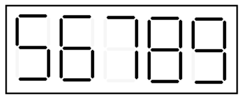
Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2020–2021 учебный год. Отборочный этап

Решения и критерии к задачам

Каждая задача оценивается в 7 баллов. Наиболее распространённые промежуточные оценки — 2 балла (задача не решена, но есть существенные продвижения) и 5 баллов (задача в целом решена, но есть существенные недостатки). Если продвижения (или недостатки) невелики, то решение может оцениваться в 1 балл (соответственно, в 6 баллов). Оценка в 3 балла возможна для очень больших продвижений, которые, тем не менее, не являются решением задачи. Оценки в 3 и особенно в 4 балла ставятся довольно редко. За верный, но никак не аргументированный ответ в большинстве случаев ставится 1 балл (если это не задача с ответом «да» или «нет»). К некоторым задачам есть частные критерии (см. ниже), которые уточняют общие и иногда могут отменять их действие.

Задачи для 5 класса

1. На бумажке электронными цифрами напечатано число 56789. Как разрезать бумажку на три части и сложить числа, написанные на этих частях, чтобы получилась сумма 170? (*А. А. Теслер*)



Решение. Разрежем листок на такие части: 56, 7 и 89. Чтобы получить сумму 170, надо перевернуть некоторые кусочки: 95+7+68.

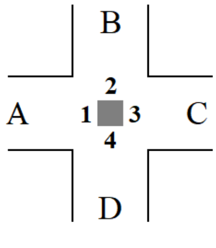
2. Однажды все 91 участник летнего лагеря «Формула Единства» решили сходить в кино. Прошлым летом они бы поместились в 8 рядов кинозала (но не в 7). Однако этим летом каждое четвёртое кресло (то есть каждое кресло, номер которого в ряду делится на 4) должно оставаться пустым, поэтому один участник не поместился в кинозале. Сколько рядов в зале и сколько кресел в каждом из них, если во всех рядах поровну мест? (*П. Д. Муленко*)

Решение. Из первого условия следует, что в ряду больше 11 мест (иначе они не поместились бы в 8 рядов), но меньше 13 (иначе они поместились бы в 7 рядов). Значит, в ряду 12 мест. Поскольку этим летом каждое четвёртое место должно оставаться пустым, то в каждом ряду могут сесть только 9 человек. В кинозал поместились только 90 участников, значит, в нём 10 рядов.

Ответ: 10 рядов по 12 мест.

Критерии. Найденное верно и обоснованное число мест в ряду — 4 балла.
Найденное верно и обоснованное число рядов — 3 балла.

3. На перекрёстке стоит путеводный камень, а с каждой стороны к нему прикреплена табличка (на схеме таблички показаны цифрами). Вот что написано на табличках:



1	2	3	4
← клад	← смерть	← столица	← столица
↑ смерть	↑ столица	↑ смерть	↑ змей
→ столица	→ змей	→ змей	→ смерть

Но воспользоваться камнем может лишь настоящий богатырь, ведь на каждой табличке ровно одна из трёх строчек — ложная. А вы сумеете определить, какая дорога ведёт к смерти, какая к змею, какая в столицу, а какая к кладу? Не забудьте объяснить, почему. (*П. Д. Муленко*)

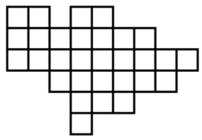
Решение. Учитывая расположение табличек, перепишем утверждения так, чтобы дороги обозначались буквами.

1	2	3	4
B клад	C смерть	D столица	A столица
C смерть	D столица	A смерть	B змей
D столица	A змей	B змей	C смерть

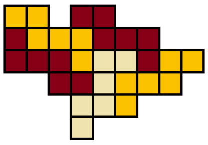
Утверждение «D — столица» встречается на табличках 1, 2, 3. Если оно неверно, то должны быть верны остальные утверждения на этих табличках, но среди них есть противоречивые. Значит, дорога D ведёт в столицу. Аналогично получаем, что C ведёт к смерти (это утверждение встречается на табличках 1, 2, 4). Тогда на табличках 1 и 2 неверны утверждения «B — клад» и «A — змей». Методом исключения получаем, что тогда A ведёт к кладу, а B к змею (тогда на табличках 3 и 4 неверны утверждения «A — смерть» и «A — столица», всё сходится).

Ответ: A — клад, B — змей, C — смерть, D — столица.

4. Покажите, как разрезать изображённую фигуру на пять одинаковых частей. (Части называются одинаковыми, если их можно совместить, наложив одну на другую; возможно, для этого понадобится перевернуть одну из них). (*О. А. Пяйве*)



Решение. Например, так.



