrar el número?

6. Corte el triángulo mostrado en la figura a lo largo de las líneas marcadas en tres partes congruentes (es decir, iguales en tamaño y forma).



7. En una isla viven dos tipos de personas: los caballeros que siempre dicen la verdad y los mentirosos que siempre mienten. Abrieron una escuela en la isla, hay $2N$ alumnos en la escuela. Todos los alumnos se formaron en una doble columna de dos en dos. Las dos personas de la primera fila dijeron: "Yo soy más alto que dos personas: mi vecino de la fila y la persona detrás de mi". Las dos personas de la última fila dijeron: "Yo también soy más alto que dos personas: mi vecino de la fila y la persona delante de mi". Y los demás dijeron: "Yo soy más alto que tres personas: mi vecino de la fila, la persona delante de mi y la persona detrás de mi".
   a) ¿Cuál es el número máximo de los alumnos caballeros?
   b) ¿Pueden todos los alumnos de la escuela ser mentirosos?

8. Cuatro coches A, B, C y D inician una carrera simultáneamente del mismo punto de una pista circular. Los coches A y B corren en la dirección de las manecillas del reloj mientras C y D corren en la dirección contrarreloj. Los coches mantienen velocidades constantes pero distintas una de la otra. Exactamente 7 minutos después del inicio de la carrera A encuentra C por primera vez, mientras B y D se encuentran por primera vez. Pasan otros 46 minutos cuando A y B se encuentran por primera vez. ¿Cuánto tiempo pasará desde el inicio de la carrera hasta que se encuentren por primera los coches C y D?

Autores de los problemas: L. Koreshkova (1, 4, 7, 8), P. Mulenko (2, 3, 5, 6).

Olimpiada matemática internacional
“Fórmula de la Unidad” / “Tercer Milenio”
Año escolar 2022–2023. Etapa preliminar

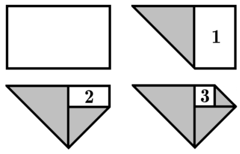
Problemas para el nivel R7

Los trabajos se aceptan en forma electrónica (archivos editados en computadora o imágenes escaneadas de las hojas). Para las instrucciones vea formulo.org/ru/olymp/2022-math-en/. Fecha límite — **9/11/22 a las 23:59:59 UTC**.

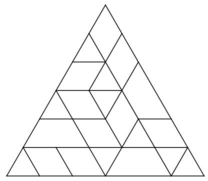
Cada participante debe entregar su propio trabajo. La mayoría de los problemas requiere un procedimiento completo, no solamente la respuesta. El trabajo no debe contener datos personales del participante, es decir, **no incluya su nombre, correo, etc. en el trabajo.**

---

1. Una hoja de papel tiene una cara de color blanco y otra cara de color gris. Doblaron la hoja como se muestra en la figura. El perímetro del primer rectángulo es 20 unidades mayor que el perímetro del segundo rectángulo. El perímetro del segundo rectángulo es 16 unidades mayor que el perímetro del tercer rectángulo. Encuentre el área de la hoja inicial.



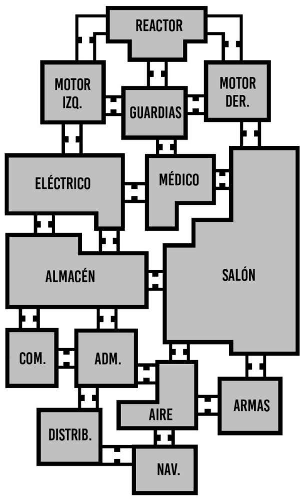
2. Corte el triángulo mostrado en la figura a lo largo de las líneas marcadas en tres partes congruentes (es decir, iguales en tamaño y forma).



3. Jorge escribió en el pizarrón un número que se divide entre 8 y luego lo encriptó escribiendo una letra en lugar de cada cifra, de tal manera que letras distintas representan cifras distintas y letras iguales representan cifras iguales. Como resultado obtuvo la palabra “GUATEMALA”. ¿Cuántas opciones hay para descifrar el número?

4. Cuatro coches A, B, C y D inician una carrera simultáneamente del mismo punto de una pista circular. Los coches A y B corren en la dirección de las manecillas del reloj mientras C y D corren en la dirección contrarreloj. Los coches mantienen velocidades constantes pero distintas una de la otra. Exactamente 7 minutos después del inicio de la carrera A encuentra C por primera vez, mientras B y D se encuentran por primera vez. Pasan otros 46 minutos cuando A y B se encuentran por primera vez. ¿Cuánto tiempo pasará desde el inicio de la carrera hasta que se encuentren por primera vez los cuatro coches juntos?

