

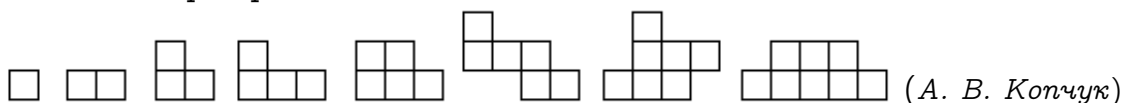


## Решения и критерии оценивания

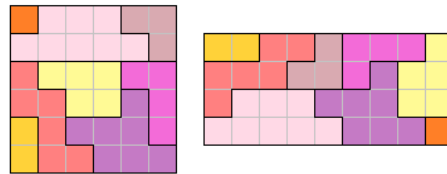
Полностью верное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.

### Задачи для 5 класса

1. Используя каждую из фигур по одному разу, составьте из них прямоугольник. Фигуры можно поворачивать и переворачивать.



Решение. Два примера показаны на рисунке (есть и другие примеры).



Критерии. Есть хотя бы один пример — 7 баллов.

2. Учитель попросил Катю и Лену написать по кругу 4 натуральных числа, сумма которых равна 8, но никакие несколько (от 1 до 3) подряд идущих чисел не дают в сумме 4. Обе девочки выполнили задание. Могло ли оказаться, что Лена написала какое-то число, которое Катя не написала? (С. П. Павлов)

Ответ: Да, например, Лена написала 1, 2, 3, 2, а Катя — 1, 1, 1, 5.

Критерии. 7 баллов за верный пример. При ответе «нет» — 0 баллов независимо от продвижений.

3. У числа 1234 произведение цифр на 14 больше, чем сумма цифр (произведение цифр равно  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ , а сумма цифр равна  $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ ). Придумайте число, у которого произведение цифр на 2021 больше, чем сумма цифр. (А. А. Теслер)

Решение. Например, число, состоящее из 11 двоек и 5 единиц в любом порядке (сумма 27, произведение  $2^{11} = 2048$ ).

4. Проверяющий олимпиады после тяжёлого трудового дня покидает рабочий кабинет, освещение в котором работает в нескольких режимах. Когда проверяющий вышел из комнаты, он плотно закрыл за собой дверь и встал у кнопки, которая переключает эти режимы (режимы переключаются по порядку от первого до последнего, после последнего идет выключение, а затем все заново). Но, к сожалению, проверяющий очень устал и забыл точное количество режимов, а помнит лишь, что их было не больше 5 (не считая выключенного состояния) и что сейчас включён первый режим. Помогите проверяющему выключить свет в кабинете, если он не может видеть, какой режим включён. (А. В. Владимиров)

Решение. Например, он может щёлкнуть  $\text{НОК}(1, 2, 3, 4, 5, 6) - 1 = 59$  раз. Впрочем, подходит любое (а не только наименьшее) общее кратное этих чисел минус 1.

**Критерии.** Достаточно привести любое подходящее количество раз (а не все возможные). 0 баллов за решение в предположении, что режимов ровно 5. Ход решения верный, но общее кратное вычислено неверно — снимается 2 балла. В ответе не вычтена единица — снимается 1 балл.

Указано верное количество переключений (например, 59) без каких-либо пояснений, что это за число — 1 балл. Решение в предположении, что нужно найти НОК чисел 1, 2, 3, 4, 5, то есть не учтено, что выключенное состояние может оказаться шестым режимом — снимается 2 балла.

5. Четыре группы студентов (по 26 человек в каждой) решили отправиться в поездку на автобусах, а затраты распределить поровну. Транспортная компания предоставляет автобусы двух видов — на 30 пассажиров (по одной цене) и на 50 пассажиров (по более высокой цене). Сначала студенты решили заказать автобусы как можно дешевле, и вышло, что каждому нужно заплатить по 250 рублей. Потом выяснилось, что ни одна из групп не хочет оказаться разделённой между двумя автобусами, и с учётом этого каждому студенту пришлось бы заплатить по 300 рублей. В конце концов по одному студенту в каждой из групп отказались от поездки. Сколько теперь придётся заплатить каждому из студентов? (Л. С. Корешкова)

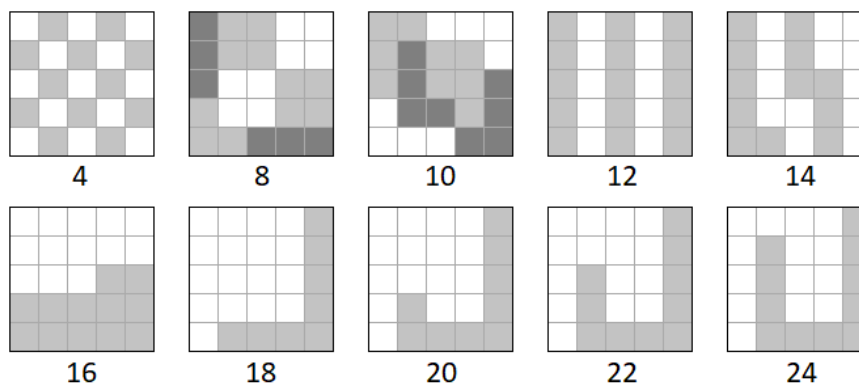
**Решение.** В первом случае (104 студента) самый дешёвый вариант либо  $50 + 30 + 30$ , либо  $4 \cdot 30$ . Но вариант  $4 \cdot 30$  подходит и во втором случае, значит, он дороже. В первом случае потрачено 26000, во втором 31200, значит, автобус на 50 мест на 5200 рублей дешевле, чем два автобуса на 30 мест. В третьем случае самый дешёвый вариант  $50 \cdot 2$ , он стоит ещё на 5200 рублей дешевле первого, то есть 20800 рублей, или 208 на человека.