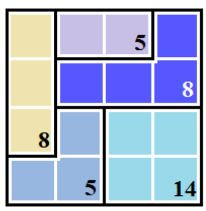
5. У Пети и Васи есть карточки с числами 1, 2, 3, 4 и 5 (по одной карточке с каждым числом). Они играют в игру: каждый выбирает себе по очереди число, начинает Петя. Когда все карточки разобраны, проверяют: если у кого-то получился набор, в котором разность двух каких-то чисел равна какому-то числу из этого же набора, то выигрывает Петя. Иначе выигрывает Вася.
а) Может ли Петя действовать так, чтобы выиграть при любых действиях Васи?
б) Может ли Вася выиграть, если Петя будет поддаваться? (*Л. С. Корешкова*)

Решение. Вася не может выиграть ни при каких действиях Пети. Действительно, предположим, что Вася выиграл, и посмотрим на наборы, которые у них получились. Если числа 2 и 4 оказались в одном наборе, то выиграл Петя ($4 - 2 = 2$); аналогично в случае, если 1 и 2 в одном наборе. Остаётся ситуация, когда 2 в одном наборе, а 1 и 4 во втором. Тогда во втором наборе не может оказаться ни 3 ($3 = 4 - 1$), ни 5 ($1 = 5 - 4$). Значит, 2, 3 и 5 находятся в первом наборе, но тогда $2 = 5 - 3$, и Петя всё равно выиграл.

Ответ: а) да; б) нет.

Критерии. Верно решён только пункт а) – 3 балла.

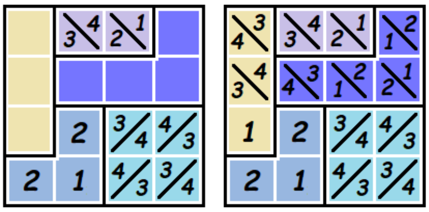
6. В одной из разновидностей классической головоломки «судоку», которая называется «сумдоку», вместо некоторых цифр даются суммы некоторых групп клеток. Например, в сумдоку, показанном справа, нужно расставить в таблице числа от 1 до 4 так, чтобы:
- в каждой строке и в каждом столбце все числа были различны;
- сумма цифр в каждой цветной группе равнялась указанному в ней числу.



Оказывается, это сумдоку имеет более одного решения. А сколько именно? (*П. Д. Муленко*)

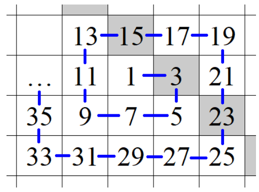
Ответ: 4 варианта.

Решение. Сумма цифр в первом столбце равна 10, из них 8 в жёлтом прямоугольнике, значит, в левом нижнем углу 2. Тогда «уголок» с суммой 5 заполняется однозначно. Далее, голубой квадрат с суммой 14 может содержать только тройки и четвёрки, их можно расставить двумя способами. Независимо от этого есть два способа заполнить лиловый прямоугольник: $4+1$ или $3+2$. Получаем $2 \cdot 2 = 4$ комбинации, каждая из которых восстанавливается однозначно (сначала дополняем первую и третью строки, потом заполняем вторую).



Критерии. Перечислены все варианты, но не доказано, что других нет — 2 балла.

7. Последовательные нечётные натуральные числа выписывают «по спирали», как показано на рисунке. Числа 3, 15 и остальные, находящиеся вместе с ними на одной прямой, назовём хорошими (на рисунке они выделены серым). Если упорядочить хорошие числа по возрастанию (3, 15, 23, 43...), то чему равно 2020-е число в этом ряду? *(А. Р. Араб)*



Решение. Рассмотрим вместо прямой, содержащей хорошие числа, параллельную ей прямую, содержащую числа 1, 5, 13, 25... (назовём их отличными). Разность между соседними (по возрастанию) отличными числами определяется длиной половины витка спирали и каждый раз увеличивается на 4 ($1+4=5$, $5+8=13$, $13+12=25$...). Таким образом, n-е отличное число равно $1+4+4\cdot2+4\cdot3+\ldots+4\cdot(n-1) = 1+4\cdot(1+2+\ldots+(n-1))$. Вернёмся к хорошим числам. Заметим, что они находятся на спирали рядом с отличными, поэтому отличаются от них на 2: $3=5-2$, $15=13+2$, $23=25-2$, $43=41+2\ldots$ Значит, 2020-е хорошее число на 2 больше, чем 2021-е отличное. Значит, оно равно $2+1+4\cdot(1+2+\ldots+2020) = 3+4\cdot\frac{2020\cdot2021}{2} = 3+2021\cdot4040 = 8\,164\,843$.

Ответ: 8 164 843.

Критерии. Снимается 2 балла, если закономерность увеличения хороших чисел (или отличных чисел, или ещё каких-нибудь) найдена верно, но не обоснована рассуждениями, а лишь продемонстрирована на нескольких первых примерах (например, «на диагонали стоят числа $1, 5, 13, 25, \ldots$ — видно. что каждый раз разность увеличивается на 4»).