5. Escribieron en una fila los cuadrados de los primeros 2022 números naturales: $1, 4, 9, \ldots, 4088484$. Para cada de estos números, excepto el primero y el último, calcularon la media aritmética de sus vecinos a la izquierda y la derecha y anotaron el resultado directamente debajo del número. Por ejemplo, debajo del número 4 anotaron $\frac{1+9}{2} = 5$. Luego hicieron lo mismo con la fila de los 2020 números obtenidos. Así sucesivamente repetían este proceso hasta obtener una fila de solamente dos números. ¿Cuáles son estos números?



6. Una nave espacial científica sufrió una falla del reactor y ahora el reactor emite sustancias tóxicas. Todos los pasillos de la nave están equipados con puertas herméticas, mas ya no hay tiempo para cerrar las puertas una por una. Sin embargo, el capitán está a tiempo para dar un comando “Cerrar N puertas”, después de lo cual la inteligencia artificial de la nave cerrará N puertas de una manera aleatoria. ¿Cuál es el mínimo N para garantizar que por lo menos uno de los compartimentos permanezca habitable?

7. Un número natural se llama *útil* si en su representación decimal no hay ceros ni cifras que se repiten, y el producto de las cifras de este número es un múltiplo de la suma de las cifras. ¿Existen dos números útiles consecutivos de tres cifras?

8. En una isla viven dos tipos de personas: los caballeros que siempre dicen la verdad y los mentirosos que siempre mienten. Abrieron una escuela en la isla, hay $2N$ alumnos en la escuela y todos tienen las estaturas distintas. Todos los alumnos se formaron en una columna de dos en dos. Las dos personas de la primera fila dijeron: “Yo soy más alto que dos personas: mi vecino de la fila y la persona detrás de mi”. Las dos personas de la última fila dijeron: “Yo también soy más alto que dos personas: mi vecino de la fila y la persona delante de mi”. Y los demás dijeron: “Yo soy más alto que tres personas: mi vecino de la fila, la persona delante de mi y la persona detrás de mi”.
   a) ¿Cuál es el número máximo de los alumnos caballeros?
   b) ¿Pueden todos los alumnos de la escuela ser mentirosos?

Autores de los problemas: L. Koreshkova (1, 4, 8), P. Mulenko (2, 3, 6), A. Tesler (5), S. Pavlov (7).

Olimpiada matemática internacional
"Fórmula de la Unidad" / "Tercer Milenio"
Año escolar 2022–2023. Etapa preliminar

Problemas para el nivel R8

Los trabajos se aceptan en forma electrónica (archivos editados en computadora o imágenes escaneadas de las hojas). Para las instrucciones vea formulo.org/ru/olymp/2022-math-en/. Fecha límite — **9/11/22 a las 23:59:59 UTC**.

Cada participante debe entregar su propio trabajo. La mayoría de los problemas requiere un procedimiento completo, no solamente la respuesta. El trabajo no debe contener datos personales del participante, es decir, **no incluya su nombre, correo, etc. en el trabajo.**