**Ответ:** 208 рублей.

6. На клетчатой бумаге нарисован квадрат  $5 \times 5$  (в нём всего 25 клеток). Дима, делая разрезы только по линиям, хочет разделить квадрат на несколько (более одной) фигурок, у каждой из которых периметр (вычисляется в клетках) равен  $P$ . При каких  $P < 25$  Диме удастся это сделать? (С. П. Павлов)

**Решение.** Во-первых, периметр не может быть нечётным. Действительно, обойдём фигурку по периметру. Вертикальных линий чётное количество, поскольку при таком обходе мы поднимемся и спустимся одинаковое количество раз; аналогично и горизонтальных линий чётное количество.

Минимальный чётный периметр, 4, имеет клетка  $1 \times 1$ , поэтому  $P = 4$  подходит. Периметр 6 бывает только у прямоугольника  $2 \times 1$ , но на такие прямоугольники квадрат не разбивается, поскольку число клеток (25) нечётно. Все чётные числа от 8 до 24 достижимы (см. рисунок).



**Ответ:** при  $P = 4, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24$ .

**Критерии.** 3 балла — за нахождение всех верных примеров (−1 балл за каждый потерянный верный ответ, в том числе за неверный пример к верному ответу).

4 балла — за доказательство, что других ответов нет: 1 балл за доказательство того, что периметр 6 невозможен; 1 балл за упоминание и ещё 2 балла за доказательство того, что нечётные периметры невозможны.

Только верный перечень ответов без каких-либо пояснений — 1 балл.

7. Андрей задумал два различных натуральных числа. На одной из карточек он записал их сумму, а на другой — удвоенное меньшее число. После этого одну из карточек он дал Боре, а другую Вите.

Боря: Увы, я не знаю, какая у меня карточка.

Витя: Я тоже не знаю, какая у меня карточка.

Боря: Зато я теперь знаю.

У кого оказалась карточка с суммой?

(К. А. Кноп)

**Ответ:** у Вити.

**Решение.** Ясно, что у обоих мальчиков чётные числа, иначе бы имеющий нечётное число сразу понимал, что у него не карточка с удвоенным числом. Также ясно, что ни у кого из них не 2, так как видящий 2 сразу понимает, что у него  $2 \cdot 1$ . Кроме того, у Вити не может быть 4, так как вариант суммы  $1 + 3$  для него невозможен (в этом варианте Боря бы видел 2, а значит, знал бы, какая у него карточка) и остается только вариант  $2 + 2$ . Поэтому у Вити чётное число, не меньше 6, а у Бори чётное, не меньше 4.

В каких случаях Боря на втором высказывании может понять, какая у него карточка? Если у Бори на карточке написано  $2N$ , то он должен иметь возможность выбрать между вариантом  $2 \cdot N$  и списком вариантов  $K + (2N - K)$  при  $K < N$ . Выбрать он может только в том случае, когда предыдущее высказывание Вити исключает одну из этих возможностей. Но единственные варианты, которые можно исключить, это  $1 + (2N - 1)$  и  $2 + (2N - 2)$ , потому что после слов Вити выяснилось, что у него не 2 и не 4. Так как этого достаточно для того, чтобы исключить все варианты с различными суммами, то  $2N = 4$  или  $2N = 6$ ; Боря понимает, что задуманы 2 или 3 и еще какое-то число, а ему досталась карточка с удвоенным наименьшим. Следовательно, карточка с суммой — у Вити.

**Критерии.** Сам ответ оценивается в 0 баллов. За замечание, что сумма должна быть чётной, даётся 1 балл. За нахождение какого-нибудь варианта исходных чисел, дающего нужные ответы ребят, даётся 2 балла. Полностью рассмотрен вариант с карточкой 4 у Бори — 3 балла. Полностью рассмотрен вариант с карточкой 6 у Бори — 3 балла.

## Задачи для 6 класса

- См. задачу 1 для 5 класса.
- По кругу написаны 6 натуральных чисел, сумма которых равна 12. Катя заметила, что какие бы несколько (от 1 до 5) подряд идущих чисел ни взять, их сумма не равна 6. Чему может равняться максимальное из чисел? (Укажите все возможные варианты ответа на этот вопрос и объясните, почему эти варианты возможны, а все остальные — нет.)

(С. П. Павлов)

**Решение.** Возможные следующие ответы: 7 (711111), 5 (252111), 4 (143112), 3 (313131).

Остальные ответы невозможны:

- если одно из чисел больше 7, то остальные 5 хотя бы 1, и сумма больше 12;
- если одно из чисел равно 6, то сумма остальных равна 6;
- если максимальное число равно 2, то эти числа — обязательно шесть двоек, и три из них в сумме дают 6;
- равняться 1 максимальное число не может.

**Ответ:** 3, 4, 5 или 7.

**Критерии.** За верное рассмотрение каждого из следующих 7 случаев: 2, 3, 4, 5, 6, 7, > 7 даётся по 1 баллу. Например, все верные ответы с примерами, но без доказательств невозможности остальных вариантов дают 4 балла.

За верный перечень ответов без обоснований — 1 балл.

3. См. задачу 3 для 5 класса.

