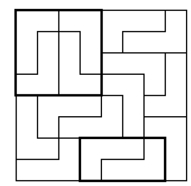
Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2019–2020 учебный год. Отборочный этап

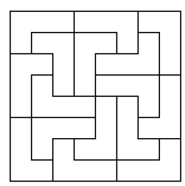
Решения задач отборочного этапа

Задачи для 5–6 классов

1. На рисунке показан квадрат 8×8, разрезанный на L-тетрамино (четырёхклеточные фигурки в форме буквы L). При этом некоторые из них образуют меньшие прямоугольники (два таких прямоугольника выделены на рисунке). Можно ли разрезать квадрат 8×8 на L-тетрамино таким образом, чтобы меньшие прямоугольники не образовывались? (*А. А. Теслер*)



Решение. Можно, например, так.



Критерии. 1 балл — за пример, основанный на неверном тезисе, что квадрат не является прямоугольником.

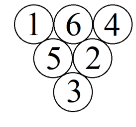
2. Петя пишет поэму. В первый день он написал первые несколько строк, а в каждый следующий день дописывал на одну строку больше, чем дописал в предыдущий день (например, если в первый день он придумал 3 строки, то в конце второго дня поэма содержала 7 строк, а в конце третьего — 12).
а) Может ли в конце какого-то дня (не первого) количество строк в поэме оканчиваться цифрой 4?
б) Может ли в конце какого-то дня (не первого) количество строк в поэме оканчиваться цифрой 4, а в конце какого-то из следующих дней — цифрой 7? (*И. М. Туманова*)

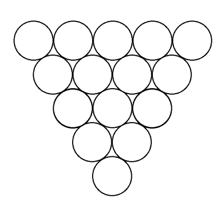
Ответ: «да» на оба вопроса.

Решение. Например, пусть Петя начал с двух строк, тогда $2+3+4+5 = 14$, $2+3+4+5+6+7 = 27$.

Критерии. Если решен только пункт а) — 2 балла.

3. Назовём расположение чисел милым, если каждое число равно разности двух, стоящих над ним. Например, на рисунке слева показано милое расположение чисел от 1 до 6. Придумайте милое расположение чисел от 1 до 15 (каждое из них должно использоваться ровно один раз, образуя фигуру, нарисованную справа). (*А. Р. Араб*)





Ответ: существует единственное (с точностью до симметрии) расположение.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
6 & & 14 & & 15 & & 3 & & 13 \\
& 8 & & 1 & & 12 & & 10 & \\
& & 7 & & 11 & & 2 & & \\
& & & 4 & & 9 & & & \\
& & & & 5 & & & &
\end{array}
$$

Критерии. Не более 2 баллов — за пример расположения 15 различных чисел, не лежащих в диапазоне от 1 до 15.

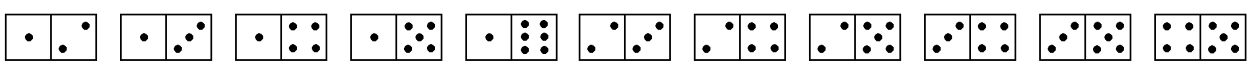
4. Петя и Вася играют в следующую игру. У них есть шоколадка 2019×2020 клеток, и каждым ходом игрок отламывает от неё прямоугольный кусок и съедает его (в результате остаётся тоже прямоугольник, состоящий из клеток, но меньшего размера). Начинает игру Петя, далее ходят по очереди. Побеждает тот, после чьего хода периметр шоколадки станет ровно 10. Кто из игроков может выиграть при любой игре соперника? Как ему надо для этого действовать? (*О. А. Пяйве*)

Ответ: выигрывает первый игрок (начинающий партию).

Решение. Заметим, что игрок, первым делающий одну из сторон меньше 5, проигрывает (вторая сторона после его хода больше или равна 5, но соперник может сделать её такой, чтобы в сумме с первой она давала 5). Поэтому выиграть может первый игрок, и стратегия его такова. Каждым ходом он делает шоколадку квадратной (например, первым ходом 2019×2019), и действует так, пока второй не сделает одну из сторон меньше 5. Тогда первый сразу выигрывает.

