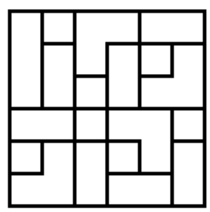
Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2017–2018 учебный год. Отборочный этап

Решения и критерии проверки

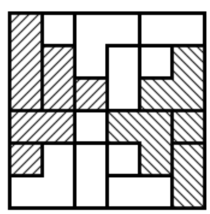
Каждая задача оценивается в 7 баллов. Наиболее распространённые промежуточные оценки — 2 балла (задача не решена, но есть существенные продвижения) и 5 баллов (задача в целом решена, но есть существенные недостатки). Если продвижения (или недостатки) невелики, то решение может оцениваться в 1 балл (соответственно, в 6 баллов). Оценка в 3 балла возможна для очень больших продвижений, которые, тем не менее, не являются решением задачи. Оценки в 3 и особенно в 4 балла ставятся довольно редко.

Задачи для 5 класса

1. Покажите, как разрезать этот квадрат на четыре части одинаковой формы и размера, если резать можно только по проведённым линиям.



Решение.



Критерии. Правильно выбрана одна фигура, но не показано разделение или оно неправильное — 2 балла.

2. Существуют ли такие различные натуральные числа a и b, что a кратно b, $a+1$ кратно $b+1$, $a+2$ кратно $b+2$?

Решение. Да, например, $a = 26$ и $b = 2$: $26 \vdots 2$, $27 \vdots 3$, $28 \vdots 4$.

Критерии. В качестве решения достаточно привести два числа и/или проверку, что они подходят (то есть, достаточно того, что написано в решении **до** и/или **после** двоеточия).

Если верный пример присутствует, но отсутствует проверка (то есть, написано только $26 \vdots 2$ или $26 : 2 = 13$) — ставим 2 балла.

Если верный пример присутствует, но указано, что он неверный (даже если написан еще один верный пример, обозначенный верным) — ставим 2 балла, так как в 5 классе человек уже должен уметь делить.

Если перепутаны местами a и b — вычитаем 2 балла (но если не написано, где a и где b, то баллов не снимаем).

Если забыты скобки (то есть, пишется что-то вроде $7+1 \vdots 1+1$) — вычитаем 1 балл.

Если помимо «подходящего» примера приведены какие-либо неправильные (и не указано явно, что они неверные) — вычитаем еще 2 балла.

3. В магазине игрушек продаются синие автомобили, синие автобусы, синие корабли и зелёные поезда. Купив несколько игрушек, Рома обнаружил, что в его покупке половину синих игрушек составляют автомобили, а половину сухопутных транспортных средств — автобусы. Сколько кораблей купил Рома?

   Решение. 1) Половину синих игрушек составляют автомобили, значит, автомобилей столько же, сколько автобусов и кораблей вместе.
   2) Половину сухопутных транспортных средств составляют автобусы, значит, автобусов столько же, сколько автомобилей и поездов вместе.
   3) Предположим, что есть хотя бы один корабль. Тогда из первого пункта следует, что автомобилей больше, чем автобусов, а из второго — что автомобилей не больше, чем автобусов. Противоречие.

   Ответ: 0 кораблей.

   Критерии. По 1 баллу за каждый из пунктов 1 и 2.

4. Оставшись дома один, Андрей прислушивался к каплям, которые через равные промежутки времени падали из почти закрытого крана, со звоном ударяясь о раковину. Между первым и предпоследним ударами прошло 48 минут, а между пятым и последним ударами — 44 минуты. Сколько всего ударов услышал Андрей?

   Решение. 1) Из условия получается, что за 4 минуты Андрей слышит 3 удара.
   2) То есть время между двумя ударами $t = 4/3$ мин $=$ 1 мин 20 сек.
   3) Тогда за 48 минут прошло 36 промежутков, то есть Андрей услышал 37 ударов.
   4) А значит, всего ударов было $37 + 1 = 38$.

   Критерии. Верно указан ответ (даже без обоснований) — 1 балл.

   Верно указан промежуток времени между ударами (даже без обоснований) — ещё 1 балл.

   Если это всё ещё и обосновано, то суммарно 3 балла.

   Решение почти верное, но не учтено, что ударов на 1 больше, чем промежутков, — 5 баллов.

5. Назовём натуральное число хорошим, если все цифры, входящие в его запись, повторяются в ней хотя бы дважды (например, 1522521 — хорошее, 1522522 — нет). Сколько существует трёхзначных хороших чисел без нуля в записи?

   Решение. Варианты трехзначных хороших чисел — это только $\overline{aaa}$: $111, 222, \ldots, 999$. Другие не подходят, поскольку если в числе встречаются хотя бы две разных цифры и каждая хотя бы дважды, то в нём больше трёх цифр. Ответ: 9.

   Критерии. Правильный ответ (9) без обоснования — ставим 1 балл.
   Если рассмотрены лишние варианты — вычитаем 2 балла.
   Если не объяснено, почему других вариантов быть не может — вычитаем 1 балл.
   Если не правильно посчитано кол-во вариантов чисел $\overline{aaa}$ — вычитаем 2 балла.

   Таким образом, решение «их 9: это числа $111, 222, \ldots, 999$» даёт 6 баллов.