4. В некотором месяце было пять понедельников, в следующем пять вторников, а в следующем — пять сред. В какой день недели начался год, в котором всё это было?

(А. А. Теслер)

**Решение.** Заметим, что в двух подряд идущих месяцах каждый день недели встречается не более 9 раз (поскольку их суммарная длина меньше 9 недель). Значит, во втором месяце было 4 понедельника и 4 среды. Такое возможно, только если он начался во вторник (иначе перед каждым из пяти вторников в нём будет понедельник, и получится 5 понедельников) и закончился во вторник (иначе получится 5 сред). Значит, в среднем месяце 29 дней, то есть это високосный февраль. 1 февраля было вторником, значит, 1 января — субботой. Заметим, что такие годы действительно существуют (например, 2000, 2028, 2056).

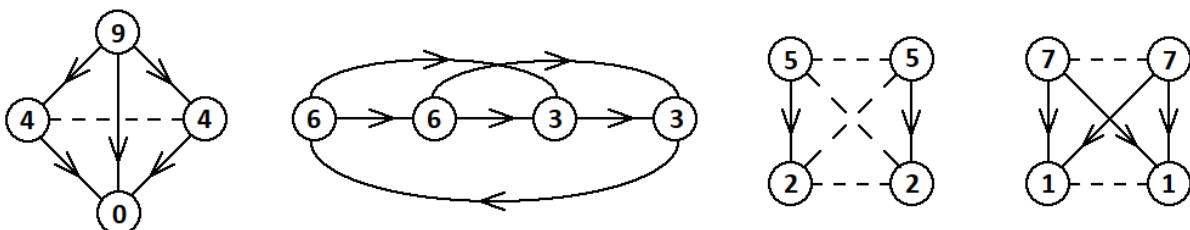
**Ответ:** в субботу.

**Критерии.** Только ответ — 0 баллов. Ответ+пример — 2 балла (в качестве примера можно указать номер года без дополнительных комментариев, а можно написать, что подходят январь–март високосного года). Доказывать существование високосного года, начинающегося с субботы, не требуется.

5. См. задачу 5 для 5 класса.

6. В чемпионате по футболу участвуют 32 команды, разбитые на 8 групп по 4 команды. В каждой группе каждая команда играет с каждой из трёх остальных по одному разу. За выигрыш в матче даётся 3 очка, за поражение 0, за ничью 1 (то есть суммарно команда может заработать от 0 до 9 очков). Обязательно ли после окончания групповых игр найдутся 5 команд, у которых поровну очков? (А. А. Теслер)

**Решение.** Нет. Например, можно дважды повторить каждую из групп, показанных на рисунке. (В кружках указано количество набранных очков. Стрелки проведены от выигравших команд к проигравшим, а пунктирные линии — между командами, сыгравшими вничью.)



Критерии. При ответе «да» — 0 баллов независимо от наличия продвижений.

7. См. задачу 7 для 5 класса.

## Задачи для 7 класса

1. См. задачу 6 для 5 класса.
2. См. задачу 4 для 5 класса.
3. Угол между часовой и минутной стрелками часов составляет  $70^\circ$ . Через сколько минут он в следующий раз станет равен  $70^\circ$ ? Обе стрелки вращаются непрерывно. (А. А. Теслер)

**Решение.** Заметим, что за 12 часов минутная стрелка проходит на 11 кругов больше часовой. Значит, угловая скорость минутной стрелки относительно часовой составляет  $\frac{11}{12}$  кругов в час, или  $\frac{11}{12} \cdot 360^\circ = 330^\circ$  в час.

Если минутная стрелка отставала от часовой на  $70^\circ$ , то в следующий раз ей надо обогнать её на  $70^\circ$ , то есть пройти относительно неё  $140^\circ$ . Для этого потребуется  $\frac{140}{330}$  часа, или  $\frac{140}{330} \cdot 60 = 25\frac{5}{11}$  минут.

Если же минутная стрелка опережала часовую на  $70^\circ$ , то в следующий раз она будет от неё отставать на  $70^\circ$ . Для этого ей надо пройти  $360^\circ - 140^\circ = 220^\circ$ , на это нужно  $\frac{220}{330}$  часа, или 40 минут.

**Ответ:** через 40 минут или через  $25\frac{5}{11}$  минуты.

Критерии. За каждый ответ без доказательства — 1 балл. За каждый ответ с верным доказательством — 3 балла. Второй ответ указан не точно, а округлённо — снимается 1 балл.

4. См. задачу 4 для 6 класса.
5. Типография определяет стоимость печати книги так: складывает стоимость обложки со стоимостью каждой из страниц, а результат округляет вверх до ближайшего целого числа рублей (то есть, например, если получилось 202 рубля 1 копейка, то это округляется до 203 рублей). Известно, что стоимость книги объёмом 104 страницы составляет 134 рубля, а книги объёмом 192 страницы — 181 рубль. Сколько стоит печать обложки, если она стоит целое число рублей, а стоимость одной страницы составляет целое число копеек? (П. Д. Муленко)

**Решение.** До округления получалось, что первая книга стоит от 133,01 до 134 рублей, а вторая — от 180,01 до 181. Тогда разность их цен может составлять от  $180,01 - 134 = 46,01$  до  $181 - 133,01 = 47,99$ . Эта разность в точности равна стоимости 88 страниц ( $192 - 104 = 88$ ). Значит, одна страница стоит от  $46,01/88 = 0,522\dots$  до  $47,99/88 = 0,545\dots$  рублей. Поскольку страница стоит целое число копеек, то возможны лишь варианты 53 и 54 копейки.