Задачи для 6 класса

1. См. задачу 3 для 5 класса.

2. См. задачу 4 для 5 класса.

3. В полдень от большого дуба, растущего у прямой дороги, отправились в путь два друга: один на запад пешком со скоростью 4 км/ч, а второй на восток на велосипеде со скоростью 16 км/ч. Через некоторое время велосипедист повернул обратно и догнал друга (который продолжал идти на запад) в три часа дня. На какое наибольшее расстояние друг от друга отдалялись друзья и в какой момент это было? *(А. А. Теслер)*

Решение. Пока велосипедист едет на восток, расстояние между друзьями увеличивается, а когда он поворачивает на запад, оно начинает уменьшаться. Значит, нужно определить, в какой момент велосипедист повернул.

Пешеход за три часа прошёл 12 км, а велосипедист проехал 48 км. Эти 48 км состоят из некого расстояния x км на восток, потом x км на запад и ещё 12 км на запад. Получаем $2x+12=48$, то есть $x=18$. Расстояние в 18 км велосипедист преодолел за $\frac{18}{16} = 1\frac{1}{8}$ часа, то есть за 1 час 7,5 минут. За это же время пешеход прошёл вчетверо меньше, то есть 4,5 км. Значит, расстояние между ними в момент поворота составило 22,5 км.

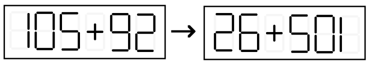
Ответ: На 22,5 км; в 1 час 7 минут 30 секунд.

Критерии. Не указано явно время, в которое друзья находились на наибольшем расстоянии — -1 балл. Полностью верные рассуждения (верно составлены уравнения), но в решении присутствует арифметическая ошибка — -1 балл.

4. См. задачу 6 для 5 класса.

5. См. задачу 7 для 5 класса.

6. Выражение, записанное на картинке, читается как $105 + 92$, то есть равно 197. Но если перевернуть карточку, то получится $26 + 501$, то есть 527. Придумайте такое выражение, записанное электронными цифрами, которое при переворачивании увеличится ровно в 2020 раз.
При этом должны выполняться следующие условия:



- разрешены только цифры и знаки $+$ и $-$;
- ни одно число (в том числе и после переворачивания) не может начинаться с нуля;
- окончательный результат должен быть положительным. (*А. А. Теслер*)

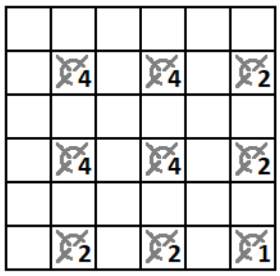
Решение. Например, так: 1202+2-1202 $= 2$, 2021-2+2021 $= 4040$.

Критерии. Приведено решение с использованием запятых в числах (дробные числа, после переворота запятая игнорируется) — 2 балла.
Решение, где сумма увеличивается на 2020, а не в 2020 раз — 0 баллов.

7. В некоторых клетках квадрата 6×6 стоят мины так, что из 25 квадратов 2×2 ровно в n квадратах количество мин нечётно, а в остальных чётно. Чему может равняться* n? (*А. А. Теслер*)

Ответ: от 0 до 25.

Решение.



Достаточно расставить мины в каждую четвёртую клетку (см. рисунок). Каждая мина находится в одном, двух или четырёх квадратах, причём наборы квадратов, соответствующие разным минам, не пересекаются. Комбинируя единицы, двойки и четвёрки, можно получить любое количество квадратов (от 1 до 25), в которых одна мина, а в остальных квадратах будет 0 мин. (Например, если поставить только три мины в нижней строке, то таких мин будет $2 + 2 + 1 = 5$.)
Осталось привести пример, когда во всех квадратах чётное количество мин; например, подходит размещение 18 мин в шахматном порядке.

Критерии. Только ответ – 0 баллов.

Задачи для 7 класса

1. См. задачу 3 для 6 класса.

2. Если округлять количество процентов до целых, то получится, что среди участников математического кружка 51% составляют мальчики, а 49% — девочки. Каково минимально возможное количество участников кружка? (*О. А. Пяйве*)

---

* Такая формулировка вопроса означает, что нужно найти *все возможные* ответы на заданный вопрос; кроме этого, из решения должно быть ясно, почему никаких других ответов быть не может.

Решение. Чтобы после округления получить 51% и 49%, надо, чтобы разница между долей мальчиков и долей девочек была меньше 3% (мальчиков должно быть менее 51,5%, девочек более 48,5%). Но эта разница — не менее 1 человека, значит, 1 человек должен составлять менее 3% от кружка. Девочек более 48%, значит, их хотя бы 17 человек, а мальчиков хотя бы 18 человек, то есть в сумме не менее 35.

