Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2018–2019 учебный год. Отборочный этап

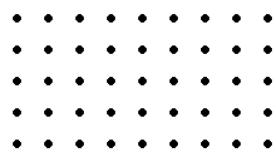
Решения задач отборочного этапа

Задачи для 5 класса

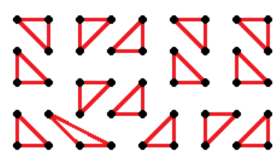
1. Перемножили несколько однозначных чисел, среди которых нет ни двоек, ни пятёрок. Могло ли получиться число, записанное только двойками и пятёрками?

   Решение. Да: $7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 = 252$.

2. Дана сетка 5×9 точек (см. рисунок). Нарисуйте 15 треугольников с вершинами в этих точках так, чтобы эти треугольники не пересекались и даже не соприкасались.

   Решение. Например, так.

3. На ёлке росло вдвое больше шишек, чем на сосне. Вася сбил несколько шишек, и теперь на сосне растёт втрое больше шишек, чем на ёлке. Сможет ли Вася сбить с этих деревьев ещё столько же шишек, сколько уже сбил?

   Решение. Пусть C — количество шишек, изначально росших на сосне, тогда на ёлке росло $2C$ шишек, а всего их было $3C$. После действий Васи на сосне осталось не более C шишек, а на ёлке втрое меньше, то есть не более $\frac{1}{3}C$. Всего осталось не более $1\frac{1}{3} \cdot C$ шишек, то есть меньше половины от исходного количества. Значит, Вася сбил больше половины шишек, поэтому не сможет сбить ещё столько же.

4. Жители Страны Чудес делятся на хоббитов и викингов. Однажды 27 жителей сели за круглый стол так, чтобы растояния между соседями были одинаковыми. Оказалось, что между каждыми двумя хоббитами сидели как минимум два викинга. Докажите, что найдутся три викинга, сидящих на равных расстояниях друг от друга.

   Решение. Если между каждыми двумя соседними хоббитами ровно два викинга, то это очевидно (например, первый, седьмой и тринадцатый викинги образуют равносторонний треугольник).

   В противном случае хоббиты занимают меньше трети всех мест, то есть их меньше 9. Заметим, что 27 мест за круглым столом можно поделить на 9 групп, образующих равносторонний треугольник. Поскольку хоббитов меньше 9, то в какой-то из этих групп все трое — викинги.

5. Числа от 1 до 49 расставлены в клетках квадрата 7×7 так, что количество нечётных чисел в любых двух строчках было различным. Может ли оказаться, что количество нечётных чисел в любых двух столбцах тоже различно?

   Решение. Среди чисел от 1 до 49 ровно 25 нечётных. Возможные количества нечётных чисел в строчках: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Чтобы семь из этих чисел имели сумму 25, надо исключить 3. Значит, есть как строчка с 0 нечётных чисел, так и строчка с 7 нечётными числами. То же верно и для столбцов. Но если в одной из строк все числа чётные, то не может быть столбца, в котором все числа нечётные.

   Ответ: нет.

6. Марк предлагает Вере сыграть в такую игру. Сначала Вера выбирает, кто из них сделает первый ход. Затем они по очереди записывают по одной любой цифре от 1 до 9. Повторять цифры нельзя. Если в какой-то момент окажется, что какие-то две из записанных цифр в сумме дают третью (уже записанную), то проигравшим считается игрок, допустивший такую ситуацию. Что должна сделать Вера, чтобы выиграть?

   Решение. Вера ходит первой и записывает 9. Далее она может в ответ на 1, 2, 4 или 5 записать 3, в ответ на 3 — 2, в ответ на 6 — 7, в ответ на 7 — 6, в ответ на 8 — 4. После этого для любого хода Марка найдётся ход Веры, завершающий партию (это легко установить перебором).

7. В банкомате лежат купюры в 100, 200, 500, 1000, 2000 и 5000 рублей. У Васи есть карточка, на которой лежит 10000 рублей. Вася хочет снять с карточки деньги, потом перейти к автомату по продаже билетов и купить в нём билет. Про билет Васе известно, что его цена делится на 100 рублей и что она не больше 10000 рублей. Автомат по продаже билетов сдачи не выдаёт. Может ли Вася снять деньги в банкомате не более чем в два приёма так, чтобы потом гарантированно купить билет? (Снимая деньги в банкомате, Вася может указать сумму, но не может повлиять на то, какими купюрами она будет выдана.)