6. Прямоугольный лист 210 мм $\times$ 300 мм требуется разрезать без остатка на прямоугольники одинакового размера, у которых длина будет вдвое больше ширины. Какой может быть максимальная площадь одного такого прямоугольника? Докажите, что она максимальна.

Решение. Разбиение на доминошки можно довести до разбиения на клеточки. Поэтому длина каждой стороны листа должна быть кратна стороне клетки. Максимально возможная сторона клетки — это НОД сторон листа, т.е. 30 мм. Значит, площадь доминошки 1800 мм^2.

Критерии. Только ответ — 1 балл. За идею, что меньшая сторона должна делить размеры листа — прибавляем 1 балл.
Не объяснено, почему меньшая сторона должна делиться на размер листа, — минус 2 балла. (Достаточное объяснение: «разбиение на доминошки можно довести до разбиения на клетки».)

7. Все существа на планете Пандора делятся на рыцарей (говорящих только правду), лжецов (говорящих только ложь) и животных (не говорящих ничего). Как-то раз семеро жителей Пандоры (А, Б, В, Г, Д, Е, Ж) произнесли по фразе.
А: «Б и Г — лжецы».
Б: «На Пандоре живут белые львы».
В: «Среди нас семерых ровно два рыцаря».
Г: «На Пандоре нет ни белых львов, ни зелёных тигров».
Д: «Мы с А оба лжецы».
Е: «На Пандоре больше зелёных тигров, чем золотых носорогов».
Ж: «Среди нас семерых ровно 5 лжецов».
Установите, есть ли на Пандоре золотые носороги.

Решение. 1) Д лжёт (если бы он был рыцарем, то он был бы лжецом).
2) Поскольку фраза Д неверна, то А должен быть рыцарем.
3) А — рыцарь $\Rightarrow$ Б и Г — лжецы.
4) Б — лжец $\Rightarrow$ на Пандоре нет белых львов.
5) Г — лжец $\Rightarrow$ зелёные тигры на Пандоре есть.

Итак, А — рыцарь, Б, Г, Д — лжецы, зелёные тигры есть.

6) В и Ж утверждают одно и то же: «ровно два рыцаря». Но если они оба говорят правду, то рыцарей хотя бы трое (А, В, Ж). Значит, они оба лжецы.
7) Значит, рыцарей не два, поэтому оставшийся Е — лжец.
8) Значит, зелёных тигров не больше, чем золотых носорогов. А раз зелёные тигры есть, то золотые носороги тоже есть.

Критерии. Ответ без обоснования — 0 баллов. Но если указано (верно, но без доказательства), кто при этом рыцарь, а кто лжец, то 1 балл.

За достижение каждого из ключевых утверждений (2, 5 и 8) — прибавляем 2 балла.

8. Род Собакиных основан неким Тимофеем Собакиным. Известно, что никто из мужчин этого рода не умирал до 30 лет. А ещё у каждого мужчины в этом роду было 2 или 3 сына, причём каждый сын рождался, когда отцу уже было 25 лет, но ещё не исполнилось 30. Сейчас в роду Собакиных 125 мужчин (не считая умерших). В каком веке родился Тимофей Собакин?

Решение. Рассмотрим два крайних случая развития ситуации.

(a) Медленное рождение — 2 ребёнка в 30 лет:

$$\begin{aligned}
0 :& 1\\
30 :& 1+2=3\\
60 :& 1+2+4=7\\
90 :& 1+2+4+8=15\\
120 :& 1+2+4+8+16=31\\
150 :& 1+2+4+8+16+32=63\\
180 :& 1+2+4+8+16+32+64=127\\
210 :& 1+2+4+8+16+32+64+128=255
\end{aligned}$$

Значит, через 210 лет после рождения Тимофея будут живы как минимум 128 Собакиных — представителей последнего поколения. Таким образом, Тимофей родился **не раньше** 1807 года.

(b) Быстрое развитие — 3 ребёнка в 25 лет:

$$\begin{aligned}
0 :& 1\\
25 :& 1+3=4\\
50 :& 1+3+9=13\\
75 :& 1+3+9+27=40\\
100 :& 1+3+9+27+81=121\\
125 :& 1+3+9+27+81+243=364
\end{aligned}$$

Таким образом, даже при самом быстром размножении и если никто не умирает, 125-й потомок может появиться не ранее чем через 125 лет, то есть Тимофей Собакин родился **не позже** 1892 года.

Ответ: в XIX веке.

Критерии. Правильный ответ — 1 балл.
За каждый верно разобранный случай — прибавляем 3 балла.

Задачи для 6 класса

1. См. задачу 1 для 5 класса.

2. См. задачу 3 для 5 класса.

3. См. задачу 4 для 5 класса.

4. Можно ли в таблице из 5 строк и 6 столбцов разместить числа от 1 до 30 (каждое по одному разу) так, чтобы в каждом столбце сумма была меньше, чем в каждой строке?

   Решение. Можно. Например, так.

1	10	11	20	21	30
29	2	9	12	19	22
23	28	3	8	13	18
17	24	27	4	7	14
15	16	25	26	5	6

Здесь сумма в каждой строке 93, а в столбцах — 85, 80, 75, 70, 65, 90.

5. Назовём натуральное число хорошим, если все цифры, входящие в его запись, повторяются в ней хотя бы дважды (например, 1522521 — хорошее, 1522522 — нет). Сколько существует четырёхзначных хороших чисел без нуля в записи?