---

1. Pedro dividió un circulo con tres líneas rectas en 7 partes y quiere escribir en ellas 7 números enteros consecutivos, uno en cada parte, de tal manera que para cada recta la suma de los números escritos por un lado de esta recta sea igual a la suma de los números por el otro lado. Encuentre tres ejemplos para Pedro, con distintos conjuntos de los números utilizados.
2. Llamaremos el *división* de un triángulo acutángulo ABC la siguiente operación: se marca un punto O interior tal que $OA = OB = OC$ y luego se recorta la figura en triángulos OAB, OAC, OBC. Pablo inicia con un triángulo con los ángulos 3°, 88° y 89° y lo *divide*. Luego escoge uno de los pedazos (también acutángulo) y lo *divide* y así sucesivamente hasta que todos los triángulos resulten obtusángulos. ¿Cuántos triángulos va a obtener Pablo en total?
3. Un número natural se llama *nuevo* si existe un número que no es un múltiplo de n pero sí es un múltiplo de cada número natural menor a n. ¿Cuál es la cantidad máxima de números nuevos consecutivos?
4. La media aritmética de varios números naturales es igual a 20.22. Demuestre que entre estos números hay dos números iguales.
5. Escribieron en una fila los cuadrados de los primeros 2022 números naturales: 1, 4, 9, ..., 4088484. Para cada de estos números, excepto el primero y el último, calcularon la media aritmética de sus vecinos a la izquierda y la derecha y anotaron el resultado directamente debajo del número. Por ejemplo, debajo del número 4 anotaron $\frac{1+9}{2} = 5$. Luego hicieron lo mismo con la fila de los 2020 números obtenidos. Así sucesivamente repetían este proceso hasta obtener una fila de solamente dos números. ¿Cuáles son estos números?
6. Cuatro coches A, B, C y D inician una carrera simultáneamente del mismo punto de una pista circular. Los coches A y B corren en la dirección de las manecillas del reloj mientras C y D corren en la dirección contrarreloj. Los coches mantienen velocidades constantes pero distintas una de la otra. Exactamente 7 minutos después del inicio de la carrera A encuentra C por primera vez, mientras B y D se encuentran por primera vez. Pasan otros 46 minutos cuando A y B se encuentran por primera vez. ¿Cuánto tiempo pasará desde el inicio de la carrera hasta que se encuentren por primera los coches C y D?
7. En una isla viven dos tipos de personas: los caballeros que siempre dicen la verdad y los mentirosos que siempre mienten. Abrieron una escuela en la isla, hay $2N$ alumnos en la escuela y todos tienen las estaturas distintas. Todos los alumnos se formaron en una columna de dos en dos. Las dos personas de la primera fila dijeron: "Yo soy más alto que dos personas: mi vecino de la fila y la persona detrás de mi". Las dos personas de la última fila dijeron: "Yo también soy más alto que dos personas: mi vecino de la fila y la persona delante de mi". Y los demás dijeron: "Yo soy más alto que tres personas: mi vecino de la fila, la persona delante de mi y la persona detrás de mi".
   a) ¿Cuál es el número máximo de los alumnos caballeros?
   b) ¿Pueden todos los alumnos de la escuela ser mentirosos?
8. Jorge escribió en el pizarrón un número que se divide entre 30 y luego lo encriptó escribiendo una letra en lugar de cada cifra, de tal manera que letras distintas representan cifras distintas y letras iguales representan cifras iguales. Como resultado obtuvo la palabra "GUATEMALA". ¿Cuántas opciones hay para descifrar el número?

Autores de los problemas: L. Koreshkova (1, 6, 7), A. Tesler (2, 4, 5), O. Pyayve (3), P. Mulenko (8).

Olimpiada matemática internacional
"Fórmula de la Unidad" / "Tercer Milenio"
Año escolar 2022–2023. Etapa preliminar

Problemas para el nivel R9

Los trabajos se aceptan en forma electrónica (archivos editados en computadora o imágenes escaneadas de las hojas). Para las instrucciones vea formulo.org/ru/olymp/2022-math-en/. Fecha límite — **9/11/22 a las 23:59:59 UTC**.

Cada participante debe entregar su propio trabajo. La mayoría de los problemas requiere un procedimiento completo, no solamente la respuesta. El trabajo no debe contener datos personales del participante, es decir, **no incluya su nombre, correo, etc. en el trabajo.**

---

1. ¿Hay un año del siglo XXI tal que su número se puede representar en forma $\frac{a+b\cdot c\cdot d\cdot e}{f+g\cdot h\cdot i\cdot j}$, donde $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j$ son cifras distintas una de otra?
2. Pedro dividió un circulo con tres líneas rectas en 7 partes y escribió en ellas 7 números enteros distintos, uno en cada parte, de tal manera que para cada recta la suma de los números escritos por un lado de esta recta es igual a la suma de los números por el otro lado. Uno de estos números es cero. Demuestre que alguno de los números es negativo.
3. Los vecinos del barrio quieren organizar un torneo de ajedrez donde cada participante debe jugar con cada otro un partido. Solamente tienen un tablero, así que no se pueden jugar dos partidos al mismo tiempo. Según el reglamento del torneo, en cada momento la diferencia entre las cantidades de partidas jugadas por cualesquiera dos jugadores debe ser máximo 1. Unos primeros partidos se jugaron según este reglamento. ¿siempre se puede llevar a cabo el torneo cumpliendo con el reglamento?
4. Demuestre que se puede cortar un pentágono regular en 4 partes y luego reordenar estas piezas sobre la mesa para formar un rectángulo sin solapar ni dejar huecos entre las piezas.
5. Cuatro coches A, B, C y D inician una carrera simultáneamente del mismo punto de una pista circular. Los coches A y B corren en la dirección de las manecillas del reloj mientras C y D corren en la dirección contrarreloj. Los coches mantienen velocidades constantes pero distintas una de la otra. Exactamente 7 minutos después del inicio de la carrera A encuentra C por primera vez, mientras B y D se encuentran por primera vez. Pasan otros 46 minutos cuando A y B se encuentran por primera vez. ¿Cuánto tiempo pasará desde el inicio de la carrera hasta que se encuentren por primera los coches C y D?
6. ¿Cuántas soluciones en números naturales tiene la ecuación $(a+1)(b+1)(c+1) = 2abc$?
7. Un número natural se llama *útil* si en su representación decimal no hay ceros ni cifras que se repiten, y el producto de las cifras de este número es un múltiplo de la suma de las cifras. Encuentre los dos números más grandes útiles consecutivos (es decir, cuya diferencia es 1).
8. Un parque tiene la forma de un cuadrado cuadriculado de tamaño 10×10 celdas. Se puede colocar un poste de luz en cualquier celda (máximo un poste en cada celda).
   a) Un parque se llama *iluminado* si para cualquier celda con un visitante se puede encontrar un cuadrado de 3×3 celdas que contenga al visitante y algún poste de luz. ¿Cuál es la cantidad mínima de postes en un parque iluminado?
   b) Un parque se llama *seguramente iluminado* si permanece iluminado incluso después de que un poste se rompa. ¿Cuál es la cantidad mínima de postes en un parque seguramente iluminado?