Если страница стоит 53 копейки, то страницы первой книги стоят  $0,53 \cdot 104 = 55,12$  рублей, тогда обложка должна стоить 78 рублей. Страницы второй книги стоят  $0,53 \cdot 192 = 101,76$ , и обложка должна стоить 79 рублей — противоречие.

Если страница стоит 54 копейки, то страницы первой книги стоят  $0,54 \cdot 104 = 56,16$  рублей,

тогда обложка должна стоить 77 рублей. Страницы второй книги стоят  $0,54 \cdot 192 = 103,68$ , и обложка вновь должна стоить 77 рублей — этот случай подходит.

**Ответ:** 77 рублей.

**Критерии.** 1 балл за ответ. 2 балла за ответ+пример. 3 балла за решение, в котором не учтено округление. Не доказано, что 53 не подходит — снимается 2 балла. Не вычислена стоимость самой обложки при полностью верном обосновании стоимости страницы — снимается 1 балл.

6. См. задачу 6 для 6 класса.

7. См. задачу 7 для 5 класса.

## Задачи для 8 класса

1. У числа 1234 произведение цифр на 14 больше, чем сумма цифр (произведение цифр равно  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ , а сумма цифр равна  $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ ). А сколько разрядов содержит наименьшее натуральное число, у которого произведение цифр на 2021 меньше, чем сумма цифр? (А. А. Теслер)

**Решение.** Построим пример, в котором одна из цифр числа равна нулю, тогда произведение цифр равно 0, а сумма 2021. Минимальное количество ненулевых цифр равно  $\lceil 2021 : 9 \rceil + 1 = 225$  (224 девятки и одна пятёрка), то есть всего 226 цифр.

Докажем, что меньше 226 цифр в числе быть не может. Если цифр 224 или менее, то их сумма не превосходит  $224 \cdot 9 = 2016$  — слишком мало. Если цифр 225, то их сумма может быть от 2021 до 2025, причём для этого каждая цифра должна быть не меньше 5; но тогда произведение гораздо больше 4.

**Ответ:** 226.

**Критерии.** Рассмотрен только случай, когда одна из цифр равна 0, и для него верно найден ответ (иначе говоря, доказана невозможность 224 и возможность 226, но пропущен случай 225) — 3 балла. Только доказано, что 224 цифры быть не может — 1 балл. Только ответ (226), без каких-либо комментариев про минимальность — 1 балл.

Ответ меньше верного на 1 или 2 при верных рассуждениях (что вызвано неверным округлением и/или неучётом цифры 0) — снимается 1 или 2 балла соответственно.

2. При каких натуральных  $n$  выражение  $45^n + 988 \cdot 2^n$  делится на 2021? (Л. С. Корешкова)

**Решение.** Заметим, что 2021 равно произведению простых чисел 43 и 47, то есть делимость на 2021 равносильна делимости на 43 и 47. Воспользуемся формулами

$$(a^n - b^n) = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}),$$

$$(a^n + b^n) = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots - ab^{n-2} + b^{n-1}) \text{ при нечётных } n.$$

Во-первых,  $45^n + 988 \cdot 2^n = (45^n - 2^n) + 989 \cdot 2^n$  кратно 43, поскольку  $45^n - 2^n$  и 989 делятся на 43.

Во-вторых,  $45^n + 988 \cdot 2^n = (45^n + 2^n) + 987 \cdot 2^n$ . При нечётных  $n$  это кратно 47, поскольку  $45^n + 2^n$  и 987 делятся на 47. При чётных  $n$  второе слагаемое кратно 47, а первое нет. Действительно,  $45^{2k} + 2^{2k} \equiv (-2)^{2k} + 2^{2k} \equiv 2^{2k} + 2^{2k} \equiv 2^{2k+1} \not\equiv 0 \pmod{47}$ .

(Запись  $a \equiv b \pmod{m}$ ) означает, что числа  $a$  и  $b$  имеют одинаковый остаток от деления на  $m$ . Мы использовали известное свойство: если  $a \equiv b \pmod{m}$ , то  $a^n \equiv b^n \pmod{m}$ .)

Ответ: при всех нечётных  $n$ .

Критерии. Разобран только случай нечётного  $n$  — 3 балла; только случай чётного  $n$  — 4 балла.

3. См. задачу 3 для 7 класса.

4. Переставляя цифры в трёхзначном числе, можно получить до 6 различных чисел. Какое наибольшее количество из них могут образовывать арифметическую прогрессию? (Арифметическая прогрессия — это последовательность, в которой каждое число больше предыдущего на одну и ту же величину, например: 57, 63, 69, 75.) (В. П. Федотов)

Ответ: 3.

Решение. Пример: 127, 172, 217 (есть и другие).

Докажем, что прогрессия из 4 чисел невозможна (тогда более длинная тем более). Пусть прогрессия содержит 4 числа, тогда все три цифры различны. Какие-то два из четырёх чисел имеют одинаковые средние цифры, так что разность между ними  $\overline{xyz} - \overline{zyx} = 99|x - z|$  делится на 99. Эта разность равна разности прогрессии, умноженной на число от 1 до 3, то есть разность прогрессии делится на 11. Также какие-то два из чисел прогрессии ( $\overline{abc}$  и  $\overline{acb}$ ) имеют одинаковые старшие цифры, тогда разность между ними равна  $9|b - c|$ , а в то же время она должна делиться на 11, что невозможно, ведь разность между неравными цифрами не делится на 11.