   Решение. Существуют 2 типа таких чисел:

   а) Числа, в которых две цифры одного вида и две другого. Существует $\frac{9 \cdot 8}{2} = 36$ способов выбрать две цифры a и b ($a < b$) и для каждого из них $C_4^2 = 6$ способов составить число. Заметим, что варианты с $a > b$ приводят к тем же самым числам.

   б) Числа, в которых все цифры одинаковы. Их 9.

   Ответ: $36 \cdot C_4^2 + 9 = 225$.

   Критерии. Не учтено, что варианты $a < b$ и $a > b$ приводят к одним и тем же числам — минус 2 балла.
   Числа из четырёх одинаковых цифр не учтены или некорректно учтены вместе с числами из пункта (а) — минус 2 балла.
   Наряду с верными случаями рассмотрены лишние — минус 2 балла.
   Ответ можно оставить в виде формулы. Но если уж он посчитан и посчитан неверно, то минус 1 балл.
   Верный ответ в виде разумной формулы без дальнейших обоснований — 2 балла.

6. Прямоугольный лист 210 мм × 297 мм требуется разрезать без остатка на прямоугольники одинакового размера, у которых длина будет вдвое больше ширины. Какой может быть максимальная площадь одного такого прямоугольника? Докажите, что она максимальна.

   Решение. Разбиение на доминошки можно довести до разбиения на клеточки. Поэтому надо понять, каков максимально возможный размер клеточки. А он равен НОД(210, 297)=3 миллиметра. Значит, площадь доминошки 18 мм^2.

   Критерии. См. критерии к задаче 6 для 5 класса.

7. См. задачу 8 для 5 класса.

8. В одном парке есть бамбук, который каждую ночь с незапамятных времён становится выше на одну и ту же величину. Каждый день садовник отрезает от него целое количество метров так, чтобы оставшаяся часть имела высоту менее метра. Длину отрезанной части он записывает в специальную тетрадь.
   а) Возможно ли, чтобы за десять последовательных дней в тетрадь были записаны (именно в этом порядке) десять таких чисел: $7, 7, 7, 6, 7, 7, 6, 7, 7, 7$?
   б) А возможна ли такая последовательность: $7, 7, 7, 6, 7, 6, 7, 7, 6, 7$?
   В каждом случае обоснуйте ответ.

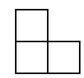
   Решение. а) Да, можно подобрать параметры. Например, пусть изначальная высота равна 0.95, а прирост за день 6.72. Тогда высота после каждой ночи: 7.67, 7.39, 7.11, 6.83, 7.55, 7.27, 6.99, 7.71, 7.43, 7.15, 6.87, 7.59.

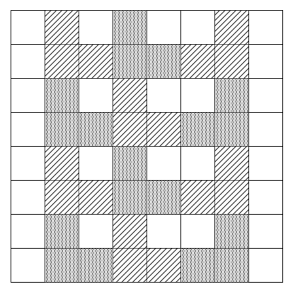
б) Нет. За первые три дня бамбук вырос более чем на 20 метров (потому что изначально был менее одного метра, а через три дня с него суммарно срезали 21 метр; значит, прирост более 20 метров). Но с четвёртого по шестой день бамбук вырос менее чем на 20 метров (с него срезали 19 метров, осталось менее одного, значит, прирост меньше 20).

Критерии. Полностью верно решённая задача — 7 баллов.
Пункт А оценивается в 2 балла, в нём достаточно привести примеры начальных параметров.
Второй пункт в 5 баллов. Если просто написано «За первые три дня бамбук вырос более чем на 20 метров, а за следующие три — менее чем на 20» (без обоснования) — снимаем 2 балла.

Задачи для 7 класса

1. Покажите, как вырезать 12 трёхклеточных «уголков» (см. рисунок) из доски 8×8 так, чтобы из оставшейся части доски нельзя было вырезать больше ни одного уголка. Уголки можно поворачивать.





Решение.

2. Придумайте 7 различных натуральных чисел, сумма которых равна их наименьшему общему кратному.

Решение. Например, 1, 2, 3, 4, 5, 15, 30.

Критерии. Верный набор чисел — 7 баллов. Указывать их сумму и НОК не требуется.

3. На стороне CD квадрата $ABCD$ отмечена точка E. Биссектрисы углов EAB и EAD пересекают стороны BC и CD в точках M и N соответственно. На луче AE отмечена такая точка F, что $AF = AB$. Докажите, что F лежит на прямой MN.

Решение. Треугольники MAB и MAF равны по первому признаку. Поскольку $\angle MBA = 90°$, то и $\angle MFA = 90°$. Аналогично $\angle NFA = 90°$, итого $\angle MFN = 180°$.

Критерии. За отсутствие объяснения какого-либо неочевидного факта снимается 1–2 балла.

4. Назовём натуральное число хорошим, если все цифры, входящие в его запись, повторяются в ней хотя бы дважды (например, 1522521 — хорошее, 1522522 — нет). Сколько существует пятизначных хороших чисел без нуля в записи?

Решение. Возможны следующие типы подходящих чисел:

а) Состоит из двух различных цифр (одна повторяется 2, раза другая 3). Допустим, a повторяется дважды, b — трижды. Всего $9 \cdot 8 = 72$ способа выбрать цифры a и b. Вычислим количество вариантов чисел, которые можно составить из одной пары цифр: оно равно $5!/(3! \cdot 2!) = C_5^2 = 10$. Итого 720 чисел.