   Решение. Чтобы точно купить билет, надо иметь 100-рублёвку (вдруг он стоит 100 или 300 рублей). При этом гарантировать наличие 100-рублёвой купюры в снимаемой сумме можно, только если сняты 100 или 300 рублей. Но суммарно за два раза надо снять все 10000 рублей (вдруг билет стоит 10000 рублей). Значит, вторым заходом сняты 9700 или 9900 рублей.

   Но тогда Васе могут достаться купюры 5000, 2000, 2000 и ещё какие-то общей суммой 1000 рублей. С таким набором невозможно купить билет стоимостью, например, 1500 рублей.

   Ответ: нет.

Задачи для 6 класса

1. См. задачу 5.1.

2. См. задачу 5.3.

3. См. задачу 5.4.

4. См. задачу 5.5.

5. Для каждого четырёхзначного числа без нулей в записи можно перечислить все перестановки цифр, включая само число, по возрастанию. Например, для числа 3433 получится такой список: 3334, 3343, 3433, 4333. Назовём число несчастным, если оно стоит в своём списке на 13-м месте. Сколько существует несчастных чисел?

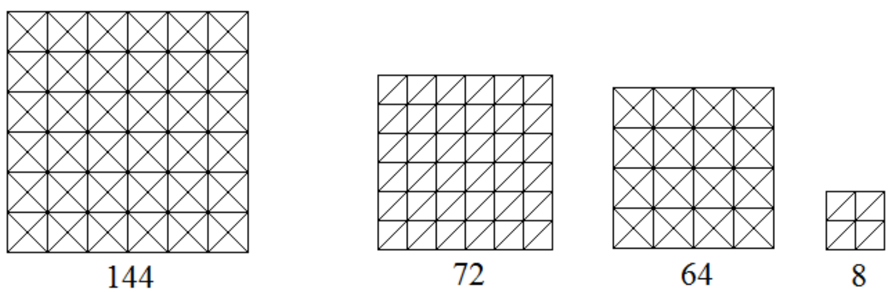
   Решение. Если в числе хотя бы две цифры совпадают, то список перестановок содержит меньше 13 чисел (например, если две цифры совпадают, а остальные различны, то перестановок 12; в остальных случаях — ещё меньше). Значит, в каждом числе все цифры разные. Таких чисел $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$, они образуют группы по 24, и в каждой группе одно число нам подходит. Значит, нужных нам чисел $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6/24$.

   Ответ: $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6/24 = 126$.

6. См. задачу 5.7.

7. Можно ли разрезать квадрат на 144 равных части и составить из них три квадрата, среди которых нет двух равных?

   Решение. Да. Режем на 36 квадратов, а каждый из них на 4 равнобедренных прямоугольных треугольника. Далее пользуемся тем, что можно составить квадрат как из двух, так и из четырёх таких треугольников, и тем, что $144 = 2 \cdot 36 + 4 \cdot 16 + 2 \cdot 4$.



Задачи для 7 класса

1. В пятизначном числе, не содержащем нулей, стёрли первую цифру, и оно уменьшилось в целое количество раз. В оставшемся числе снова стёрли первую цифру, и оно опять уменьшилось в целое количество раз. Потом первую цифру стирали ещё дважды, и каждый раз число уменьшалось в целое количество раз. Приведите пример исходного числа.

   Решение. Например, 53125 или 91125.

2. См. задачу 5.4.

3. Число представимо в виде суммы 8 простых чисел, но не представимо в виде суммы 8 составных чисел. А представимо ли это число в виде произведения простого числа на составное?

   Решение. Минимальное составное число равно 4, поэтому минимальное число, представимое в виде суммы 8 составных чисел, равно $4 \cdot 8 = 32$. Меньшие числа не могут быть представлены таким способом.

   Рассмотрим, например, числа 16 и 17. Каждое из них может быть представлено в виде суммы восьми простых чисел ($16 = 8 \cdot 2$, $17 = 7 \cdot 2 + 3$), но не может быть представлено в виде суммы восьми составных (см. выше). При этом 16 представимо в виде произведения простого на составное ($16 = 8 \cdot 2$), а 17 — нет.

