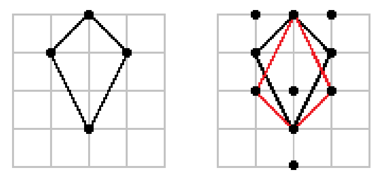
Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»

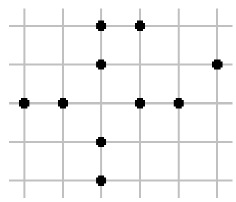
2016/2017 год. Второй тур

# Решения задач для 5 класса

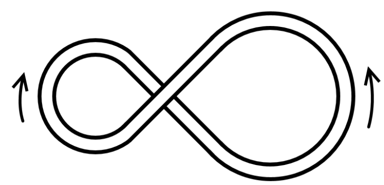
1. Паша рисует точки на пересечении линий клетчатой бумаги. Ему нравится, если четыре точки образуют фигуру «воздушный змей», показанную справа (змей должен быть именно такой формы и размера, но может быть повёрнут). Например, 10 точек, показанные на втором рисунке, образуют всего два змея. Нарисуйте 10 точек так, чтобы они образовали целых пять змеев.



**Решение.** Например, так.



2. Том и Джерри бегают друг за другом по трассе в виде восьмёрки (см. рисунок). Они бегут в одном направлении и с постоянными скоростями. В начальный момент Джерри был точно над Томом. Через 20 минут Том оказался точно над Джерри, причём ни один из них не успел пробежать полный круг. Ещё через 10 минут Том вернулся в место старта. Через какое время после начала бега Том догонит Джерри?



**Решение.** За первые 20 минут Том пробегает большую петлю, а Джерри малую. За следующие 10 минут Том пробегает малую петлю. Значит, скорость Тома вдвое больше скорости Джерри, а большая петля вдвое длиннее малой.

Обозначим длину малой петли через $m$, тогда длина большой равна $2m$. Изначально Джерри опережает Тома на длину большой петли, то есть на $2m$. За время, пока Джерри пробегает $2m$, Том пробежит $4m$ и догонит его. Заметим, что Джерри пробегает $m$ за 20 минут, значит, $2m$ он пробежит за 40 минут.

Ответ: через 40 минут.

3. Двое играют в такую игру. Они по очереди называют трёхзначные числа, у которых нет нулей в записи, а сумма цифр делится на 9. При этом каждое следующее число должно начинаться с той же цифры, на которую кончается предыдущее, например: 351 – 189 – 936 – 621 ... Повторять числа нельзя. Тот, кто не может назвать очередное число, проигрывает. Кто из игроков — начинающий или его соперник — может выиграть независимо от игры другого?

**Решение.** Выигрывает первый игрок. Одна из возможных стратегий такова. Он называет число 999, а потом в ответ на любое число $\overline{ABC}$, названное вторым, называет число $\overline{CBA}$ (то же самое число «задом наперёд»). Заметим, что после этого второму опять придётся назвать число, которое начинается на 9. Первый игрок всегда может сделать ход, ведь подходящих чисел вида $\overline{9B9}$ (кроме 999) больше нет.

Замечание. В качестве начального числа первый игрок может использовать любой другой палиндром (то есть число, читаемое в обоих направлениях одинаково): 171, 252 и т.д.

4. У Флинта есть пять матросов и 60 золотых монет. Он хочет разложить их по кошелькам, а потом раздать кошельки матросам так, чтобы каждому досталось поровну монет. Но он не знает, сколько матросов останутся в живых к моменту делёжки. Поэтому он хочет разложить монеты так, чтобы их можно было поровну раздать и двоим, и троим, и четверым, и пятерым. Хватит ли ему для этого девяти кошельков?