б) Есть ещё 9 чисел, в которых все цифры одинаковы. Их 9 штук.

Ответ: $C_5^2 \cdot 8 \cdot 9 + 9 = 729$.

Критерии. Числа из одинаковых цифр не учтены, или они некорректно учтены вместе с числами из пункта (а) — минус 2 балла.

Наряду с верными случаями рассмотрены лишние — минус 2 балла.

Ответ можно оставить в виде формулы. Но если уж он посчитан и посчитан неверно, то минус 1 балл.

Верный ответ в виде разумной формулы без дальнейших обоснований — 2 балла.

5. Медиантой двух несократимых дробей $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$ называется несократимая дробь, значение которой равно $\frac{m+p}{n+q}$. Пусть z — медианта для x и y, u — медианта для x и z, а v — медианта для y и z. Можно ли утверждать, что z — медианта для u и v?

   Решение. Нельзя. Контрпример: $x = \frac{1}{7}, y = \frac{7}{13}$, тогда $z = \frac{2}{5}, u = \frac{1}{4}, v = \frac{1}{2}$, и медианта u и v равна $\frac{1}{3} \neq \frac{2}{5}$.

6. В этой таблице 12 чисел закрасили в синий цвет, а другие 12 — в красный, причём сумма синих чисел в 4 раза больше, чем сумма красных. А какое число осталось незакрашенным?

5	11	7	12	1
34	13	2	22	17
24	51	9	51	19
16	32	10	20	42
27	2017	67	99	100

   Решение. Сумма закрашенных чисел должна делиться на 5, а общая сумма всех чисел даёт остаток 3 от деления на 5. Единственное число с остатком 3 — это 13, значит, именно оно не закрашено.

   Критерии. Идея использования остатков от деления на 5 или 10 — 3 балла, каких-нибудь других (неподходящих) остатков — 1 балл.

7. См. задачу 8 для 6 класса.

8. Квадратный лес разбит на миллион равных квадратов, в центре каждого из которых растёт дерево. Некоторые деревья можно спилить, тогда вместо них появляются пни. Говорят, что с одного пня виден другой, если на отрезке, соединяющем их, нет ни одного дерева (хотя на нём могут располагаться другие пни). Какое максимальное количество деревьев можно спилить, чтобы ни с одного пня не был виден ни один другой пень? Считайте, что деревья и пни не имеют толщины.

   Решение. Разобьём лес на квадраты 2×2 и заметим, что в каждом квадрате мы можем спилить не более 1 дерева, значит, количество пней не превосходит четверти площади всего лес.

   Каждое четвёртое дерево спилить можно. Например, спилим все деревья с обеими нечётными координатами. Пусть мы провели отрезок между двумя пнями. Их координаты имеют одинаковую чётность, а значит, проекции этого отрезка на оси квадрата будут иметь чётную величину. Будем делить обе координаты на 2, пока они обе делятся, получая расстояния от начала до точек, находящихся на этом отрезке. Если в какой-то момент одна из координат не делится на 2, значит мы попали в точку, у которой хотя бы одна координата имеет чётную величину (там растёт дерево).

   Ответ: 250000 деревьев.

Критерии. За наличие оценки — 1 балл, за доказательство оценки — ещё 2 балла.
За пример — 1 балл, за доказательство, что он подходит — ещё 2 балла.

Задачи для 8 класса

1. См. задачу 1 для 7 класса.

2. См. задачу 3 для 7 класса.

3. Назовём натуральное число хорошим, если все цифры, входящие в его запись, повторяются в ней хотя бы дважды (например, 1522521 — хорошее, 1522522 — нет). Сколько существует шестизначных хороших чисел без нуля в записи?

   Решение. Существуют такие типы подходящих чисел: а) Числа с 4 цифрами a и 2 цифрами b. Существует $9 \cdot 8 = 72$ способа выбрать цифры и для каждого из них $C_6^2 = 15$ способов их расставить, итого $72 \cdot 15 = 1080$ чисел.

   б) Числа с 3 цифрами a и 3 цифрами b. Существует $9 \cdot 8/2 = 36$ способов выбрать цифры $a < b$ и для каждого из них $C_6^3 = 20$ способов их расставить. Способы с $b > a$ приводят к тем же числам. Итого $36 \cdot 20 = 720$ чисел.

   в) Числа с 2 цифрами a, 2 цифрами b и 2 цифрами . Существует $9 \cdot 8 \cdot 7/3! = 84$ способа выбрать три цифры a, b, c $(a < b < c)$. Далее есть $C_6^2 = 15$ способов выбрать место для цифр a и для каждого из них $C_4^2 = 6$ способов выбрать место для цифр b (тогда цифры c расставляются однозначно). Варианты, отличные от $a < b < c$, приведут к тем же числам, поэтому их учитывать не надо. Итого $84 \cdot 15 \cdot 6 = 7560$ таких чисел.

   г) Числа из шести одинаковых цифр. Таких чисел 9.

   Ответ: $1080 + 720 + 7560 + 9 = 9369$.