Ответ: может быть как представимо, так и не представимо.

4. См. задачу 5.5.

5. Для каждого четырёхзначного числа без нулей в записи можно перечислить все перестановки цифр, включая само число, по возрастанию. Например, для числа 3433 получится такой список: 3334, 3343, 3433, 4333. Назовём число отличным, если оно стоит в своём списке на пятом месте. Сколько существует отличных чисел?

   Решение. Существуют три типа чисел, у которых не менее 5 перестановок цифр.
   а) Все цифры разные. Их $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$, они образуют группы по 24, и в каждой группе одно число нам подходит. Значит, таких чисел $\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{24}$, или C_9^4.
   б) Две совпадающих цифры, остальные разные. Такие числа образуют $9 \cdot \frac{8 \cdot 7}{2}$ (или $C_9^3 \cdot 3$) групп, в каждой из них нам подходит одно число.
   в) Две пары совпадающих цифр. Таких групп $\frac{9 \cdot 8}{2} = C_9^2$, в каждой подходит одно число.
   Остальные типы чисел дают менее 5 перестановок.

   Ответ: $C_9^4 + C_9^3 \cdot 3 + C_9^2 = 126 + 252 + 36 = 414$.

6. Три коллекционера картин A, B и C выставили часть своих картин на аукцион. A выставил 3% своих картин, B — 7%, C — 20%. B купил все картины, выставленные A, C — выставленные B, A — выставленные C. Какое наименьшее (ненулевое) количество картин могло быть выставлено на аукцион, если количество картин у каждого коллекционера не изменилось?

   Решение. Пусть у A было a картин, у B — b, у C — c.
   A выставил 0,03a картин, B — 0,07b, C —$0,2c$. После того, как они выставили свои картины, у них осталось 0,97a, 0,93b и 0,8c соответственно.

   $0,97a + 0,2c = a, \quad 0,93b + 0,03a = b, \quad 0,8c + 0,07b = c;$

   $0,2c = 0,03a, \quad 0,03a = 0,07b, \quad 0,07b = 0,2c.$

   Чтобы a было целым, b дожно быть кратным 3. Минимально возможное b равно 3. Кроме того, 0,07b дожно также быть целым, поэтому минимальное b равно 300. Тогда минимальное a равно $7 \cdot 300/3 = 700$ (0,03$a = 21$, целое). Минимальное $c = 7 \cdot 300/20 = 105$. ($105 \cdot 0,2 = 21$, целое).

   Ответ: $21 \cdot 3 = 63$ картины.

7. См. задачу 6.7.

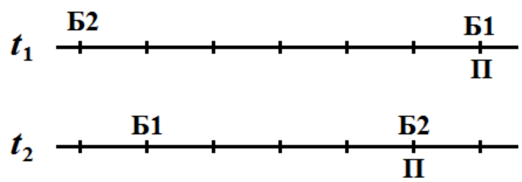
Задачи для 8 класса

1. См. задачу 7.1.

2. См. задачу 5.4.

3. Сто баранов бегут в ряд на расстоянии 6 метров друг от друга со скоростью 5 км/ч. Навстречу им со скоростью 1 км/ч идет пастух, который при встрече с бараном мгновенно разворачивает его в противоположном направлении, и тот продолжает бежать с прежней скоростью. Найдите расстояние между баранами при их обратном движении.

Решение. Пусть t_1 — момент встречи пастуха с первым бараном, а t_2 — со вторым. В момент t_1 расстояние между пастухом и вторым бараном равнялось 6 м, то есть за время $t_2 - t_1$ они сблизились на 6 метров. Поскольку баран быстрее пастуха в 5 раз, то баран преодолел 5 метров, а пастух — 1 метр. К тому же за это время первый баран тоже пробежал 5 метров в обратном направлении. Таким образом, в момент t_2 действующие лица расположены как на втором рисунке. Видим, что расстояние между первым и вторым баранами стало равно 4 метра. Поскольку после этого они бегут друг за другом с одной скоростью, то оно будет сохраняться и дальше. То же верно и для любых двух соседних баранов.



Ответ: 4 метра.

4. См. задачу 7.6.