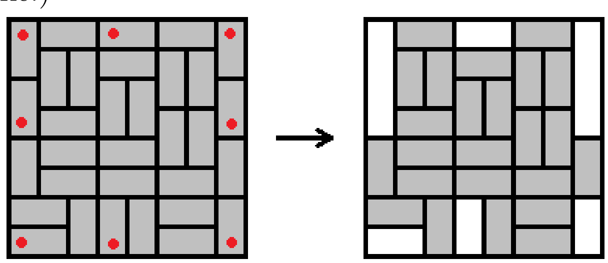
   **Решение.** Да. Например, при таком количестве монет в кошельках: 12, 12, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 3.

   Заметим, что меньшего количества кошельков недостаточно (см. решение задачи 4 для 6 класса).

5. На доске $8 \times 8$ клеток можно расположить несколько доминошек (то есть прямоугольников $2 \times 1$), не накладывающихся друг на друга. Пусть $N$ — количество способов положить так 32 доминошки, а $T$ — количество способов положить так 24 доминошки. Что больше — $N$ или $M$? Способы, которые получаются друг из друга поворотом или отражением доски, считаются различными.

   **Решение.** Способов расположить 24 доминошки больше. Докажем это.

   Рассмотрим какое-нибудь разбиение доски на 32 доминошки. Уберём четыре доминошки, содержащие угловые клетки. Кроме этого, с каждой стороны доски уберём какую-нибудь доминошку, содержащую одну из средних клеток этой стороны. (Пример показан на рисунке.)

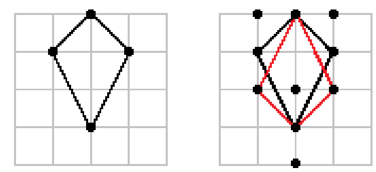


   Заметим, что после убирания этих 8 доминошек по оставшимся 24 доминошкам можно однозначно восстановить, как лежали 8 убранных. (Действительно, рядом с каждым углом есть только одна свободная клетка, что позволяет восстановить положение угловых доминошек. После этого восстанавливаются и четыре других доминошки.)

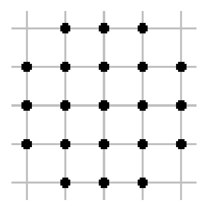
   Значит, каждой расстановке-32 (то есть расстановке 32 доминошек) можно сопоставить свою расстановку-24. Очевидно, что существуют и такие расстановки-24, которым мы не сопоставили никакую расстановку-32 (например, такие, где заняты угловые клетки). Значит, расстановок-24 больше.

# Решения задач для 6 класса

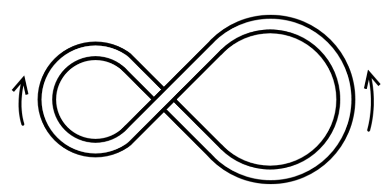
1. Паша рисует точки на пересечении линий клетчатой бумаги. Ему нравится, если четыре точки образуют фигуру «воздушный змей», показанную справа (змей должен быть именно такой формы и размера, но может быть повёрнут). Например, 10 точек, показанные на втором рисунке, образуют всего два змея. Можно ли нарисовать некоторое количество точек так, чтобы количество змеев было больше, чем количество самих точек?



**Решение.** Например, так. Здесь 21 точка и 24 змея (по 6 змеев в каждом направлении).



2. Том и Джерри бегают друг за другом по трассе в виде восьмёрки (см. рисунок). Они бегут в одном направлении и с постоянными скоростями. В начальный момент Джерри был точно над Томом. Через 20 минут Том оказался точно над Джерри, причём ни один из них не успел пробежать полный круг. Ещё через 15 минут Том вернулся в место старта. Через какое время после начала бега Том догонит Джерри?



**Решение.** За первые 20 минут Том пробегает большую петлю, а Джерри малую. За следующие 15 минут Том пробегает малую петлю. Значит, скорость Тома в $\frac{4}{3}$ раз больше скорости Джерри, а большая петля в $\frac{4}{3}$ длиннее малой.