   Критерии. Не рассмотрен (или полностью неверно рассмотрен) один из случаев (а) и (б) — минус 2 балла, случай (в) — минус 4 балла, случай (г) — минус 1 балл. Если какой-то случай рассмотрен «отчасти верно, но не совсем» — снимаем часть баллов.
   Наряду с верными случаями рассмотрены лишние — минус 2 балла.
   Ответ можно оставить в виде формулы. Но если уж он посчитан и посчитан неверно, то минус 1 балл.
   Верный ответ в виде разумной формулы без дальнейших обоснований — 2 балла.

4. В одной стране используются квадратные листы бумаги стандартных форматов, которые определяются так: «Лист К0 имеет сторону в 1 метр. Если в квадрат К0 вписать окружность, а в неё снова вписать квадрат, то этот второй квадрат будет иметь формат К1. Если вписать в К1 окружность, а в неё снова вписать квадрат, то получим лист формата К2. Аналогично определяются форматы вплоть до К10». Петя побывал в этой стране и купил там синий лист К0 и белые листы К1, К2, ..., К10 (всех по одной штуке). Сможет ли он разрезать белые листы на части, которыми полностью оклеит синий лист (с одной стороны)?

   Решение. Заметим, что для каждой окружности вписанный квадрат имеет вдвое меньшую площадь, чем описанный (это очевидно, если в качестве вписанного квадрата выбрать тот, вершины которого являются серединами сторон описанного). Поэтому сумма площадей десяти квадратов К1, ..., К10 равна $1/2 + 1/4 + 1/8 + \ldots + 1/1024 = 1023/1024 < 1$. Значит, Петя не сможет этого сделать.

Критерии. Указано, что площадь каждого следующего квадрата вдвое меньше площади предыдущего, — 1 балл (если это доказано, то ещё 2 балла).

5. См. задачу 6 для 7 класса.

6. См. задачу 8 для 7 класса.

7. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} a\,(b - c + 1) = b^2 - bc + c, \\ b\,(c - a + 1) = c^2 - ca + a, \\ c\,(a - b + 1) = a^2 - ab + b. \end{cases}$$

Решение. Сначала уравнения преобразуются к виду

$$\begin{cases} (a - b)(b - c) = c - a, \\ (b - c)(c - a) = a - b, \\ (c - a)(a - b) = b - c. \end{cases}$$

Допустим, что какие-то два из чисел неравны, например, $b \neq c$. Тогда $c \neq a$ и $a \neq b$. Деление первого уравнения на второе приводит к равенству $\frac{a-b}{c-a} = \frac{c-a}{a-b}$. Взаимно обратные дроби могут оказаться равными, только если они равны 1 или -1. Второй случай невозможен, так как противоречит $b \neq c$, а первый случай приводит к $a = \frac{b+c}{2}$. Подставляя в третье уравнение, получаем: $b - c = 4$. Отсюда $a - c = 2$ и $b - a = 2$, что невозможно. Остаётся вернуться к случаю $a = b = c$.

Ответ: все решения имеют вид (p, p, p), где p может принимать любое вещественное значение.

8. Для каких $n > 1$ найдутся n различных натуральных чисел, сумма которых равна их наименьшему общему кратному?

Решение. Ответ: Для всех, кроме 2.

Например, для $n = 4k + 3$ $(k \geqslant 0)$ подойдёт такая серия чисел:
1, 2, 3; 4, 5, 15, 30; 40, 50, 150, 300; 400, 500, 1500, 3000; ....
Их сумма и НОК равны $6 \cdot 10^k$.

Аналогичные серии можно подобрать и для других остатков от деления на 4. Например:

- для $n = 4k$ $(k \geqslant 1)$: 5, 10, 15, 30; 40, 50, 150, 300; ...
- для $n = 4k + 1$ $(k \geqslant 1)$: 4, 5, 6, 15, 30; 40, 50, 150, 300; ...
- для $n = 4k + 2$ $(k \geqslant 1)$: 1, 2, 3, 4, 20, 30; 40, 50, 150, 300; ...

Так мы сумеем получить любое количество чисел, большее 2. А вот для $n = 2$ не получится: пусть есть два числа a и b $(a < b)$, тогда их сумма больше b, но меньше $2b$, а НОК таким быть не может.

Критерии. Верный ответ (все $n > 2$) — 1 балл. Доказательство того, что для всех n, больших 2, можно — ещё 4 балла (в т.ч. не менее 1 балла, если приведён способ, подходящий для какого-нибудь бесконечного семейства n). И доказательство того, что $n = 2$ не подходит — ещё 2 балла.

Задачи для 9 класса

1. См. задачу 3 для 5 класса.

2. Медиантой двух несократимых дробей $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$ называется несократимая дробь, значение которой равно $\frac{m+p}{n+q}$. Приведите пример девяти несократимых дробей, каждая из которых, кроме двух крайних, служила бы медиантой для двух соседних с ней (в порядке возрастания).

   Решение. Например, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$.
   Заметим, что ответ из девяти одинаковых дробей не является верным примером, поскольку возрастание подразумевает различность дробей.

3. Можно ли отметить на плоскости пять точек, не лежащих на одной прямой, так, чтобы расстояние между каждыми двумя из них выражалось целым числом?

   Решение. Например, вершины и центр ромба с диагоналями 6 и 8.

   Критерии. Если приведён конкретный пример, то объяснять, чему равны расстояния и почему, не требуется.

4. Назовём натуральное число хорошим, если все цифры, входящие в его запись, повторяются в ней хотя бы дважды (например, 1522521 — хорошее, 1522522 — нет). Сколько существует семизначных хороших чисел без нуля в записи?