Autores de los problemas: S. Pavlov (1, 7), L. Koreshkova (2, 5, 6), A. Tesler (3, 4, 8).

Olimpiada matemática internacional
"Fórmula de la Unidad" / "Tercer Milenio"
Año escolar 2022–2023. Etapa preliminar

Problemas para el nivel R10

Los trabajos se aceptan en forma electrónica (archivos editados en computadora o imágenes escaneadas de las hojas). Para las instrucciones vea formulo.org/ru/olymp/2022-math-en/. Fecha límite — **9/11/22 a las 23:59:59 UTC**.

Cada participante debe entregar su propio trabajo. La mayoría de los problemas requiere un procedimiento completo, no solamente la respuesta. El trabajo no debe contener datos personales del participante, es decir, **no incluya su nombre, correo, etc. en el trabajo.**

---

1. Pedro dividió un circulo con tres líneas rectas en 7 partes y escribió en ellas 7 números enteros distintos, uno en cada parte, de tal manera que para cada recta la suma de los números escritos por un lado de esta recta es igual a la suma de los números por el otro lado. Uno de estos números es cero. Demuestre que alguno de los números es negativo.

2. Los vecinos del barrio quieren organizar un torneo de ajedrez donde cada participante debe jugar con cada otro un partido. Solamente tienen un tablero, así que no se pueden jugar dos partidos al mismo tiempo. Según el reglamento del torneo, en cada momento la diferencia entre las cantidades de partidas jugadas por cualesquiera dos jugadores debe ser máximo 1. Demuestre que, sea cual sea el número de participantes, se puede llevar a cabo el torneo cumpliendo con el reglamento.

3. Demuestre que se puede cortar un pentágono regular en 4 partes y luego reordenar estas piezas sobre la mesa para formar un rectángulo sin solapar ni dejar huecos entre las piezas.

4. Un punto se llama *conveniente* para una circunferencia si la medida del ángulo entre las rectas tangentes trazadas a la circunferencia desde este punto es igual a 60°. Dos circunferencias con los centros en los puntos A y B son tangentes, mientras el punto M es conveniente para ambas circunferencias. Encuentre la razón de los radios de las circunferencias si $\triangle ABM$ es un triángulo rectángulo.

5. ¿Cuántas soluciones en números naturales tiene la ecuación $(a+1)(b+1)(c+1) = 2abc$?

6. Un parque tiene la forma de un cuadrado cuadriculado de tamaño 10×10 celdas. Se puede colocar un poste de luz en cualquier celda (máximo un poste en cada celda).
   a) Un parque se llama *iluminado* si para cualquier celda con un visitante se puede encontrar un cuadrado de 3×3 celdas que contenga al visitante y algún poste de luz. ¿Cuál es la cantidad mínima de postes en un parque iluminado?
   b) Un parque se llama *seguramente iluminado* si permanece iluminado incluso después de que un poste se rompa. ¿Cuál es la cantidad mínima de postes en un parque seguramente iluminado?

7. $f(x)$ es una función lineal, tal que la ecuación $f(f(x)) = x+1$ no tiene raíces. Encuentre todos los valores posibles de la expresión $f(f(f(f(f(2022))))) - f(f(f(2022))) - f(f(2022))$.