Обозначим длину малой петли через $m$, тогда длина большой равна $\frac{4m}{3}$. Изначально Джерри опережает Тома на длину большой петли, то есть на $\frac{4m}{3}$. За первые 20 минут расстояние между ними сократилось на $\frac{m}{3}$. Поскольку скорости постоянны, то так будет каждые 10 минут. Чтобы нагнать $\frac{4m}{3}$, Тому нужно $20 \cdot 4 = 80$ минут.

Ответ: через 80 минут.

3. Двое играют в такую игру. Они по очереди называют четырёхзначные числа, у которых нет нулей в записи, а сумма цифр делится на 9. При этом каждое следующее число должно начинаться с той же цифры, на которую кончается предыдущее, например: $3231 - 1539 - 9756 - 6561 \ldots$ Повторять числа нельзя. Тот, кто не может назвать очередное число, проигрывает. Кто из игроков — начинающий или его соперник — может выиграть независимо от игры другого?

**Решение.** Выигрывает первый игрок. Одна из возможных стратегий такова. Он называет число 9999, а потом в ответ на любое число $\overline{ABCD}$, названное вторым, называет число $\overline{DCBA}$ (то же самое число «задом наперёд»). Заметим, что после этого второму опять придётся назвать число, которое начинается на 9. Первый игрок всегда может сделать ход, ведь подходящих чисел вида $\overline{9BB9}$ (кроме 9999) больше нет.

Замечание. В качестве начального числа первый игрок может использовать любой другой палиндром (то есть число, читаемое в обоих направлениях одинаково): 1881, 2772 и т.д.

4. У Флинта есть пять матросов и 60 золотых монет. Он хочет разложить их по кошелькам, а потом раздать кошельки матросам так, чтобы каждому досталось поровну монет. Но он не знает, сколько матросов останутся в живых к моменту делёжки. Поэтому он хочет разложить монеты так, чтобы их можно было поровну раздать и двоим, и троим, и четверым, и пятерым. Какое наименьшее количество кошельков ему понадобится? Не забудьте доказать, что найденное вами количество — наименьшее.

   **Решение.** Ответ: 9 кошельков. Пример: 12, 12, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 3.

   Докажем, что 8 кошельков не хватит.

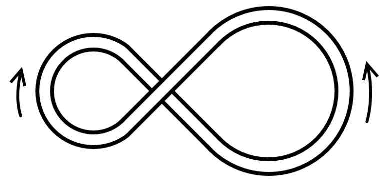
   1) Заметим, что каждый кошелёк должен содержать не более 12 монет. Значит, 15 монет должны набираться минимум двумя кошельками. То есть когда мы делим 8 кошельков между четырьмя пиратами, каждому должно достаться по два кошелька. Значит, они группируются в четыре пары с суммой 15.
   2) При дележе между пятью пиратами хотя бы два пирата получат по одному кошельку. Значит, есть два кошелька с 12 монетами.
   3) Из пункта 1 следует, что в пару к этим двум кошелькам должны быть два кошелька с 3 монетами.
   4) Если кошельков по 12 монет только два, то остальные группируются в пары с суммой 12. Тогда в дополнение к каждому числу кошельку с 3 монетами найдётся кошелёк с 9 монетами. А тогда каждому из них нужна пара с 6 монетами (чтобы получалась сумма 15). То есть набор кошельков такой: 12, 12, 3, 3, 9, 9, 6, 6. Очевидно, что 20 монет с их помощью не получить (20 не делится на 3).
   5) Пусть кошельков по 12 монет больше двух, то есть хотя бы три. Тогда и кошельков с 3 монетами (которые дополняют их до 15 монет, см. п. 1) должно быть хотя бы три. Однако из такого набора кошельков нельзя сформировать ни одной порции в 20 монет; чтобы можно было получить три таких порции, нужно добавить ещё хотя бы три кошелька, тогда их будет не менее девяти.