Критерии. Решение вида «Первый выигрывает, делая 2019×2019 и потом играя симметрично» (без выделения финальной части) — 2 балла.

5. Дан набор костяшек домино, показанный на рисунке.



а) Можно ли составить из них всех цепочку по правилам домино?

б) Можно ли убрать одну костяшку из набора так, чтобы из всех остальных нельзя было сделать цепочку? (*А. А. Теслер*)

Ответ: а) да; б) да.

Решение. а) Подойдёт, например, цепочка 61, 12, 23, 34, 45, 51, 13, 35, 52, 24, 41.

б) Если убрать, скажем, 23, то числа 1, 6, 2 и 3 будут встречаться нечётное количество раз каждое. А в любой цепочке нечётное количество раз могут встретиться только те числа, которые стоят с концов, их не больше двух.

Критерии. За первый пункт 2 балла, за второй — 5.

6. На одном острове живут четыре типа людей: рыцари (не могут произносить ложных утверждений), лжецы (не могут произносить истинных утверждений), обычные люди (могут говорить всё что угодно) и бояки (не делают вообще никаких утверждений). Однажды собрались несколько человек, и каждый из них произнёс одну из следующих фраз: «Кто вы?», «Я рыцарь», «Я лжец», «Я обычный», «Я бояка». Каждую фразу произнесли ровно по 10 человек. Могут ли рыцари оказаться самым многочисленным типом людей в этой компании? (*А. А. Теслер*)

Ответ: да.

Решение. Например, пусть рыцарей 16, бояк 4, обычных и лжецов по 15. Вопрос «Кто вы?» задают все бояки и 6 рыцарей, фразу «Я рыцарь» произносят 10 рыцарей, «Я лжец» — 10 обычных людей, «Я обычный» — 5 обычных людей и 5 лжецов, «Я бояка» — 10 лжецов.

Критерии. Пример с указанием количества людей каждого типа, но без указания, кто что говорит (если этот пример может реализоваться) — 3 балла.

1 балл — за верное указание того, кто какие фразы может говорить, без дальнейших продвижений.

Имейте в виду, что люди некоторых типов могут отсутствовать (это не противоречит условию).

7. ***Только для 5 класса.*** Даны три сосуда. Первый сосуд наполнен водой, а второй и третий пусты. В 12:00 из первого сосуда начинает литься вода во второй и третий, причём во второй поступает 2 литра в минуту, а в третий 4 литра в минуту. В 13:00 объём воды в первом и втором сосудах сравнялся. Во сколько первый сосуд опустеет? (*А. А. Теслер*)

Ответ: в 13:20.

Решение. Заметим, что из первого сосуда выливается 6 литров воды в минуту, то есть 360 литров в час. Значит, через час из него вылилось 360 литров, из них 120 литров во второй и 240 литров в третий. По условию, в первом сосуде в этот момент столько же воды, сколько во втором, то есть 120 литров. При скорости выливания 6 литров в минуту он опустеет ещё через 20 минут.

Критерии. За арифметические ошибки отнимаем 2 балла.

Только для 6 класса. В магазине есть три сорта чая: зелёный, чёрный и фруктовый. Вначале количество пачек разных сортов относилось как 4 : 5 : 8. После недели продаж и новой поставки это соотношение изменилось и стало 5 : 7 : 12. Известно, что число пачек фруктового чая возросло на 60%, а зелёного увеличилось не более чем на 20 пачек. Сколько всего пачек чая было в магазине вначале? (*Л. С. Корешкова*)

Ответ: 255 пачек.

Решение. Пусть изначально количество пачек равнялось $4x, 5x, 8x$, а в конце — $5y, 7y, 12y$.

Из условия о фруктовом чае получаем, что $12y = 8x \cdot 1{,}6$, то есть $12y = 12{,}8x$, $y = 1\frac{1}{15} \cdot x$; поэтому x делится на 15.

Из условия о зелёном чае получаем, что $5y - 4x \leqslant 20$, то есть $5\frac{5}{15} \cdot x - 4x \leqslant 20$, $1\frac{1}{3} \cdot x \leqslant 20$. Поскольку x кратен 15, то подходит единственный вариант: $x = 15$.