8. Llamemos la *eficiencia* de un número natural n la fracción de todos los números naturales de 1 hasta n inclusive tales que tienen un divisor distinto de 1 común con n. Por ejemplo, la eficiencia del número 6 es $\frac{2}{3}$.
   a) ¿Existe un número cuya eficiencia es mayor a 80 %? Si la respuesta es afirmativa, encuentre el menor número así.
   b) ¿Existe un número cuya eficiencia es máxima, es decir, no menor que la eficiencia de cualquier otro número? Si la respuesta es afirmativa, encuentre el menor número así.

Autores de los problemas: L. Koreshkova (1, 5), A. Tesler (2, 3, 4, 6, 7), O. Pyayve (8).

Olimpiada matemática internacional
"Fórmula de la Unidad" / "Tercer Milenio"
Año escolar 2022–2023. Etapa preliminar

Problemas para el nivel R11

Los trabajos se aceptan en forma electrónica (archivos editados en computadora o imágenes escaneadas de las hojas). Para las instrucciones vea formulo.org/ru/olymp/2022-math-en/. Fecha límite — **9/11/22 a las 23:59:59 UTC**.

Cada participante debe entregar su propio trabajo. La mayoría de los problemas requiere un procedimiento completo, no solamente la respuesta. El trabajo no debe contener datos personales del participante, es decir, **no incluya su nombre, correo, etc. en el trabajo.**

---

1. Un número natural se llama *útil* si en su representación decimal no hay ceros ni cifras que se repiten, y el producto de las cifras de este número es un múltiplo de la suma de las cifras. Encuentre los dos números más grandes útiles consecutivos (es decir, cuya diferencia es 1).
2. Cuatro coches A, B, C y D inician una carrera simultáneamente del mismo punto de una pista circular. Los coches A y B corren en la dirección de las manecillas del reloj mientras C y D corren en la dirección contrarreloj. Los coches mantienen velocidades constantes pero distintas una de la otra. Exactamente 7 minutos después del inicio de la carrera A encuentra C por primera vez, mientras B y D se encuentran por primera vez. Pasan otros 46 minutos cuando A y B se encuentran por primera vez. ¿Cuánto tiempo pasará desde el inicio de la carrera hasta que se encuentren por primera vez los cuatro coches juntos?
3. Demuestre que se puede cortar un pentágono regular en 4 partes y luego reordenar estas piezas sobre la mesa para formar un rectángulo sin solapar ni dejar huecos entre las piezas.
4. Un punto se llama *conveniente* para una circunferencia si la medida del ángulo entre las rectas tangentes trazadas a la circunferencia desde este punto es igual a 60°. Dos circunferencias con los centros en los puntos A y B son tangentes, mientras el punto M es conveniente para ambas circunferencias. Encuentre la razón de los radios de las circunferencias si $\triangle ABM$ es un triángulo rectángulo.
5. Encuentre todos los trío de números reales a, b, c para los cuales
$$27^{a^2+b+c+1} + 27^{b^2+c+a+1} + 27^{c^2+a+b+1} = 3.$$
6. Un parque tiene la forma de un cuadrado cuadriculado de tamaño 10×10 celdas. Se puede colocar un poste de luz en cualquier celda (máximo un poste en cada celda).
a) Un parque se llama *iluminado* si para cualquier celda con un visitante se puede encontrar un cuadrado de 3×3 celdas que contenga al visitante y algún poste de luz. ¿Cuál es la cantidad mínima de postes en un parque iluminado?
b) Un parque se llama *seguramente iluminado* si permanece iluminado incluso después de que un poste se rompa. ¿Cuál es la cantidad mínima de postes en un parque seguramente iluminado?
7. Llamemos la *eficiencia* de un número natural n la fracción de todos los números naturales de 1 hasta n inclusive tales que tienen un divisor distinto de 1 común con n. Por ejemplo, la eficiencia del número 6 es $\frac{2}{3}$.
a) ¿Existe un número cuya eficiencia es mayor a 80 %? Si la respuesta es afirmativa, encuentre el menor número así.
b) ¿Existe un número cuya eficiencia es máxima, es decir, no menor que la eficiencia de cualquier otro número? Si la respuesta es afirmativa, encuentre el menor número así.
8. Una función continua f es tal que $f(f(f(f(f(0))))) = 0$. Demuestre que la ecuación $f(f(x)) = x$ tiene por lo menos una raíz.

Autores de los problemas: S. Pavlov (1), L. Koreshkova (2), A. Tesler (3, 4, 6, 8), P. Mulenko (5), O. Pyayve (7).