5. На доске $8 \times 8$ клеток можно расположить несколько доминошек (то есть прямоугольников $2 \times 1$), не накладывающихся друг на друга. Пусть $N$ — количество способов положить так 32 доминошки, а $T$ — количество способов положить так 24 доминошки. Что больше — $N$ или $M$? Способы, которые получаются друг из друга поворотом или отражением доски, считаются различными.

   **Решение.** См. решение задачи 5 для 5 класса.

# Решения задач для 7 класса

1. Том и Джерри бегают друг за другом по трассе в виде восьмёрки (см. рисунок). Они бегут в одном направлении и с постоянными скоростями. В начальный момент Джерри был точно над Томом. Через 20 минут Том оказался точно над Джерри, причём ни один из них не успел пробежать полный круг. Ещё через 15 минут Том вернулся в место старта. Через какое время после начала бега Том догонит Джерри?



**Решение.** См. решение задачи 2 для 6 класса.

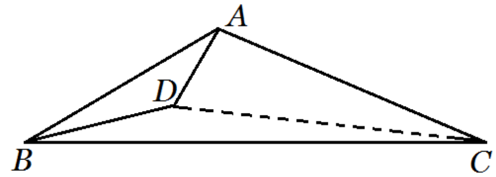
2. Катя решила сосчитать сумму кубов всех натуральных делителей некого натурального числа, и у неё получился результат $MATH$. Но потом она обнаружила, что забыла один из делителей. Прибавив его куб, она получила верный результат — $MASS$. Найдите наименьшее возможное значение числа $MATH$. ($MATH$ и $MASS$ — четырёхзначные числа, в которых каждая цифра заменена буквой, причём одинаковые цифры заменены одинаковыми буквами, а разные — разными.)

**Решение.** Ответ: 2017. Исходное натуральное число равно 12; $12^3+6^3+4^3+2^3+1^3 = 2017$; если прибавить $3^3$, то получается 2044.

Докажем, что меньших подходящих чисел нет.

1) Для любого числа, меньшего 10, сумма кубов всех делителей, как легко проверить, меньше тысячи.
2) $10^3 + 5^3 + 2^3 + 1^3 = 1134$ и $11^3 + 1^3 = 1332$ не могут равняться числу $MASS$ (две последние цифры не равны).
3) Для числа 12 $MASS = 2044$; если вычесть из него куб, меньший 27, то результат будет больше 2017, а если больший, то результат уже будет меньше 2000.
4) При $n \geqslant 13$ получаем: $MASS \geqslant n^3 \geqslant 2197$, а значит, $MATH \geqslant 2100$.

3. В треугольнике $ABC$ отмечена точка $D$ такая, что $BD + AC < BC$. Докажите, что $\angle DAC + \angle ADB > 180°$.




**Решение.**

Поскольку $BD + DC > BC$ (неравенство треугольника), а $BD + AC < BC$ (по условию), то $AC < DC$. Значит, в треугольнике $ADC$ угол $D$ меньше угла $A$. Но поскольку $BDA + ADC = 360° - BDC > 180°$, то и $ADB + DAC > 180°$.

4. Двое играют в такую игру. Они по очереди называют восьмизначные числа, у которых нет нулей в записи, а сумма цифр делится на 9. При этом каждое следующее

число должно начинаться с той же цифры, на которую кончается предыдущее. Повторять числа нельзя. Тот, кто не может назвать очередное число, проигрывает. Кто из игроков — начинающий или его соперник — может выиграть независимо от игры другого?

**Решение.** Выигрывает первый игрок. Одна из возможных его стратегий описана ниже.

Разобьём подходящие числа на пары, сопоставив каждому из чисел его же с обратным порядком цифр. Такое сопоставление не подходит для палиндромов (то есть чисел, которые в обоих направлениях читаются одинаково).

Заметим, что палиндромов, начинающихся на каждую цифру, нечётное число, а именно $9^2$. Действительно, пусть $\overline{abcddcba}$ — такой палиндром; тогда $a$ фиксировано, а для любых значений $b$ и $c$ существует ровно одно значение $d$ от 1 до 9, при котором $a+b+c+d$ кратно 9 ( $\iff$ сумма цифр кратна 9).