Тогда общее количество пачек вначале равно $4x + 5x + 8x = 17x = 17 \cdot 15 = 255$.

Критерии. Только ответ — 1 балл; ответ с проверкой того, что он подходит, но без обоснования, что других нет — не более 2 баллов. Обоснование содержит перебор с пропущенными случаями — не более 5 баллов.

Задачи для 7 класса

1. См. задачу 1 для 5-6 классов.
2. См. задачу 2 для 5-6 классов.
3. См. задачу 3 для 5-6 классов.
4. См. задачу 7 для 6 класса.

5. Имеется два резервуара, каждый из которых вмещает 2020 м^3 воды. В полночь в первом резервуаре 100 м^3 воды, а второй заполнен целиком. В первый резервуар каждый час поступает 110 м^3 воды (пока он не заполнится), а из второго каждый час выкачивают 50 м^3 (пока он не опустеет). В какие моменты времени разница между объёмами воды в резервуарах будет составлять половину первоначальной? (*И. Ж. Ибатулин*)

   Ответ: в 6:00 и в 19:12.

   Решение. Скорость сближения значений 160 м^3/ч. Поэтому такие моменты должны настать через 6 и через 18 часов. Второй, однако, недостижим, поскольку первый резервуар к этому моменту переполнится ($100 + 110 \cdot 18 > 2020$). Поэтому нужно найти момент, когда первый резервуар заполнен, а во втором не хватает 960 м^3 воды. Такой момент настанет через $960 : 50$ часов, то есть в 19 часов 12 минут.

   Критерии. 2 балла, если найден только ответ 6 часов.

   3 балла — даны ответы 6 и 18 часов, или найден ответ 6 часов и указано, что 18 быть не может.

   5 баллов — ответ $19\frac{1}{5}$ найден, но отброшен, или указаны три ответа (6, 18, $19\frac{1}{5}$).

   Не более 6 баллов, если непонятно, почему ответ 18 отброшен, а ответ $19\frac{1}{5}$ годится.

6. У Гарри Поттера есть коробка размерами $10 \times 10 \times 10$ сантиметров и волшебный аппарат. Если поместить коробку в аппарат, то одно из её измерений (длина, ширина или высота) увеличивается на 50%, а каждое из двух других уменьшается на 20%. Может ли у Гарри после нескольких применений аппарата получиться коробка $20 \times 20 \times 20$ сантиметров? (*А. А. Теслер*)

   Ответ: не может.

   Решение. Объём коробки с каждым разом уменьшается ($1,5a \cdot 0,8b \cdot 0,8c < abc$).

   Критерии. Если уменьшение объёма только замечено на примерах, но не доказано — 2 балла. Только за ответ — 0 баллов.

7. На одном острове живут четыре типа людей: рыцари (не могут произносить ложных утверждений), лжецы (не могут произносить истинных утверждений), обычные люди (могут говорить всё что угодно) и бояки (не делают вообще никаких утверждений). Однажды собрались несколько человек, и каждый из них сказал одну из следующих фраз: «Кто вы?», «Я рыцарь», «Я лжец», «Я обычный», «Я бояка». Каждую фразу произнесли ровно по 6 человек. Известно, что людей всех типов было разное и ненулевое количество. Больше всего было рыцарей. А сколько именно? (Найдите все возможные варианты ответа на этот вопрос и докажите, что других нет.) (*А. А. Теслер*)

   Ответ: 11 рыцарей.

   Решение. Рыцарей не может быть больше 12, потому что они могут произносить только фразы «Кто вы?» и «Я рыцарь». Если их ровно 12, то это будет противоречить тому, что количество бояк ненулевое. С другой стороны, последние 3 фразы могут произносить только лжецы и господа, поэтому их в сумме 18 человек и из них хотя бы 10 будут одного типа. Следовательно, рыцарей не меньше 11.

   Для 11 рыцарей есть пример: пусть 5 рыцарей и единственный бояка ответили «Кто вы?», 6 рыцарей ответили «Я рыцарь», 6 господ ответили «Я лжец», 2 господина и 4 лжеца ответили «Я господин», и оставшиеся 6 лжецов ответили «Я бояка».