Другое доказательство. Пусть прогрессия содержит 4 числа, тогда у двух из них совпадает последняя цифра. Разность между ними делится на 10, а значит, разность прогрессии делится на 5. На 10 она делиться не может (не существует четырёх чисел с одинаковой последней цифрой), значит, два числа кончаются цифрой  $a$ , а два — цифрой  $b = a + 5$ . Тогда числа имеют вид  $\overline{bca}$ ,  $\overline{cba}$ ,  $\overline{acb}$ ,  $\overline{cab}$ . Заметим, что  $|\overline{cba} - \overline{cab}| < 100$ , но  $|\overline{bca} - \overline{acb}| > 400$  — противоречие (разности различаются не более чем втрое).

Критерии. 2 балла за пример, 5 за доказательство невозможности последовательностей длины 4. Доказательство невозможности, в котором разобраны не все возможные случаи, оценивается не более чем в 2 балла.

5. Отметим на шахматной доске центры всех клеток (центры белых клеток — белыми точками, центры чёрных — чёрными). Сколько существует равнобедренных прямоугольных треугольников, все вершины которых — отмеченные точки одного цвета?

(Л. С. Корешкова)

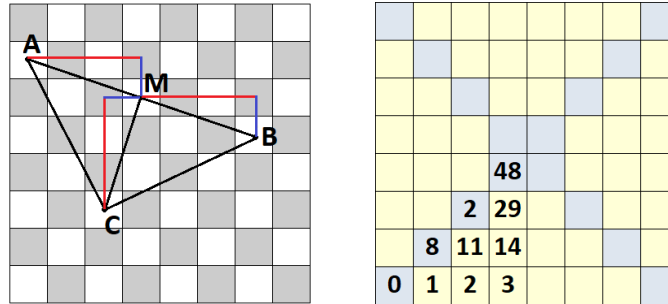
Решение. Приведём решение, не требующее перебора вариантов, хотя и не самое простое.

Лемма. Такие треугольники — это в точности равнобедренные прямоугольные треугольники, у которых середина гипотенузы и все вершины являются центрами клеток.

Доказательство леммы. Пусть дан треугольник  $ABC$ , где  $M$  — середина гипотенузы  $AB$ . Будем обозначать координаты точки  $A$  через  $x_A$  и  $y_A$ , и аналогично для остальных точек. Считаем, что координаты центров клеток принимают значения от 0 до 7. Обозначим  $|x_A - x_M| = m$ ,  $|y_A - y_M| = n$ . Тогда  $|x_B - x_M| = |y_C - y_M| = m$ ,  $|y_B - y_M| = |x_C - x_M| = n$ , поскольку отрезки  $AM$  и  $CM$  равны и перпендикулярны (см. рисунок).

1. Пусть у треугольника все вершины и середина гипотенузы являются центрами клеток. Заметим, что  $M$  и  $A$  одного цвета тогда и только тогда, когда  $|x_A - x_M| + |y_A - y_M|$  чётно, то есть  $m + n$  чётно. То же верно и для пар  $M$  и  $B$ ,  $M$  и  $C$ . Это значит, что точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  все одного цвета (либо того же, что  $M$ , либо противоположного).

2. Пусть у треугольника все вершины одного цвета. Совпадение цветов  $A$  и  $B$  означает, что  $2g + 2h$  чётно, то есть  $g + h$  — целое. Теперь рассмотрим отрезок  $AC$ : его проекции на оси (при  $m \geq n$ ) равны  $g - h$  и  $g + h$ , откуда получается, что  $(g - h) + (g + h)$  чётное, то есть  $g$  целое. Заключаем, что и  $h$  целое. Значит,  $M$  — центр клетки. *Лемма доказана.*



Теперь будем считать треугольники, описанные в лемме. Для каждой возможной середины гипотенузы  $(x, y)$  найдём явную формулу для количества треугольников. Из соображений симметрии можно считать, что  $0 \leq x \leq y \leq 3$ .

Если  $(x + a, y + b)$  — вершина с прямым углом, то оставшиеся вершины имеют координаты  $(x - b, y + a)$  и  $(x + b, y - a)$ . Надо найти количество целочисленных пар  $(a, b)$  таких, что все эти три точки имеют координаты от 0 до 7. Получаем 6 двойных неравенств (по одному на каждую координату каждой точки), из которых с учётом условия  $0 \leq x \leq y \leq 3$  остаются только  $-x \leq b \leq x$  и  $-x \leq a \leq y$ . Так что всего есть  $(2x + 1)(x + y + 1) - 1$  треугольников, вариант  $a = b = 0$  мы исключаем.

Суммируя эти количества по всем клеткам (см. рисунок справа), получаем  $8 \cdot (1 + 2 + 3 + 11 + 14 + 29) + 4 \cdot (0 + 8 + 24 + 48) = 800$ .

**Критерии.** Во всех переборных решениях: каждый пропущенный случай — штраф в 1 балл. Если в переборе нет логики, то за решение даётся 0 баллов.