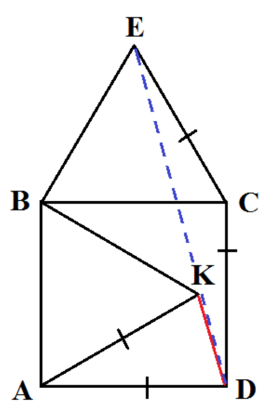
5. На сторонах AB и BC квадрата $ABCD$ построены равносторонние треугольники ABK и BCE, причём точка K лежит внутри квадрата, а точка E — вне его. Докажите, что K лежит на отрезке DE.

   Решение. Достаточно доказать, что $\angle KDC = \angle EDC$. Для этого вычислим каждый из этих углов.

   1) $\triangle DAK$ равнобедренный, $\angle DAK = 90° - 60° = 30°$, поэтому $\angle ADK = \frac{180°-30°}{2} = 75°$, откуда $\angle KDC = 90° - 75° = 15°$.

   2) $\triangle ECD$ равнобедренный, $\angle ECD = 90° + 60° = 150°$, поэтому $\angle EDC = \frac{180°-150°}{2} = 15°$.

   Итак, $\angle KDC = \angle EDC$, поэтому лучи DK и DE совпадают. Очевидно, $DK < DE$, поэтому K лежит на отрезке DE.



6. См. задачу 6.7.

7. В теннисном турнире участвовали n игроков, причём каждый с каждым сыграл по одному матчу. Для какого минимального n в любом таком турнире найдутся 4 игрока X, Y, Z и T таких, что X обыграл Y, Z и T; Y обыграл Z и T; Z обыграл T?

   Решение. В турнире из 8 человек такая ситуация точно будет: один участник точно обыграет минимум четверых участников — это X; среди этих четверых кто-то точно обыграет двоих — это Y; между этими двумя будет партия, и тот, кто выиграет, будет Z, проигравший — T.

Напротив, в турнире для 7 человек возможна иная ситуация. Пример таблицы с таким турниром (1 обозначает победу участника из столбца слева над соответствующим участником из строки сверху, а 0 — поражение):

	A	B	C	D	E	F	G
A		1	1	0	1	0	0
B	0		1	1	0	1	0
C	0	0		1	1	0	1
D	1	0	0		1	1	0
E	0	1	0	0		1	1
F	1	0	1	0	0		1
G	1	1	0	1	0	0	

Задачи для 9 класса

1. См. задачу 7.1.

2. Кирилл придумал два квадратных трёхчлена, корнями которых являются натуральные числа. Потом он сложил их и обнаружил, что корнями суммарного трёхчлена тоже являются натуральные числа. Могут ли все шесть корней оказаться различными?

   Решение. Да, например: $x^2 - 6x + 8 = 0$ (корни равны 2 и 4), $x^2 - 28x + 132 = 0$ (корни равны 6 и 22).
   Сложим уравнения: $2x^2 - 34x + 140 = 0 \iff x^2 - 17x + 70 = 0$ (корни равны 7 и 10).

3. См. задачу 8.3.

4. См. задачу 8.5.

5. Назовём популярностью цифры количество чисел из набора $2^0, 2^1, 2^2, \ldots, 2^{999999}$, которые начинаются с этой цифры. Докажите, что популярность каких-то двух ненулевых цифр различается не менее чем в 5 раз.

   Решение. Заметим, что 2^n начинается с единицы тогда и только тогда, когда 2^{n-1} начинается с 5, 6, 7, 8 или 9. Значит, каждой степени двойки, начинающейся с 5, 6, 7, 8 или 9, можно сопоставить другую, начинающуюся на 1. (Если 2^{999999} начинается на одну из цифр от 5 до 9, то $2^{1000000}$, которое должно ему соответствовать, не входит в диапазон; но в этом случае числу 2^{999999} можно сопоставить 2^0).

   Итак, популярность единицы равна сумме популярностей цифр от 5 до 9 (или даже на 1 меньше). Значит, наименьшая из популярностей цифр 5, 6, 7, 8, 9 хотя бы в 5 раз меньше, чем популярность цифры 1.

6. Диагонали выпуклого четырёхугольника перпендикулярны. Могут ли его стороны выражаться четырьмя последовательными целыми числами?

   Решение. Из теоремы Пифагора следует, что суммы квадратов противоположных сторон такого четырёхугольника равны: если одна диагональ делится на части x и y, а вторая — на части z и t, то квадраты сторон равны $x^2 + t^2$, $t^2 + y^2$, $y^2 + z^2$, $z^2 + x^2$.