Ответ 35 (18 мальчиков и 17 девочек), очевидно, подходит: $\dfrac{17}{35}$ больше 48,5%, но меньше 49,5%.

Ответ: 35.

Критерии. За случай, когда детей нечётное количество, даётся 5 баллов. За решение в предположении, что мальчиков на 1 больше, чем девочек, даётся 3 балла. Ответ с явной проверкой, что он подходит – 2 балла. Только ответ – 1 балл.
Если при работе с округлением в какой-то момент обрезается дробь (например, вместо «число меньше 51,5» написано «число не больше 51,4999»), но при этом решение принципиально верное, то снимается балл.

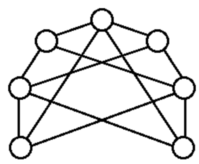
3. Олег назвал натуральное число m, а Андрей нашёл сумму $1^m + 2^m + 3^m + \ldots + 998^m + 999^m$. Какой цифрой оканчивается десятичная запись этой суммы? (*О. А. Пяйве*)

Решение. Прибавив к исходной сумме 0^m (для единообразия), получим, что у исходных чисел каждая из последних цифр встречается по 100 раз. Заметим, что последняя цифра числа a^b не меняется, если заменить число a на его последнюю цифру. Поэтому последняя цифра у нашей суммы такая же, как у числа $100 \cdot 0^m + 100 \cdot 1^m + 100 \cdot 2^m + \ldots + 100 \cdot 9^m$. А это число делится на 100, и его последняя цифра равна нулю.

Ответ: 0.

Критерии. Только ответ – 0 баллов.

4. Семь кружков соединены отрезками, как показано на рисунке. У Амира есть три карандаша — красный, зелёный и синий. Он хочет закрасить каждый кружок одним из карандашей, причём никакие два кружка, соединённые отрезком, не должны быть одного цвета. Сколькими способами он может это сделать? (*А. Р. Араб*)



Решение. Заметим, что кружки можно разбить на группы так, что линии проведены только между кружками разных групп (на картинке кружки из разных групп чередуются). Иначе говоря, это полный двудольный граф, в одной доле которого 3 вершины, а в другой 4.
Один цвет не может присутствовать в обеих долях. Это значит, либо использовано всего два цвета, либо одна из долей покрашена в один цвет, а другая в два.

Для двух цветов есть 6 вариантов (3 способа выбрать цвет для первой доли и после этого ещё 2 способа для второй).

Для трёх цветов:
а) Доля с 3 вершинами покрашена в один цвет (этот цвет выбрать 3 способа), а доля с 4 вершинами — в два цвета (есть $2^4 - 2 = 14$ способов выбрать подмножество, которое будет покрашено в первый цвет, а остальные вершины красим во второй; 2 способа вычитаются, поскольку нельзя красить все 4 вершины в первый цвет или все 4 вершины во второй). Итого $3 \cdot 14 = 42$ способа.
б) Доля с 4 вершинами покрашена в один цвет (этот цвет выбрать 3 способа), а доля с 3 вершинами — в два цвета (есть $2^3 - 2 = 6$ способов выбрать подмножество, которое будет покрашено в первый цвет, а остальные вершины красим во второй). Итого $3 \cdot 6 = 18$ способов.

Ответ: $6 + 42 + 18 = 66$ способов.

Критерии. Любое переборное решение без описания логики перебора с неполным разбором случаев — 0 баллов.

Арифметическая ошибка — -1 балл. Логическая ошибка при рассмотрении одного из случаев — -2 балла.
В решении пропущен случай, где используются только 2 цвета — 5 баллов. Разобран только случай а) или б) — 3 балла.
Отмечено, что кружки разбиваются на две группы, внутри которых нет рёбер, без дальнейших продвижений — 2 балла.

5. См. задачу 7 для 5 класса.

6. См. задачу 6 для 6 класса.

7. См. задачу 7 для 6 класса.

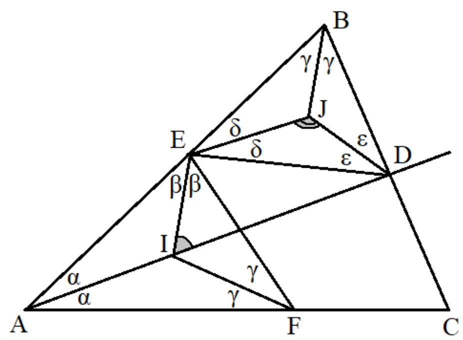
Задачи для 8 класса

1. См. задачу 2 для 7 класса.

2. См. задачу 3 для 7 класса.

3. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD. На сторонах AB и AC отмечены точки E и F соответственно, причём $\angle AEF = \angle ACB$. Точки I и J — точки пересечения биссектрис $\triangle AEF$ и $\triangle BDE$ соответственно. Найдите $\angle EID + \angle EJD$. (*А. Р. Араб*)

Решение.
Обозначим $\angle BAD = \angle CAD = \alpha$, $\angle AEI = \angle FEI = \beta$ (тогда по условию $\angle ACB = 2\beta$), $\angle ABC = 2\gamma$ (тогда $\angle AFE = 2\gamma$), $\angle BEJ = \angle DEJ = \delta$, $\angle BDJ = \angle EDJ = \varepsilon$. Тогда $\alpha + \beta + \gamma = \gamma + \delta + \varepsilon = 90°$ (полусумма углов треугольника), откуда $\alpha + \beta = \delta + \varepsilon$. Тогда $\angle EID = \alpha + \beta$ (внешний угол $\triangle AEI$), $\angle EJD = 180° - (\delta + \varepsilon)$ (сумма углов $\triangle EJD$). Значит, $\angle EID + \angle EJD = \alpha + \beta + 180° - (\delta + \varepsilon) = 180°$.



Критерии. Только ответ – 0 баллов.

4. См. задачу 6 для 6 класса.

5. См. задачу 4 для 7 класса.

6. Паша написал на каждой грани куба натуральное число. Пришёл Андрей и написал в каждой вершине произведение трёх чисел на сходящихся в ней гранях. Оказалось, что сумма всех чисел Андрея равна 2020. Укажите все возможные значения суммы Пашиных чисел. (*П. Д. Муленко*)

Решение. Обозначим Пашины числа как a, b, c, d, e, f (d написано напротив a, e напротив b, f напротив c); тогда сумма Андреевых запишется как $abc + abd + abe + abf + \ldots + bcf = 2020$, то есть (если разложить на множители) $(a + d)(b + e)(c + f) = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 101$.

Так как в каждой скобке сумма двух натуральных, она не может быть меньше двух, поэтому есть четыре варианта: $(2, 2, 505), (2, 5, 202), (2, 10, 101), (4, 5, 101)$.

Ответ: 509, 209, 113, 110.

Критерии. 3 балла — за получение равенства $(a + d)(b + e)(c + f) = 2020$.

За каждый пропущенный способ разложения 2020 на множители снимается по 1 баллу.

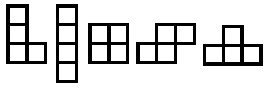
Приведены все или некоторые примеры подходящих чисел без иных продвижений — 1 балл.

7. В классе учится 35 учеников. За год каждый ученик посетил не менее 67 из 100 уроков математики. Докажите, что в течение учебного года можно выделить такие 3 урока, что каждый ученик посетил хотя бы один из них. (*К. А. Кноп*)

   Решение. Суммарное количество посещений уроков составляет более $2/3$ от максимально возможного, поэтому был урок, на котором присутствовали более $2/3$ учеников, то есть отсутствовало менее $1/3$, или не более 11. Применяя к этим 11 ученикам то же рассуждение, получим ещё один день, когда были хотя бы 8 из них (то есть отсутствовали максимум 3), и третий, когда все эти (максимум) трое были.

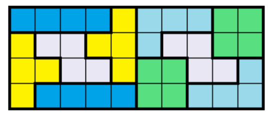
   Критерии. 2 балла, если найден день, в который пришло хотя бы 24 ученика.

8. Некто разрезал квадрат на тетрамино, причём все пять видов тетрамино (см. рисунок) оказались использованы одинаковое количество раз. Какова минимально возможная сторона квадрата? (*И. М. Туманова*)



   Ответ: 20.

   Решение. Суммарная площадь одного набора тетраминошек равна $20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$, поэтому сторона квадрата должна делиться на $2 \cdot 5 = 10$. Заполнить квадрат 10×10 невозможно, поскольку при шахматной раскраске 5 Т-тетрамино содержат нечётное количество чёрных клеток, а каждая из остальных фигур — чётное. Квадрат 20×20 получить можно, например, из 10 блоков, показанных на рисунке.



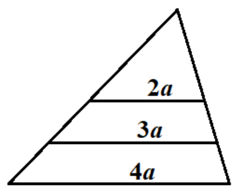
   Критерии. 3 балла за оценку (1 балл за доказательство делимости на 10, 2 балла за доказательство невозможности 10). 3 балла за пример.

Задачи для 9 класса

1. См. задачу 2 для 7 класса.

2. Средняя линия разрезает треугольник на две части — треугольник и трапецию. В этой трапеции также проведена средняя линия. В результате исходный треугольник разрезан на три части — треугольник и две трапеции. Докажите, что если две из этих трёх частей имеют целые площади, то площадь третьей части тоже равна целому числу. (*А. А. Теслер*)

   Решение.
   Пусть сторона треугольника, параллельно которой проводятся средние линии, равна $4a$, тогда средняя линия треугольника равна $2a$, а трапеции — $3a$. Если площадь большого треугольника равна S, то площадь маленького треугольника $S/4$. Высоты же двух трапеций равны, и их площади относятся как $2a + 3a : 3a + 4a = 5 : 7$. Итак, площади трёх частей выражаются как $4x$, $5x$ и $7x$ (где $x = \frac{S}{16}$).