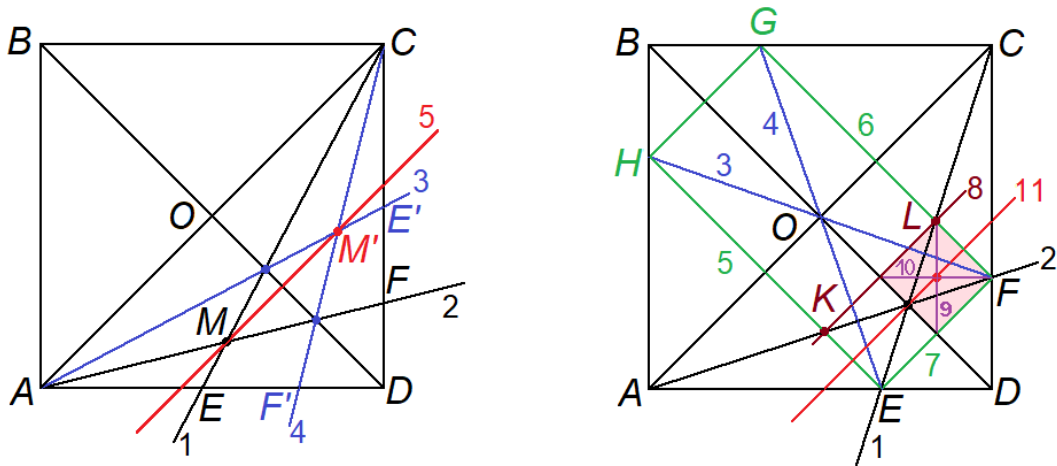
6. На плоскости нарисован квадрат  $ABCD$  и точка  $M$  внутри него. Придумайте, как с помощью одной линейки, проведя не более 20 линий, провести через  $M$  прямую, параллельную диагонали  $AC$ . (На линейке нет делений, на ней нельзя ничего отмечать — можно только проводить прямую через две данные точки.) (А. А. Теслер)

**Решение.** Проведём сначала диагонали квадрата. Будем сразу считать, что  $M$  не лежит на  $AC$  (иначе исходная прямая — сама  $AC$ ).

Научимся для начала отражать произвольную точку  $S$ , лежащую (например) на стороне  $AD$ , относительно  $BD$ . Пусть  $CS$  пересекает  $BD$  в точке  $T$ , тогда  $AT$  пересекает  $CD$  в точке  $S'$ , симметричной  $S$ .

Теперь проведём через  $M$  прямые  $CE$  и  $AF$ , где  $E$  и  $F$  лежат на сторонах квадрата (см. первый рисунок). Отразим точки  $E$  и  $F$  относительно диагонали  $BD$ , как описано выше, получим точки  $E'$  и  $F'$ . Тогда прямые  $AE'$  и  $CF'$  пересекаются в точке  $M'$ , симметричной  $M$  относительно  $BD$ .





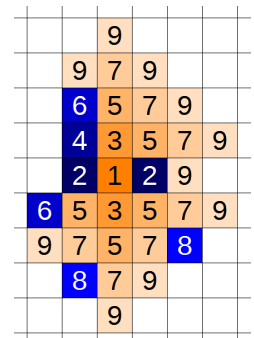
Отдельно надо рассмотреть случай, когда  $M$  лежит на  $BD$  (см. второй рисунок) — тогда  $M$  и  $M'$  совпадают, так что предыдущий алгоритм не подходит. Не умаляя общности, пусть  $M$  является внутренней точкой отрезка  $OD$  (где  $O$  — точка пересечения диагоналей квадрата). Проведём через  $M$  прямые  $CE$  и  $AF$ , как мы это делали в предыдущем случае. Пусть прямые  $EO$  и  $FO$  пересекают стороны квадрата в точках  $G$  и  $H$  соответственно, тогда  $EFGH$  — прямоугольник (поскольку его вершины симметричны друг другу относительно диагоналей квадрата, то стороны параллельны этим диагоналям, а значит, перпендикулярны между собой). Пусть теперь  $EH \cap AF = K$ ,  $FG \cap CE = L$ , тогда  $K$  и  $L$  симметричны относительно  $BD$ , значит,  $KLF E$  — прямоугольник. Диагональ  $BD$  делит его на два равных прямоугольника. Найдём точку пересечения диагоналей одного из них и обозначим за  $M'$ , тогда прямая  $MM'$  содержит среднюю линию прямоугольника  $KLF E$ , то есть параллельна  $AC$ .

**Критерии.** Построение выполнено для всех точек  $M$ , кроме лежащих на  $BD$  — 4 балла.

Не упомянут случай  $M \in AC$  — баллы не снимаются.

Приведено верное построение, но доказательство верности полностью отсутствует — не более 3 баллов.

7. В городе, представляющем собой бесконечную клетчатую плоскость, есть  $n$  пожарных. Однажды в одной из клеток города возникает пожар. В следующую минуту каждый пожарный может (но не обязан) защитить какую-нибудь одну ещё не горящую клетку, соседнюю с горящей. Ещё через минуту пожар распространяется на все клетки, соседние с горящими, кроме защищённых. Далее пожарные и пожар действуют по очереди. При каком минимальном  $n$  пожарные смогут локализовать пожар, то есть сделать так, чтобы он перестал распространяться?

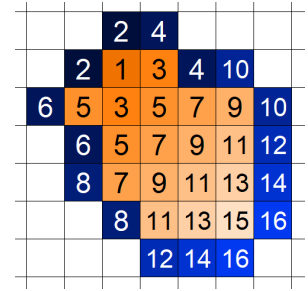


(На рисунке показано, как могут развиваться события при  $n = 2$ ; нечётные числа соответствуют распространению пожара, чётные — действиям пожарных.)