   Критерии. Если не учитывалось условие, что людей всех типов было разное и ненулевое количество, то максимум 5 баллов.

   1 балл — за верное указание того, кто какие фразы может говорить, без дальнейших продвижений.

Задачи для 8 класса

1. См. задачу 1 для 5-6 классов.

2. См. задачу 7 для 6 класса.

3. Два хакера создали разные программы для анализа степени изменения чисел при некоторых действиях.
   Первая программа за один цикл умножает любое натуральное число на 3, а затем отнимает от результата его сумму цифр; далее с новым результатом повторяется 7 таких же циклов. Итоговый результат работы программы первого хакера — отношение полученного результата к исходному числу.
   Программа второго хакера берёт число, состоящее только из девяток, и за один цикл делит это число на сумму цифр, если оно делится, а в противном случае отнимает сумму цифр; далее с результатом повторяются 7 таких же циклов. Итоговый результат работы программы второго хакера — отношение исходного числа к полученному результату.
   Хакеры решили сыграть в игру: каждый придумывает себе изначальное число; у кого итоговый результат больше, тот и победил. Кто из хакеров сумеет победить при любой игре соперника?
   (*И. Ж. Ибатулин*)

   Ответ: второй.

   Решение. Число первого хакера возрастает не более чем в $3^8 = 6561$ раз. А второй может обеспечить 9999, например, так: $9999 \to 9963 \to 369 \to 351 \to 39 \to 27 \to 3 \to 1 \to 1$.

   Критерии. 3 балла — показано, что первый не может получить больше, чем 3^8.
   2 балла — показано, что второй хакер может получить число, большее 3^8 (например, 9999).

4. См. задачу 5 для 7 класса.

5. ABC и CDE — равнобедренные прямоугольные треугольники с гипотенузами $BC = 7$ и $CE = 14$. C лежит на отрезке BE, а точки A и D лежат по одну сторону от прямой BE. Отрезки AE и BD пересекаются в точке O. Найдите площадь треугольника ODE. (*А. Р. Араб*)

   Ответ: 42.

   Решение. Продолжим отрезки ED и AB до точки их пересечения — P. Обозначим точку пересечения DC и EA через R. Заметим, что треугольники ABC, CDE и EPB подобны с коэффициентами 1:2:3. Обозначим отрезок AB за x. Из теоремы Пифагора для треугольника ABC следует, что $x = \frac{49}{2}$ Пользуясь формулой $S = \frac{1}{2}ha$ для площади треугольника, получим, что $S(DPB) = 1{,}5x^2$, $S(ABE) = 1{,}5x^2$, $S(EPB) = 4{,}5x^2$, $S(EDR) = \frac{4}{3}x^2$.

   Составим уравнение на искомую площадь: $S(EDR)+S(DRO) = S(DEO) = S(EPB)-S(DPB)-S(ABE)+S(AOB)$. Заметим, что DRO подобен AOB с коэффициентом $\frac{4}{3}$, значит, площади относятся как $\frac{16}{9}$. Обозначим $S(DRO) = W$. Тогда получается:

$$\frac{4}{3}x^2 + W = 4,5x^2 - 1,5x^2 - 1,5x^2 + \frac{9}{16}W,$$

$$W = \frac{8}{21}x^2,$$

$$S(DEO) = \frac{4}{3}x^2 + W = \frac{4}{3}x^2 + \frac{8}{21}x^2 = 42.$$

6. См. задачу 7 для 7 класса.

7. Стол имеет форму квадрата со стороной 1 метр. На нём лежат, не накладываясь, 12 монет радиуса 1 см. Докажите, что можно выбрать 4 различных монеты с центрами A, B, C, D, таким образом, что
$1 \leqslant CD : AB < 1{,}1$ или $1 \leqslant AC : AB < 1{,}1$. (*А. А. Теслер*)

Решение. $12 \cdot 11/2 = 66$ попарных расстояний; значения этих расстояний от 2 до 100 см; если при их упорядочении соседние различаются более чем в 1,1 раз, то плохо, ибо $1{,}1^{65} > 50$ (действительно, $1{,}1^4 = 1{,}4641 > \sqrt{2}$; $1{,}1^8 > 2$; $1{,}1^{48} > 2^6 > 50$).