   Решение. Существуют такие типы подходящих чисел: а) Числа с 4 цифрами a и 3 цифрами b. Существует $9 \cdot 8 = 72$ способа выбрать цифры и для каждого из них $C_7^3 = 35$ способов их расставить, итого $72 \cdot 35 = 2520$ чисел.

   б) Числа с 5 цифрами a и 2 цифрами b. Существует $9 \cdot 8 = 72$ способа выбрать цифры и для каждого из них $C_7^2 = 21$ способ их расставить. Итого $72 \cdot 21 = 1512$ чисел.

   в) Числа с 3 цифрами a, 2 цифрами b и 2 цифрами . Существует 9 вариантов выбора для цифры a и соответственно $C_7^3 = 35$ способов выбора места. Для оставшихся двух цифр существует $7 \cdot 8/2$ вариантов пар. Выбирая $C_4^2 = 6$ способами куда поставить большие цифры получаем, что всего способов $9 \cdot 35 \cdot 28 \cdot 6 = 52920$.

   г) Числа из шести одинаковых цифр. Таких чисел 9.

   Ответ: $2520 + 1512 + 52920 + 9 = 56961$.

   Критерии. Совпадают с критериями к задаче №3 для 8 класса.

5. Дан прямоугольный равнобедренный треугольник ABC с прямым углом A. На сторонах AB и AC вовне $\triangle ABC$ построены равные остроугольные треугольники ABP и ACQ ($PB = AQ$). Прямые PB и CQ пересекаются в точке M. Докажите, что: а) $PA \perp QC$; б) $MA \perp PQ$.

   Решение. Продлим отрезок PA за точку A до пересечения с прямой MQ. Пусть они пересекаются в точек N. Покажем, что $\angle NPM + \angle PMN = 90$, откуда будет следовать, что $PA \perp QM$. Пусть $\angle APM = \alpha$, $\angle PBA = \beta$. Тогда поскольку $\angle PBA + \angle ABC + \angle CBM = 180$, то $\angle MBC = 180 - 45 - \beta = 135 - \beta$. Далее из равенства треугольников PBA и AQC следует, что $\angle ACQ = \angle BAP = 180 - \alpha - \beta$. Аналогично $\angle MBC$ получаем, что $\angle MCB = 180 - 45 - (180 - \alpha - \beta) = \alpha + \beta - 45$. Зная в треугольнике MBC углы $\angle MBC$ и $\angle BCM$, найдём оставшийся $\angle BMC = 180 - (135 - \beta) - (\alpha + \beta - 45) = \alpha - 90$, а значит $\angle NPM + \angle PMN = 90$. Аналогичными рассуждениями можно получить, что $QA \perp PM$, тогда точка A будет являться точкой пересечения высот в треугольнике PQM, а значит $MA \perp PQ$.

   Критерии. Пункт а) без пункта б) оценивается в 3 балла.

6. Пусть $S(n)$ обозначает сумму цифр натурального числа n. Сколько решений имеет следующее уравнение?
$$S(n) + S^2(n) + \ldots + S^{2016}(n) = 2017^{2017}.$$
Здесь $S^2(n) = S(S(n))$, $S^3(n) = S(S^2(n))$, $S^4(n) = S(S^3(n))$ и т. д.

   Решение. $S(n)$ даёт такой же остаток при делении на 3, как и n. Применяя это соображение последовательно несколько раз, получаем, что $S^k(n)$ даёт такой же остаток при делении на 3, как и n. Тогда левая часть исходного уравнения даёт такой же остаток при делении на 3, как и число $2016n$, но поскольку 2016 делится на 3, то этот остаток 0. Однако правая часть на 3 не делится, значит, у данного уравнения нет решений.

   Критерии. Сделано замечание $S(n) \equiv n(mod\ 3)$ (или $mod\ 9$) — 1 балл.

7. См. задачу 7 для 8 класса.

8. Точки числовой оси закрашены в 4 цвета. Соответствующие чётным числам — чёрные, нечётным — белые, на интервалах от чёрных к белым (по возрастанию) — красные, а на интервалах от белых к чёрным — синие. В стартовый момент времени два кузнечика находятся в разных точках A и B между 0 и 1. Через каждую единицу времени оба кузнечика совершают прыжок, удваивающий их координату (первый — в точки $2A$, $4A$, $8A$ и т. д., второй — в $2B$, $4B$, $8B$ и т. д.). Можно ли утверждать, что в некоторый момент времени кузнечики окажутся в точках, закрашенных в разные цвета?

   Решение. Запишем координаты стартовых точек в двоичной записи $A = 0,a_1a_2a_3\ldots$ $B = 0,b_1b_2b_3\ldots$. Так как точки различны, то рассмотрим первый такой номер n, что $a_n \neq b_n$. Не умаляя общности можем считать, что $a_n = 0$. Тогда после n прыжков первый кузнечик будет находиться в точке $a_1a_2\ldots a_{n-1}0,a_{n+1}\ldots$. Эта точка покрашена в такой же цвет, как и точка $0,a_{n+1}\ldots$, полученная откидыванием первой $n-1$ цифры, поскольку числа, различающиеся на чётное число, имеют одинаковый цвет. Аналогично получаем, что точка, в которой находится второй кузнечик, покрашена в тот же цвет, что и точка $1,b_{n+1}\ldots$. Но тогда первый кузнечик стоит на красной или чёрной точке, а второй на белой или синей.