   Теперь рассмотрим варианты.
   а) Если $4x$ и $5x$ целое, то $x = 5x - 4x$ целое, значит, и $7x$ тоже.
   б) Если $5x$ и $7x$ целые, то $2x = 7x - 5x$ целое, значит, и $4x$ тоже.
   в) Если $4x$ и $7x$ целые, то $x = 4x + 4x - 7x$ целое, значит, и $5x$ тоже.

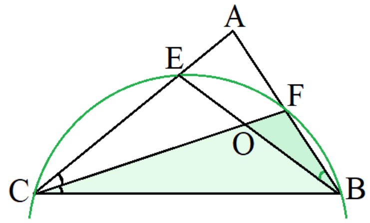
   Критерии. -2 балла, если рассмотрены не все варианты того, какие части могут иметь целую площадь.

3. См. задачу 4 для 7 класса.

4. В треугольнике ABC проведена биссектриса CF. На ней отмечена точка O так, что $FO \cdot FC = FB^2$. BO пересекает AC в точке E. Докажите, что $FB = FE$. (*О. А. Пяйве*)

   Решение.

$FO \cdot FC = FB^2$, значит, $FO : FB = FB : FC$. При этом угол BFC — общий, значит, треугольники FBO и FCB подобны. Отсюда $\angle FBO = \angle FCB$. Но при этом, так как FC — биссектриса, то $\angle FCB = \angle FCE$. Значит, $\angle FBO = \angle FCE$, и четырёхугольник $FBCE$ вписанный. Значит, так как углы FCE и FCB равны, то и соответствующие дуги (FB и FE), и соответствующие хорды (FB и FE) равны.



5. См. задачу 6 для 8 класса.

6. См. задачу 7 для 8 класса.

7. Пусть даны натуральные числа a, b, x и y, причём $a < b$, $x < a(a+b)$ и $y < a(a+b)$. Будем называть четвёрку чисел (a, b, x, y) *странной*, если x делится на a, y делится на b, $x + y$ делится на $a + b$, но $x - y$ не делится на $a - b$.
   а) Существует ли странная четвёрка, в которой a и b взаимно просты?
   б) Существует ли странная четвёрка, в которой a и b не взаимно просты? (*О. А. Пяйве*)

   Решение. а) Нет. По условию, $x + y = k(a + b)$, $x = (k + p_1)a$, $y = (k - p_2)b$ для некоторых целых чисел k, p_1, p_2. Тогда $p_1 a = p_2 b$, откуда и из взаимной простоты a и b получается $p_1 = tb$, $p_2 = ta$.

   Пусть $t > 0$ (случай $t < 0$ рассматривается аналогично). Тогда из того, что $y > 0$, следует, что $k > ta$. Подставив это в выражение для x, мы получим, что $x = (k + p_1)a > (ta + tb)a \geqslant (a + b)a$. Противоречие. Значит, t не больше (и не меньше) нуля. Значит, $t = 0$ и $x = ka$, $y = kb$, откуда $x - y = k(a - b)$, что делится на $a - b$.

   b) Да, например, $a = 20$, $b = 50$, $x = 40$, $y = 800$.

   Критерии. За пункт а) 5 баллов, за пункт б) — 2.

8. См. задачу 8 для 8 класса.

Задачи для 10 класса

1. См. задачу 2 для 7 класса.

2. Найдите все такие квадратные трёхчлены $f(x)$, что многочлены $f^2(x)$ и $f(x^2)$ имеют одинаковое и непустое множество вещественных корней. (*А. А. Солынин*)

   Решение. Заметим, что корни $f^2(x)$ совпадают с корнями $f(x)$. Значит, множество корней — это такое множество A (из одного или двух элементов), что $x \in A \iff x^2 \in A$. Подходят только $A = \{0\}$ и $A = \{-1, 1\}$.

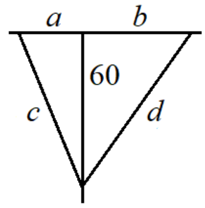
   Ответ: kx^2 и $k(x - 1)(x + 1)$.

   Критерии. По одному баллу за каждое семейство примеров.