Пусть стороны равны n, $n+1$, $n+2$, $n+3$. Тогда $n^2+(n+3)^2=(n+1)^2+(n+2)^2$ (варианты $n^2+(n+2)^2=(n+1)^2+(n+3)^2$ и $n^2+(n+1)^2=(n+2)^2+(n+3)^2$ невозможны, поскольку в них левая часть меньше правой).

Раскрывая скобки, получаем: $2n^2+6n+9=2n^2+6n+5$, что невозможно.

7. См. задачу 8.7.

Задачи для 10 класса

1. Существуют ли три различных квадратных трёхчлена, произведение любых двух из которых делится на третий?

   Решение. Существуют. Например, $(x-1)(x-2)$, $(x-1)(x-3)$ и $(x-2)(x-3)$.

2. См. задачу 5.5.

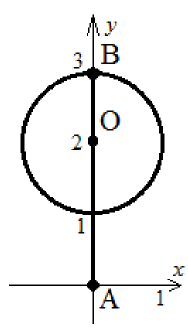
3. Постройте множество точек на координатной плоскости, для которых выражение

$$\left(x^2+y^2-4y+3\right)^2\left(3-\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{x^2+(y-3)^2}\,\right)$$

   принимает максимально возможное значение.

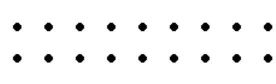
   Решение. Заметим, что $\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-3)^2}\leqslant 3$, поскольку это сумма расстояний от точки (x,y) до точек $A(0,0)$ и $B(0,3)$. Значит, второй сомножитель всегда неположителен, причём нулю равен только для точек отрезка AB.

   Первый сомножитель является квадратом, поэтому неотрицателен. Значит, максимум всего выражения равен 0, и он достигается при обнулении одного из сомножителей. Первый сомножитель, если его переписать в виде $\left(x^2+(y-2)^2-1\right)^2$, обнуляется на окружности радиуса 1 с центром $O(0,2)$, а второй — на уже упомянутом отрезке AB. Объединение окружности и отрезка — буква Ф — и является ответом.



4. См. задачу 9.5.

5. Дана сетка $m\times n$ точек, причём общее количество точек делится на 3 (например, на рисунке показана сетка 3×9). При каких m и n нельзя нарисовать $\frac{mn}{3}$ треугольников с вершинами в этих точках так, чтобы треугольники не пересекались и даже не соприкасались?

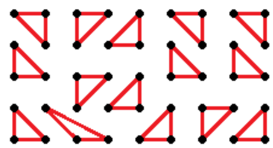


   Решение. Не умаляя общности, m делится на 3.

Случай 1: если n чётное, то всё разбивается на прямоугольники 3×2, для которых треугольники рисуются тривиально.

Случай 2: если $m = 3$ и n нечётное, то нельзя. Раскрасим точки в 4 цвета (в соответствии с чётностью каждой из координат). Получим $n + 1$ точку одного из цветов, поэтому какие-то две из них — вершины одного треугольника. Но тогда его сторона содержит ещё одну точку сетки.

В оставшихся случаях можно доказать существование треугольников индукцией по нечётным n. Переход в этой индукции тривиален, база $n = 3$ при чётном m (случай 3) и $n = 5$ при нечётном $m \geqslant 9$ (случай 4). Эта вторая база строится индукцией по m с шагом 6, начиная с прямоугольника 5×9 (разбиение для него показано на рисунке).



Ответ: при $n = 1$; при $m = 1$; при $m = 3$ и нечётном n; при $n = 3$ и нечётном m.

6. Биссектрисы AK, BL, CM треугольника ABC пересекаются в точке I. Докажите, что

$$\frac{IK}{IA} + \frac{IL}{IB} + \frac{IM}{IC} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Решение. Так как BI — биссектриса треугольника ABK, то $\dfrac{IK}{IA} = \dfrac{BK}{BA}$, и аналогично $\dfrac{IK}{IA} = \dfrac{CK}{CA}$. Отсюда чисто алгебраически получается, что $\dfrac{IK}{IA} = \dfrac{BC}{AB + CA}$. Складывая эти равенства для всех сторон, получим, что нам нужно доказать

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Это сводится к неравенству

$$2(a^3 + b^3 + c^3) \geqslant a^2b + a^2c + b^2c + b^2a + c^2a + c^2b,$$

что является частным случаем неравенства Мюрхеда: разность левой и правой части можно представить в виде $(b - c)(b^2 - c^2) + \ldots$, где все слагаемые по очевидной причине неотрицательны.