Задачи для 10 класса

1. См. задачу 6 для 5 класса.

2. См. задачу 3 для 9 класса.

3. См. задачу 7 для 5 класса.

4. В игре «Что? Где? Когда?» используется круглый барабан, разбитый на 13 секторов. Изначально в каждом секторе лежит вопрос. Стрелка, вращаясь случайным образом, указывает с равной вероятностью на любой из секторов. В каждом раунде игры задаётся вопрос из сектора, указанного стрелкой; но если этот вопрос уже задан, то используется следующий по часовой стрелке незаданный.
Пронумеруем вопросы по часовой стрелке от 1 до 13. Допустим, что после нескольких раундов заданы вопросы 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10. Для какого из оставшихся вопросов вероятность

выпасть в одном из двух ближайших раундов максимальна? (Считайте, что ближайшие два раунда будут сыграны.)

Решение. Всего возможно 169 равновероятных пар секторов, выпавших за два тура.

Посмотрим, в каких ситуациях за 2 тура выпадет вопрос 7.
а) В первом туре один из секторов 3–7, во втором — любой (65 ситуаций).
б) В первом туре любой сектор, во втором один из секторов 3–7 (65 ситуации, из них 25 учтены в пункте (а), 40 новых).
в) В обоих турах сектор 2 (1 ситуация).
Итого 106 ситуаций.

Посмотрим, в каких ситуациях за 2 тура выпадет вопрос 11.
а) В первом туре один из секторов 8–11, во втором — любой (52 ситуации).
б) Во первом туре любой сектор, во втором один из секторов 8–11 (52 ситуации, из них 16 учтены в пункте (а), 36 новых).
в) В обоих турах один из секторов 3–7 (25 ситуаций).
Итого 113 ситуаций.

Посмотрим, когда выпадет вопрос 12.
а) В первом туре сектор 12, во втором — любой (13 ситуаций).
б) В первом туре любой сектор, во втором один сектор 12 (13 ситуаций, из них 1 учтена в пункте (а), 12 новых).
в) В обоих турах секторы 8–11 (16 ситуаций).
Итого 41 ситуация.

Любой другой ранее не выпавший вопрос n может выпасть в следующих случаях: либо один раз выпадет сектор n, другой раз любой сектор ($13 + 13 - 1 = 25$ вариантов); либо дважды выпадет предыдущий сектор (1 вариант). Итого 26 вариантов.

Ответ: вопрос 11.

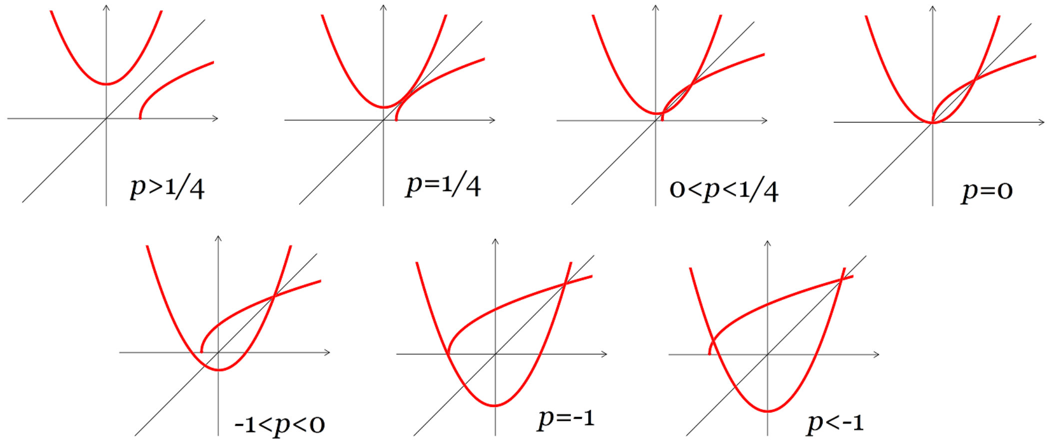
Критерии. Подсчитаны только вероятности выпадения вопросов 7 и 11, а про остальные сказано, что они, очевидно, меньше — 5 баллов (если ещё подсчитана вероятность для вопроса 12, то 6 баллов).
Высказана мысль «конечно, это один из вопросов 7 и 11», а дальше неверно — 1 балл.
За каждую арифметическую ошибку снимаем 1 балл, независимо от того, приводит ли она к изменению ответа. Не путать арифметические ошибки с содержательными, за которые снимается больше 1 балла.

5. Точка O — центр равностороннего треугольника ABC. Окружность, проходящая через точки A и O, пересекает стороны AB и AC в точках M и N соответственно. Докажите, что $AN = BM$.

   Решение. Угол MON равен $\pi - \angle BAC = \frac{2\pi}{3}$, при повороте на $\frac{2\pi}{3}$ вокруг O прямые AB и OM переходят в CA и ON соответственно, поэтому отрезок BM переходит в AN, и $|BM| = |AN|$.

6. Как меняется количество корней уравнения $x^2 + p = \sqrt{x - p}$ в зависимости от значения параметра p?

   Решение. Заметим, что график левой части — парабола, а график правой части — ветвь другой параболы, причём эти две параболы симметричны относительно прямой $y = x$. Поэтому точки пересечения лежат на прямой $y = x$.