3. От большого дуба, растущего посреди чистого поля, ровно в полдень отправились в путь три всадника. Первый поскакал на юг со скоростью 20 вёрст в час, второй — на запад со скоростью 30 вёрст в час, третий — на восток со скоростью 40 вёрст в час. Второй и третий в некоторые моменты свернули так, чтобы, поскакав по прямой, встретить первого (продолжавшего движение на юг) в три часа дня. Кто раньше повернул и на сколько минут? (*А. А. Теслер по мотивам старинной китайской задачи*)

   Решение. Путь первого (60 вёрст) является катетом двух прямоугольных треугольников, причём он в 1,5 раза меньше, чем сумма двух других сторон западного треугольника, и вдвое меньше, чем восточного. Найдём неизвестные стороны треугольников с помощью теоремы Пифагора.

$$\begin{cases} a^2+60^2=c^2 \\ a+c=90 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (c-a)(c+a)=3600 \\ a+c=90 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c-a=40 \\ c+a=90 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=65 \\ a=25 \end{cases}$$



$$\begin{cases} b^2+60^2=d^2 \\ b+d=120 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (d-b)(d+b)=3600 \\ b+d=90 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d-b=30 \\ d+b=120 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d=75 \\ b=45 \end{cases}$$

Значит, второй всадник скакал на запад 25 вёрст, то есть 50 минут, а третий 45 вёрст, то есть 67,5 минут.

Ответ: более медленный повернул на 17,5 минут раньше.

Критерии. За сведение задачи к алгебраической (например, через теорему Пифагора) даётся 2 балла.

4. См. задачу 7 для 8 класса.

5. См. задачу 7 для 9 класса.

6. Паша написал на каждой грани куба натуральное число. Пришёл Андрей и написал в каждой вершине произведение трёх чисел на сходящихся в ней гранях. Оказалось, что сумма всех чисел Андрея равна 2020. Сколько существует различных наборов чисел, которые мог написать Паша? *(П. Д. Муленко)*

   Решение. Обозначим Пашины числа как a, b, c, d, e, f (d написано напротив a, e напротив b, f напротив c); тогда сумма Андреевых запишется как $abc+abd+abe+abf+\ldots+bcf=2020$, то есть (если разложить на множители) $(a+d)(b+e)(c+f)=2\cdot2\cdot5\cdot101$.

   Так как в каждой скобке сумма двух натуральных, она не может быть меньше двух, поэтому есть четыре варианта: $(2,2,505), (2,5,202), (2,10,101), (4,5,101)$. Теперь, написав все четыре варианта, посчитаем количество способов разбить каждое из чисел на две грани: $1\cdot1\cdot252+1\cdot2\cdot101+1\cdot5\cdot50+2\cdot2\cdot50=252+202+250+200=904$. Это количество искомых наборов, у которых также заданы разбиения на пары противоположных чисел.

   Осталось заметить, что каждый набор чисел однозначно задаёт один из четырёх вариантов сумм чисел на противоположных гранях (так как суммы чисел на всех гранях различны: $509, 209, 113, 110$), как и разбиение чисел в наборе на пары противоположных (одно из чисел в наборе всегда не меньше 51 и его пара однозначно определена, в первых трёх вариантах одна из пар состоит из двух единиц, и в последнем варианте все 4 способа разбить 4 и 5 отличаются количеством возникающих двоек.

   Ответ: 904.

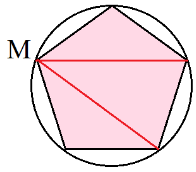
   Критерии. За нахождение вариантов сумм на противоположных гранях 2 балла. Если посчитан ответ, но не объяснено, почему каждый набор учтён только один раз, то максимум 5 баллов. За арифметические ошибки снимается балл.

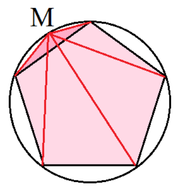
   Примечание о важности последней части решения. Например, набор произведений $(4,5,6)$ может быть получен как $(1+3,\ 2+3,\ 2+4)$ и как $(2+2,\ 1+4,\ 3+3)$, но эти разные способы соответствуют одному и тому же набору чисел $(1,2,2,3,3,4)$.

7. См. задачу 8 для 8 класса.

8. В окружность радиуса R вписан правильный n-угольник. Точка M движется по окружности, и для каждого её положения рассматривается сумма расстояний от M до прямых, содержащих стороны n-угольника. Для каких положений точки M результат окажется минимальным? *(О. А. Пяйве)*

Решение. Рассмотрим треугольники, образованные точкой M и каждой из сторон n-угольника. Сумма расстояний, упомянутая в задаче, умноженная на половину стороны n-угольника, равна сумме площадей этих треугольников. Значит, надо минимизировать сумму площадей треугольников.





Если M совпадает с вершиной многоугольника, то эта сумма площадей равна площади многоугольника, а в остальных случаях больше на удвоенную площади треугольника, образованного этой точкой и ближайшей стороной.

Ответ: для случая, когда M совпадает с одной из вершин.

Критерии. За доказательство для чётного n даётся 2 балла. Случай $n = 3$ отдельно не оценивается.

Задачи для 11 класса

1. См. задачу 2 для 7 класса.