(Л. С. Корешкова)

**Решение.** Сначала докажем, что одного пожарного недостаточно. Пусть огонь начал распространяться из клетки с координатами  $(0, 0)$ . По индукции легко проверить, что после  $n$  ходов пожарного огонь сможет захватить хотя бы одну клетку на  $n$ -й диагонали из клеток  $(n, 0), \dots, (0, n)$ : пожарный к этому моменту мог защитить не больше одной клетки на  $n$ -й диагонали, а у уже горящей клетки на предыдущей диагонали есть два соседа на  $n$ -й.

Двух пожарных достаточно, см. рисунок.

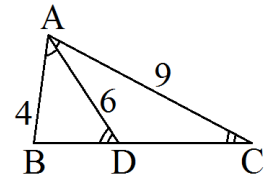


**Критерии.** Только пример — 3 балла, только оценка — 3 балла.

## Задачи для 9 класса

1. Марине приснился треугольник со сторонами 9 и 4 и биссектрисой, выходящей из угла, образованного этими сторонами, длиной 6. Сможет ли Марина воплотить сон в реальность? (Л. С. Корешкова)

**Решение.** Пусть  $AD$  — биссектриса треугольника  $ABC$ . Поскольку  $\angle BAD = \angle DAC$  и  $4 : 6 = 6 : 9$ , то треугольники  $BAD$  и  $DAC$  подобны, и  $\angle ADB = \angle ACD$ . Но тогда прямые  $AD$  и  $AC$  должны быть параллельны, что неверно.



**Ответ:** нет.

2. См. задачу 2 для 8 класса.
3. См. задачу 3 для 7 класса.
4. См. задачу 4 для 8 класса.
5. Назовём числовое множество  $X$  периодичным (с периодом  $T > 0$ ), если для всякого  $a \in X$  числа  $a + T$  и  $a - T$  также лежат в  $X$ . Периодично ли множество всех целых чисел, содержащих в записи цифру 5? (А. А. Теслер)

**Ответ:** Нет.

**Решение.** Пусть оно периодично с периодом  $T$ . Тогда рассмотрим такое  $n$ , что  $T < 10^n$ . Существует такое число  $A$  в промежутке от  $5 \cdot 10^n$  до  $6 \cdot 10^n - 1$ , что  $A + T = 6 \cdot 10^n$ . Противоречие.

6. См. задачу 6 для 8 класса.
7. См. задачу 7 для 8 класса.



Чтобы попасть в вершину, улитка должна пройти по пути одного из следующих видов.

- а)  $ASASA$  или  $ASATA$  или  $ATASA$  или  $ATATA$ : вероятность  $\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\right) \cdot 4 = \frac{1}{16}$ .  
 б)  $ASTSA$  или  $ATSTA$ : вероятность  $\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}\right) \cdot 2 = \frac{1}{64}$ .  
 в)  $ASDSA$  или  $ATFTA$ : вероятность  $\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}\right) \cdot 2 = \frac{1}{64}$ .  
 г)  $ASESA$  или  $ASETA$  или  $ATESA$  или  $ATEETA$ : вероятность  $\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4}\right) \cdot 4 = \frac{1}{48}$ .  
 Итого  $\frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{64} + \frac{1}{48} = \frac{22}{192} = \frac{11}{96}$ .

**Критерии.** Только ответ («в вершине более вероятно») не оценивается. Если в решении улитка выбирает направления по другим правилам, чем в условии, то ставится 0 баллов. Полный балл ставится уже за правильно найденные вероятности оказаться в вершине и на стороне (даже если участник забыл указать, какая из них больше).

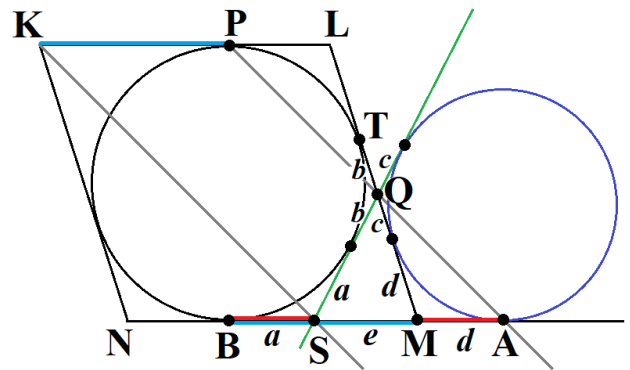
5. См. задачу 7 для 8 класса.

6. В ромб  $KLMN$  вписана окружность, которая касается стороны  $LK$  в точке  $P$ . Через точки  $P$  и  $K$  проведены параллельные прямые до пересечения со сторонами  $LM$  и  $MN$  в точках  $Q$  и  $R$  соответственно. Докажите, что окружность касается  $QR$ .

(Л. С. Корешкова)

**Решение.** Обозначим точку касания окружности со стороной  $LM$  через  $T$ . Поскольку  $LP = LT$  и  $LK = LM$ , то  $PT \parallel KM$ . Значит,  $Q$  лежит на отрезке  $TM$  (если бы  $Q$  лежала на  $LT$ , то  $R$  лежала бы на  $LM$ ).

Проведём из точки  $Q$  вторую касательную к окружности, она пересечёт сторону  $MN$  в некой точке  $S$ . Докажем, что  $KS \parallel PQ$  (тогда получится, что  $S$  совпадает с  $R$ , то есть  $QR$  — касательная к окружности).