Обозначим один из палиндромов (например, 99999999) буквой $X$, а остальные 80 палиндромов, начинающиеся на 9, произвольным образом разобьём на пары. (То же можно сделать с палиндромами, начинающимися на 1, 2 и т. д., но нам это не нужно.)

Теперь опишем выигрышную стратегию первого игрока. Вначале он называет число $X$. В ответ на каждое число, названное вторым игроком, называет парное ему число. После каждого хода первого игрока число кончается на девятку. Поскольку числа используются парами, то первый игрок всегда может сделать ответный ход.

5. На доске $8 \times 8$ клеток можно расположить несколько доминошек (то есть прямоугольников $2 \times 1$), не накладывающихся друг на друга. Пусть $N$ — количество способов положить так 32 доминошки, а $F$ — количество способов поставить на эту доску 16 фишек (в одну клетку нельзя ставить более одной фишки). Что больше — $N$ или $F$? Способы, которые получаются друг из друга поворотом или отражением доски, считаются различными.

   **Решение.** Докажем, что расстановок 16 фишек больше, чем разбиений на 32 доминошки. Для этого придумаем правило, которое сопоставляет каждому разбиению на 32 доминошки расстановку 16 фишек, причём так, чтобы разным разбиениям сопоставились разные расстановки. То есть мы должны так закодировать разбиение расстановкой, чтобы оно однозначно восстанавливалось.

   Опишем одно из таких сопоставлений. Выберем менее популярное направление доминошек (вертикальное или горизонтальное). Если в верхней/левой клетке каждой доминошки выбранного направления поставить по фишке, то (зная, какое направление выбрано) легко восстановить положение всех доминошек этого направления. А после этого остальные доминошки тоже однозначно восстанавливаются.

   Здесь есть несколько трудностей.

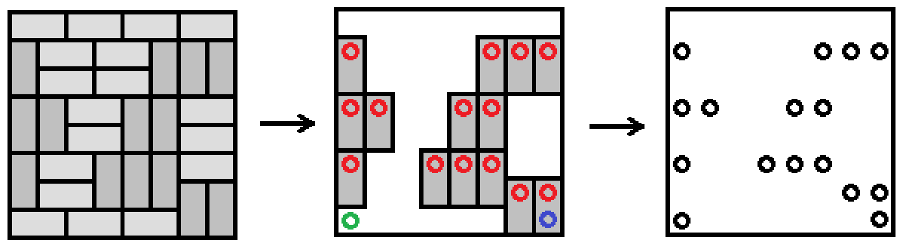
   1) Как по расстановке фишек определить, какое из направлений выбрано? Заметим, что правая нижняя клетка доски в любом случае свободна. Пусть стоящая в ней фишка будет обозначать, что выбранное направление — вертикальное. (Значит,

если доминошек каждого направления по 16, то в качестве «менее популярного» надо выбирать горизонтальное направление, чтобы не тратить 17-ю фишку.)

2) Описанный алгоритм может дать менее 16 фишек, а надо ровно 16. Надо добавить недостающие фишки на свободные места.

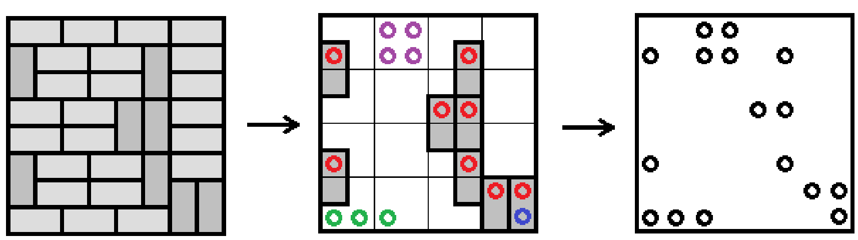
2a) Пусть на доске стоит от 9 до 15 фишек. Пусть, для определённости, выбранное направление доминошек — вертикальное. Тогда клетки нижней строки (кроме самой правой из них) заведомо свободны. Будем размещать в них лишние фишки (вплоть до семи штук). Пример показан на рисунке (синяя фишка указывает на выбранное направление, зелёная — лишняя).