2. См. задачу 3 для 10 класса.

3. См. задачу 7 для 8 класса.

4. См. задачу 6 для 10 класса.

5. Многочлен степени $n = 2k$ с вещественными коэффициентами является чётной функцией. Сколько различных корней он может иметь? (*А. А. Теслер*)

   Ответ: от 0 до n (все варианты возможны).

   Решение. Заметим, что многочлен x^2 имеет 1 корень, $x^2 + 1$ имеет 0 корней, $x^2 - a^2$ имеет 2 корня. Перемножая такие множители в нужных количествах (в качестве a беря разные положительные числа), можно получить любое количество корней от 0 до n. Больше n корней у многочлена степени n быть не может.

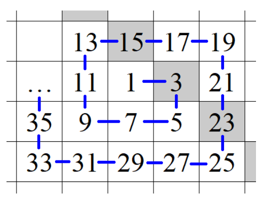
   Критерии. 5 баллов, если доказано существование многочленов с любым чётным числом корней. Если пропущен крайний случай (0 или 1 корень), то снимается 1 балл.

6. Докажите, что $2\sin^2(\sin x) \geqslant \sin^2 x$. (Аргумент функции sin — угол в радианах.) (*О. А. Пяйве*)

   Решение. Обозначим $t = \sin x$, тогда надо доказать, что $2\sin^2 t \geqslant t^2$ при $|t| \leqslant 1$. Ясно, что достаточно рассматривать неотрицательные t. Заметим, что 1 радиан больше 45, но меньше 90 градусов, поэтому $\sin 1 > \frac{\sqrt{2}}{2}$. Функция синус на промежутке $[0; 1]$ выпукла вверх, поэтому $\sin t \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2} t \geqslant 0$ при $t \in [0; 1]$, откуда получаем требуемое неравенство.

   Критерии. Нарисованные графики отдельно не оцениваются. За замену $\sin x = t$ даётся 2 балла. Если доказательство работает только в предположении неравенств на t или x, то не больше 5 баллов.

7. Последовательные нечётные натуральные числа выписывают «по спирали», как показано на рисунке. Числа 3, 15 и остальные, находящиеся вместе с ними на одной прямой, назовём хорошими (на рисунке они выделены серым). Чему равна сумма 2020 наименьших хороших чисел? (*А. Р. Араб*)



   Решение. Рассмотрим вместо прямой, содержащей хорошие числа, параллельную ей прямую, содержащую числа 1, 5, 13, 25... (назовём их отличными). Разность между соседними (по возрастанию) отличными числами определяется длиной половины витка спирали и каждый раз увеличивается на 4 ($1+4 = 5$, $5+8 = 13$, $13+12 = 25$...). Таким образом, n-е отличное число равно $1 + 4 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + \ldots + 4 \cdot (n-1) = 1 + 4 \cdot (1 + 2 + \ldots + (n-1))$.

Вернёмся к хорошим числам. Заметим, что они находятся на спирали рядом с отличными, поэтому отличаются от них на 2: $3 = 5 - 2$, $15 = 13 + 2$, $23 = 25 - 2$, $43 = 41 + 2\ldots$ Значит, хорошее число с номером $2k$ на 2 больше, чем отличное с номером $2k+1$, а хорошее число с номером $2k+1$, наоборот, на 2 меньше, чем отличное с номером $2k+2$. Суммарно получается, что сумма первых 2020 хороших чисел равна сумме отличных чисел с номерами от 2 до 2021, то есть $2020 + 4 \cdot \big(1 + (1+2) + (1+2+3) + \ldots + (1+2+\ldots+2020)\big)$.

Лемма. $1 + (1+2) + (1+2+3) + \ldots + (1+2+\ldots+n) = C_{n+2}^3 = \frac{1}{6}(n+2)(n+1)n$.

Доказательство. Заметим сначала, что $1 + 2 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2} = C_{k+1}^2$.

Теперь докажем исходное утверждение по индукции.
База: подставляя $n = 1$, получаем $1 = C_3^3$, что верно.
Переход: если уже известно, что $1 + (1+2) + (1+2+3) + \ldots + (1+2+\ldots+(n+1)) = C_{n+1}^3$, то при прибавлении к этому выражению суммы $1 + \ldots + n$ получаем $C_{n+1}^3 + C_{n+1}^2 = C_{n+2}^3$.
Лемма доказана.

Получается, что искомая сумма равна $2020 + 4 \cdot \frac{1}{6} \cdot 2022 \cdot 2021 \cdot 2020 = 5\,503\,104\,180$.

Ответ: $5\,503\,104\,180$.

Критерии. За явную формулу для хороших чисел (или для сумм, или для отличных чисел) даётся 2 балла. Если формула для хороших чисел доказана, то даётся 5 баллов.

8. См. задачу 8 для 10 класса.