Другой способ: перепишем неравенство в виде

$$(a + b + c)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) \geqslant \frac{9}{2}.$$

После замены $x = b + c$, $y = c + a$, $z = a + b$ это сведётся к

$$\frac{x+y+z}{3} \geqslant \frac{3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}},$$

что является классическим неравенством между средним арифметическим и средним гармоническим.

7. Есть сто чисел, изначально равных нулю. За один ход можно выбрать 9 чисел и уменьшить одно из них на 1, второе на 2, третье на 3, … восьмое на 8, но зато девятое увеличить на 9. Какое наибольшее количество чисел можно сделать положительными с помощью таких операций?

   Решение. Рассмотрим 9 чисел. Из них можно увеличить четыре и уменьшить пять такими действиями:
$$\begin{array}{ccccccccc} -8 & -7 & -6 & -5 & -4 & -3 & -2 & -1 & +9 \\ -8 & -7 & -6 & -5 & -4 & -2 & -1 & +9 & +3 \\ -8 & -7 & -6 & -5 & -4 & -1 & +9 & -3 & -2 \\ -8 & -7 & -6 & -5 & -4 & +9 & -1 & -2 & +3. \end{array}$$

   Если выбрать пять чисел, которые всё время уменьшать, то остальные 95 можно увеличить (делить на четвёрки и добавлять к пятёрке уменьшаемых; какие-то числа побывают сразу в нескольких четвёрках, это не страшно).

   Значит, можно сделать 95 чисел положительными. Больше — нельзя. Действительно, за n операций общая сумма уменьшится на $27n$, а сумма четырёх любых чисел уменьшится на более чем на $(8+7+6+5)n = 26n$, поэтому не может быть, чтобы 96 чисел увеличились.

Задачи для 11 класса

1. Найдите два положительных числа, если квадрат первого из них в 16 раз больше куба второго, а квадрат второго числа в 2 раза меньше куба первого.

   Решение. Составим систему уравнений: $x^2 = 16y^3$, $y^2 = \dfrac{x^3}{2}$.
   С учётом положительности x и y получаем: $x = 4y^{1,5}$, откуда
   $y^2 = 32y^{4,5}$; $\quad 4^{2,5} \cdot y^{2,5} = 1$; $\quad y = \dfrac{1}{4}$.
   Далее получаем $x^2 = 16y^3 = \dfrac{16}{64}$, откуда $x = \dfrac{1}{2}$.

   Ответ: $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{4}$.

2. См. задачу 5.5.

3. См. задачу 9.5.

4. См. задачу 10.5.

5. См. задачу 10.6.

6. См. задачу 10.7.

7. Приведите пример многогранника, проекции которого на три координатных плоскости — правильный треугольник, правильный четырёхугольник и правильный шестиугольник. Укажите координаты каждой из вершин многогранника, приведите список его рёбер и граней.

   Решение. Возьмём правильный шестиугольник $ABCDEF$ с вершинами $A = (1,0,0)$, $B = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$, $C = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$, $D = (-1,0,0)$, $E = (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ и $F = (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$. Теперь построим вертикальный квадрат, у которого две вершины являются серединами BC и EF, а оставшиеся две вершины имеют координаты $P = (0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3})$ и $Q = (0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3})$.

В качестве искомого многогранника можно взять выпуклую оболочку этих 8 точек. Рёбрами будут отрезки AB, BC, CD, DE, EF, FA; PA, PB, PC, PD; QD, QE, QF, QA и ещё PQ. Гранями — шестиугольное основание $ABCDEF$ и восемь треугольников: APQ, DPQ, ABP, BCP, CDP, DEQ, EFQ и FAQ. Этот многогранник действительно подходит: его проекция на Oxy будет правильным шестиугольником с диагоналями 2 и $\sqrt{3}$, на Oyz — квадратом высоты $\sqrt{3}$, а на Oxz — правильным треугольником с высотой $\sqrt{3}$ и основанием 2. Возможны и другие конструкции.