Критерии. Не обосновано, почему $1{,}1^{65} > 50$ — 5 баллов.

Задачи для 9 класса

1. См. задачу 7 для 6 класса.

2. См. задачу 5 для 5-6 классов.

3. См. задачу 5 для 7 класса.

4. В окружность диаметра 5 вписан треугольник, все стороны которого имеют целые длины. Найдите его периметр (укажите все возможные варианты и докажите, что других нет). (*П. Д. Муленко*)

Ответ: 12.

Решение. Для начала заметим, что египетский треугольник (со сторонами 3, 4, 5) удовлетворяет условию, его периметр равен 12; к тому же он прямоугольный. Теперь впишем в окружность несколько таких треугольников и вычислим некоторые отрезки, используя следующие факты:

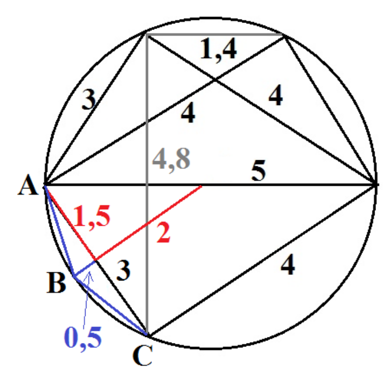
1) Высота египетского треугольника равна $h_c = \frac{2S}{c} = \frac{12}{5} = 2{,}4$.

2) $4{,}8^2 + 1{,}4^2 = 5^2$.

3) Высота, опущенная на хорду длины 3, равна 1,5 как средняя линия в египетском трегольнике.

Теперь можно приступать к перебору треугольников.
Будем сортировать их по двум наибольшим сторонам:

- 5, 5 — не бывает
- 5, 4 $\Rightarrow$ третья сторона 3
- 5, 3 $\Rightarrow$ третья сторона 4
- 5, 2 — не могут быть двумя наибольшими
- 4, 4 $\Rightarrow$ третья сторона 4,8
- 4, 3 $\Rightarrow$ третья сторона 5 или 1,4
- 4, 2 — не могут быть двумя наибольшими
- 3, 3 $\Rightarrow$ третья сторона 4,8
- 3, 2 $\Rightarrow$ третья может быть только 2; но в равнобедренном треугольнике ABC (см. чертёж) боковая сторона меньше 2, поскольку является гипотенузой треугольника с катетами 1,5 и 0,5.



Итак, есть только один подходящий треугольник, и его периметр равен 12.

Существует и такой способ решения: перечисляются всевозможные треугольники со сторонами меньше 5, для каждого из них по формуле Герона определяется площадь, а потом по формуле $R = \frac{abc}{4S}$ — радиус описанной окружности.

Критерии. 1 балл — найден только треугольник 3-4-5. Если есть хотя бы один пропущенный вариант — 5 баллов, каждый следующий потерянный случай — на 1 балл меньше.

5. Существуют ли такие различные натуральные числа a, b, x и y, что x записывается в системе счисления с основанием a точно так же, как y записывается в системе счисления с основанием b, и наоборот (x записывается в системе счисления с основанием b точно так же, как y записывается в системе счисления с основанием a)? (*В. П. Федотов*)

   Ответ: нет.

   Решение. Пусть x записывается в системе с основанием a, а y в системе с основанием b как $\overline{d_k d_{k-1} \ldots d_1 d_0}$. Тогда из первого условия следует, что $x = d_k a^k + \ldots d_0 a^0$, $y = d_k b^k + \ldots d_0 b^0$. Допустим, не умаляя общности, что $a > b$; тогда $x \geqslant y$. Однако из второго условия аналогично получается, что $y \geqslant x$, при этом по условию $x \neq y$.

   Критерии. 5 баллов — если утверждение «если $a > b$, то $x > y$» не обосновано ссылкой на определение системы счисления, а считается интуитивно очевидным или обосновано только примерами.

6. См. задачу 7 для 8 класса.