Рассмотрим вневписанную окружность треугольника  $QSM$  (см. рисунок). Пусть  $A$  — точка касания с продолжением  $NM$ .  $Q$  — центр гомотетии окружностей, поскольку это точка пересечения общих касательных; значит,  $Q \in AP$ .

Докажем, что  $SA = KP$  (тогда получим, что  $KPAS$  — параллелограмм). Действительно,  $KP = BM$  по свойствам ромба (эти отрезки симметричны относительно его центра), а  $BS = MA$  по свойствам вписанных окружностей (см. рисунок: отрезки касательных к одной окружности из одной точки равны, поэтому  $a + b + c = e + d$ ,  $e + a = d + c + b$ ; складывая эти равенства, получаем  $2a = 2d$ ).

7. Произведение трёх положительных чисел  $x$ ,  $y$  и  $z$  равно 1. Какое наименьшее значение принимает выражение  $\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{x+y+z-1}$ ? (А. Р. Араб)

**Решение.** Заметим, что это выражение равно 4 при  $x = y = z = 1$ . Остаётся доказать неравенство  $(x+y)(y+z)(z+x) \geq 4(x+y+z-1)$ . Не умаляя общности,  $z \leq \min(x, y)$ , тогда  $x+y \geq 2$ . Подставим  $\frac{1}{xy}$  вместо  $z$  и избавимся от знаменателей, получим

$$(x+y)(x^2y+1)(xy^2+1) \geq 4xy(x^2y+xy^2+1-xy).$$

Поскольку неравенство симметрично относительно  $x$  и  $y$ , то можно сделать замену  $s = x + y$ ,  $p = xy$ , получится квадратичное неравенство на  $s$ :

$$s^2 p + s(p^3 - 4p^2 + 1) + 4p^2 - 4p \geq 0.$$

Положительность  $x$  и  $y$  равносильна тому, что  $s > 0$  и  $0 < p \leq \frac{s^2}{4}$  (также у нас  $s \geq 2$ ). Так как коэффициент при  $s^2$  положителен, то остаётся проверить, что неравенство выполнено при  $s = 2$  и что  $-\frac{p^3 - 4p^2 + 1}{2p} \leq 2$ . Но при  $s = 2$  (и  $0 < p \leq 1$ ) неравенство очевидно:

$$2p^3 - 4p^2 + 2 \geq 2(\sqrt{p^3} - 1)^2 \geq 0.$$

А оставшееся неравенство следует из  $p^3 - 4p^2 + 4p + 1 = p(p - 2)^2 + 1 \geq 0$  при  $p > 0$ .

**Критерии.** Проверки неравенства в частных случаях (например, при  $x = y = z = 1$ ) не оцениваются.

## Задачи для 11 класса

- См. задачу 4 для 6 класса.
- На далёкой планете  $X$  стоят телескопы: телескоп  $A$  — на Северном полюсе, телескопы  $B$  и  $C$  — на экваторе, причём расстояние между  $B$  и  $C$  (по поверхности планеты) вдвое меньше, чем между  $A$  и  $C$ . Каждый телескоп видит ровно половину неба (ту, которая не закрыта планетой). Какова вероятность, что в данный момент во все три телескопа видно наше Солнце? (О. А. Пяйве)

**Ответ:** 3/16.

**Решение.** Пусть  $O$  — центр планеты, тогда  $\angle BOC = 45^\circ$ . Ясно, что телескопы  $B$  и  $C$  вместе наблюдают ровно 3/8 неба, так что все три видят только 3/16.

**Критерии.** За нахождение  $\angle BOC$  даётся 2 балла. Если телескоп  $A$  не учтён, то не больше 5 баллов.

- См. задачу 4 для 8 класса.
- См. задачу 7 для 8 класса.
- Докажите, что существует натуральное число, которое можно представить в виде суммы квадратов двух натуральных чисел не менее чем 2021 способом. (О. А. Пяйве)

**Решение.** Как известно, существует бесконечно много примитивных пифагоровых троек, то есть таких троек взаимно простых натуральных чисел  $(a, b, c)$ , что  $a^2 + b^2 = c^2$ . Например, пусть  $a$  — произвольное нечётное число,  $b = \frac{a^2 - 1}{2}$ ,  $c = \frac{a^2 + 1}{2}$ , тогда  $\text{НОД}(b, c) = 1$  и  $c^2 - b^2 = (c - b)(c + b) = 1 \cdot a^2 = a^2$ .

Возьмём 2021 такую тройку  $(a_1, b_1, c_1), \dots, (a_{2021}, b_{2021}, c_{2021})$ . Пусть теперь  $C = c_1 \cdot \dots \cdot c_{2021}$ ,  $k_i = \frac{C}{c_i}$ . Тогда тройки  $(k_1 a_1, k_1 b_1, k_1 c_1), \dots, (k_{2021} a_{2021}, k_{2021} b_{2021}, k_{2021} c_{2021})$  также являются пифагоровыми, то есть в каждой из них квадрат третьего числа («гипотенузы») равен сумме квадратов первых двух чисел («катетов»). Заметим, что «гипотенуза» во всех этих

тройках совпадает. Докажем, что сами тройки различны: если какие-то две тройки совпадают, значит, до домножения на  $k_i$  они были пропорциональны, но тогда хотя бы одна из них — не примитивная.

**Критерии.** Если решение в целом верное, но не доказано или не полностью доказано, что получающиеся разложения различны, то снимается 1–2 балла.

6. См. [задачу 6](#) для 10 класса.
7. См. [задачу 7](#) для 10 класса.