Мысленно двигая две параболы, получаем:
при $p > 1/4$ решений нет (они не пересекаются);
при $p = 1/4$ одно решение (они касаются в точке $x = y = 1/2$);
при $0 \leqslant p < 1/4$ два решения (ветвь второй параболы имеет две общие точки с первой параболой; в частности, при $p = 0$ одна из этих точек — их общая вершина);
при $-1 < p < 0$ одно решение (вершина второй параболы лежит внутри первой, поэтому рассматриваемая ветвь второй параболы пересекает первую в одной точке);
при $p \leqslant -1$ два решения (при $p = -1$ вершина второй параболы лежит на первой, а при меньших p — вне первой).

7. См. задачу 8 для 9 класса.

8. Два вещественных числа a и b таковы, что $a^4 + b^4 + a^2b^2 = 60$.
Докажите, что $4a^2 + 4b^2 - ab \geqslant 30$.

Решение. Обозначим $x = a^2 + b^2 - ab$, $y = a^2 + b^2 + ab$; тогда $xy = a^4 + b^4 + a^2b^2 = 60$.

Неравенство среднего арифметического и геометрического даёт:

$$\frac{x+y}{2} + \frac{x}{3} = \frac{5x}{6} + \frac{y}{2} = \frac{5x}{6} + \frac{60}{2x} = \frac{5x}{6} + \frac{30}{x} \geqslant 2\sqrt{\frac{5x}{6} \cdot \frac{30}{x}} = 10.$$

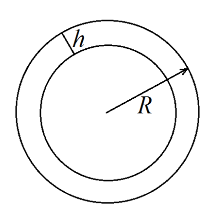
С другой стороны,

$$\frac{x+y}{2} + \frac{x}{3} = a^2 + b^2 + \frac{a^2 + b^2 - ab}{3} = \frac{4a^2 + 4b^2 - ab}{3}.$$

Значит, $4a^2 + 4b^2 - ab \geqslant 30$.

Существуют и другие решения.

Задачи для 11 класса



1. Круглый тоннель имеет внешний радиус $R = 200$ м и ширину $h = 30$ м. Можно ли повесить в нём шесть лампочек, освещающих весь тоннель?

Решение. Можно. Поставим их в вершинах правильного шестиугольника, вписанного во внешнюю окружность тоннеля. Радиус вписанной окружности этого шестиугольника равен $100\sqrt{3} > 170$, то есть внутренняя окружность тоннеля целиком лежит внутри шестиугольника.

2. Могут ли из первых ста членов арифметической прогрессии ровно 42 быть целыми числами?

   Решение. Нет. Заметим, что номера целых членов образуют арифметическую прогрессию (пусть a_n и a_{n+m} — два наиболее близко расположенных целых члена, тогда и $a_{n+km} \in \mathbb{Z}$ при любом целом k; а остальные не могут быть целыми, т.к. это противоречило бы минимальности m).
   Если разность между первыми двумя номерами целых членов равна 1 или 2, то 100 или 50 членов целые, а если разность хотя бы 3, то их не более 34.

3. См. задачу 4 для 10 класса.

4. См. задачу 5 для 10 класса.

5. Найдите какой-нибудь отличный от константы многочлен $P(t)$, для которого верно тождество $P(\sin x) = P(\cos x)$.

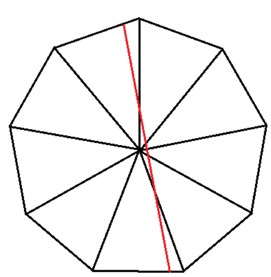
   Решение. Например, $P(t) = t^2 \cdot (1 - t^2) = -t^4 + t^2$. Он подходит благодаря основному тригонометрическому тождеству:
   $P(\sin x) = \sin^2 x(1 - \sin^2 x) = \sin^2 x \cos^2 x = (1 - \cos^2 x)\cos^2 x = P(\cos x)$.

   Критерии. Многочлен приведён, но не объяснено, почему он подходит — 6 баллов.
   Решающий вспомнил какое-либо полезное тождество (например, основное тригонометрическое), но дальнейших продвижений нет — 1 балл.

6. См. задачу 8 для 9 класса.

7. Даны правильная призма и правильная бипирамида, основаниями каждой из них служит правильный 25-угольник. Для каждого из этих тел найдено максимально возможное количество вершин многоугольника, получаемого при сечении этого тела плоскостью. Для какого из тел результат больше? (Правильная бипирамида с основанием S — это объединение двух равных правильных пирамид с общим основанием S и вершинами по разные стороны от плоскости основания.)

   Решение. Для призмы максимум 27 (потому что у неё 27 граней).
   Для бипирамиды можно получить 28 вершин. Действительно, рассмотрев одно из сечений, перпендикулярных плоскости основания и проходящих очень близко к центру. Оно пересекает 13 боковых рёбер «верхней» пирамиды, 13 симметричных им рёбер «нижней» пирамиды и два ребра их общего основания. (На рисунке показана проекция аналогичного сечения для 9-угольного основания).



   Значит, для бипирамиды результат больше.

Критерии. Верно рассмотрена ситуация только для призмы (доказано, что не более 27) — 2 балла; только для бипирамиды (доказано, что можно 28) — 3 балла.

8. См. задачу 8 для 10 класса.