7. Пусть a и b — два вещественных числа, причём $2a^3 + 2b^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 60ab = 16000$. Найдите все возможные значения $a + b$. (*А. Р. Араб*)

   Ответ: 20.

   Решение. Обозначим разность левой и правой частей через A:

$$A = 2a^3 + 2b^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 60ab - 16000 = 2(a+b)^3 - 3a^2b - 3ab^2 + 60ab - 16000 =$$

$$= 2\big((a+b)^3 - 8000\big) - 3ab(a+b-20) = (a+b-20)(2a^2 + ab + 2b^2 + 40a + 40b + 800).$$

   Поскольку $A = 0$, то либо $a + b = 20$, либо вторая скобка равна нулю. Обозначим вторую скобку через B и представим её в виде квадратного трёхчлена от a:

$$B = 2a^2 + (b+40)a + (2b^2 + 40b + 800).$$

   Найдём дискриминант:

$$D = (b+40)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (2b^2 + 40b + 800) = b^2 + 80b + 1600 - 16b^2 - 320b - 6400 = -15b^2 - 240b - 4800.$$

   Это выражение всегда отрицательно, поскольку его дискриминант $D_1 = 120^2 - 15 \cdot 4800 < 0$. Значит, $B \neq 0$, поэтому $a + b = 20$.

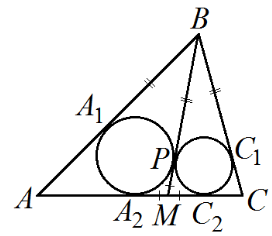
   Критерии. 1 балл — если найден только ответ $a + b = 20$ и не доказано отсутствие других вариантов.

Задачи для 10 –11 классов

1. См. задачу 5 для 5-6 классов.

2. В треугольнике ABC со сторонами $AB = 6$, $BC = 4$, $AC = 8$ на стороне AC отмечена такая точка M, что вписанные окружности треугольников ABM и BCM имеют общую точку. Найдите отношение площадей этих треугольников. (*Л. С. Корешкова*)

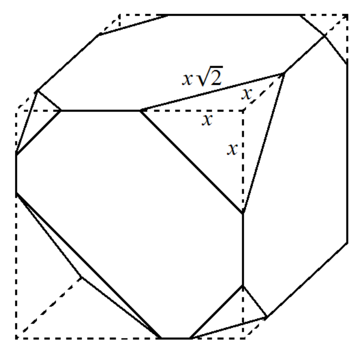
   Ответ: $5 : 3$.

   Решение. Обозначим общую точку касания через P, а остальные точки касания с отрезками AB, BC, CM и AM — через A_1, C_1, C_2 и A_2. Тогда $AM + CM = 8$ и $AM - CM = AB - BC = 2$, потому что $AA_2 = AA_1$, $A_2M = PM = C_2M$, $A_1B = PB = C_1B$ и $CC_1 = CC_2$. Значит, $AM = 5$ и $CM = 3$. Так как треугольники AMB и CMB имеют общую высоту, то их площади относятся как длины оснований, то есть как $5 : 3$.

3. См. задачу 7 для 7 класса.

4. Поверхность деревянного куба с ребром 1 метр покрашена краской. От каждого его угла отпилили пирамиду, в результате остался 14-гранник, все покрашенные грани которого — прямоугольники, а все непокрашенные — правильные треугольники (не обязательно одинаковые). Найдите общую площадь окрашенной поверхности этого 14-гранника, если она в $\sqrt{3}$ раз меньше, чем общая площадь его неокрашенной поверхности. (*А. А. Теслер*)

   Ответ: 1,5 м^2.

   Решение. Заметим сначала, что площадь каждой неокрашенной грани в $\sqrt{3}$ раз меньше, чем окрашенная площадь, срезанная у соответствующей вершины. Действительно, если у отрезанной пирамидки длина бокового ребра равна x, то длина основания равна $x\sqrt{2}$, площадь боковой поверхности — $\frac{3}{2}x^2$, а площадь основания — $(x\sqrt{2})^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$, что в $\sqrt{3}$ раза меньше площади боковой поверхности.
   Таким образом, $S_{\text{окр}} + \sqrt{3}S_{\text{неокр}} = 6\,\text{м}^2$, откуда $S_{\text{окр}} = 1{,}5\,\text{м}^2$.

5. По команде k роботы Девяткин и Десяткин выписывают все натуральные числа от 1 до $37k$. Затем Девяткин ищет среди них число, в десятичной записи которого больше всего цифр 9, а Десяткин — число с наибольшим количеством нулей. Если у кого-то из них нужных цифр окажется больше, то ему присуждают очко. С каким счётом закончится матч, если он состоит из последовательного исполнения команд $k\ldots$ (а) для k от 1 до 2019; (б) для k от 1 до 10^{2019}? (*В. П. Федотов*)

   Ответ: а) 1:0; б) 673:0.

   Решение. а) Девяткин получает очко, когда последнее число равняется 9...9, а Десяткин - вообще никогда. В нужном диапазоне среди чисел, кратных 37, такое всего одно (999).

   б) Заметим, что $10^a - 1$ делится на 37 тогда и только тогда, когда a делится на 3. Действительно, если $a = 3k$, то $10^{3k} - 1 = (10^3 - 1)(10^{3(k-1)} + 10^{3(k-2)} + \ldots + 1)$ делится на $999 = 27 \cdot 37$. Наоборот, если $10^a - 1$ делится на 37 и $a = 3k + s$ для $s = 1, 2$, то $(10^a - 1) - 10^s(10^{3k} - 1)$ тоже делится на 37, то есть $10^s - 1$ делится на 37. Это противоречит тому, что ни 9, ни 99 на 37 не делятся.

   Остаётся найти количество чисел вида $10^{3k} - 1$ в промежутке от 1 до $37 \cdot 10^{2019}$. Понятно, что после 10^{2020} и до 8 их нет, а от 9 до $10^{2020} - 1$ их ровно столько, сколько чисел от 1 до 2020 делится на 3, то есть 673.

Критерии. Если используется без доказательства, что $10^a - 1$ делится на 37 только при $a = 3k$, то максимум 5 баллов.
Решён только пункт а) — 3 балла.

6. Можно ли вместо пропусков поставить семь последовательных натуральных чисел (в каком-то порядке) так, чтобы равенство $(x - \_)(x - \_)(x - \_) = (x - \_)(x - \_)(x - \_) + \_$ выполнялось при всех x? (*А. А. Теслер*)

   Ответ: да.

   Решение. Например, так: $(x-9)(x-13)(x-14) = (x-10)(x-11)(x-15)+12$. На самом деле это единственное решение.

7. Имеются три бассейна. Из первого с постоянной скоростью выливается вода, а во второй и третий бассейны вода поступает с постоянными скоростями. Изначально в первом бассейне было столько же воды, сколько в двух других в сумме; через некоторое время во втором бассейне стало столько же воды, сколько в двух других в сумме; ещё через какое-то время в третьем бассейне стало столько же воды, сколько в первых двух в сумме. Возможно ли, что ни в начале, ни в конце этого промежутка времени ни один из бассейнов не был пустым? (*А. А. Теслер*)

   Ответ: нет.

   Решение. Пусть в i-м бассейне количество воды описывается уравнением A_i+v_it, где t — время. Тогда $A_i > 0$, $v_1 < 0$, $v_2 > 0$, $v_3 > 0$, и по условию есть такие моменты времени $0 < T < T'$, что $A_1 = A_2 + A_3$, $A_2 + v_2T = (A_1 + v_1T) + (A_3 + v_3T)$ и $A_3 + v_3T' = (A_1 + v_1T') + (A_2 + v_2T')$.

   После преобразований получаем уравнения $T = \frac{2A_3}{v_2-v_1-v_3}$ и $T' = \frac{2A_2}{v_3-v_1-v_2}$, причём знаменатели должны быть положительны.

   Неравенство $A_1+Tv_1 > 0$ теперь означает, что $A_3(v_1+v_2-v_3)+A_2(v_2-v_1-v_3) > 0$, а неравенство $A_1 + T'v_1 > 0$ — что $A_2(v_1 + v_3 - v_2) + A_3(v_3 - v_1 - v_2) > 0$. Ясно, что эти неравенства друг другу противоречат.