*a*



2b) Пусть на доске стоит менее 9 фишек. Тогда разобьём левый верхний квадрат $6 \times 6$ этой доски на 9 квадратов $2 \times 2$. Хотя бы один из них окажется свободен (а если фишек менее 7, то хотя бы три). Займём некоторые свободные квадраты (например, начиная с самого верхнего из самых левых) фишками целиком — так, чтобы на доске стало не менее 9 фишек, после чего выставим оставшиеся фишки как в пункте (a). Заметим, что другие части алгоритма не могут привести к заполнению целого квадрата $2 \times 2$ в верхнем левом фрагменте $6 \times 6$, поэтому при дешифровке такие квадраты однозначно идентифицируются как «склады лишних фишек». Пример показан на рисунке ниже (фиолетовые и зелёные фишки — лишние).

*b*



3) Существуют способы расставить 16 фишек, которые не могут получиться в результате работы нашего алгоритма. Например, это способы, когда есть заполненные «склады фишек», описанные в пункте 2b, но верхний левый квадрат $2 \times 2$ пуст.

Итак, мы описали алгоритм кодирования, допускающий однозначную дешифровку, поэтому $N \leqslant F$. Поскольку существуют расстановки 16 фишек, не порождаемые этим алгоритмом, то $N < F$.

Замечание. Возможен также подход, описанный в решении задачи 5 для 8-9 классов: сделать соответствие более простым и не делать его взаимно однозначным, но доказать, что каждому разбиению соответствует больше расстановок, чем каждой расстановке — разбиений.

## Решения задач для 8 класса

1. Сумма цифр натурального числа равна 2017. При этом, какие бы десять подряд идущих цифр числа мы не рассмотрели, все они различны. Сколько цифр может быть в числе? Укажите все варианты ответа и докажите, что других нет.

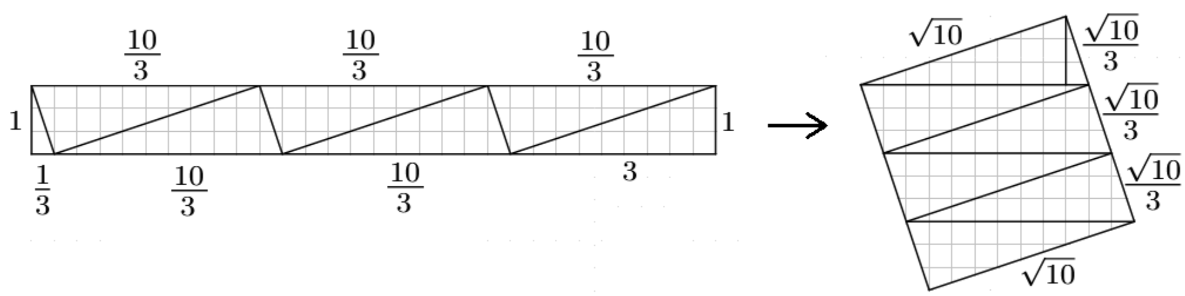
   **Решение.** Среди каждых десяти подряд идущих цифр все цифры от 0 до 9 встречаются по одному разу, то есть сумма каждых 10 последовательных цифр равна 45.

   Заметим, что $2017 = 44 \cdot 45 + 37$. Значит, число состоит из 44 блоков по 10 цифр и в конце ещё нескольких цифр с суммой 37. Иначе говоря, до 45 блоков (до 450 цифр) не хватает суммы цифр 8, которая может быть набрана одной (8), двумя (35), тремя (521) или четырьмя (5210) цифрами, но не более $(0+1+2+3+4>8)$.

   Ответ: от 446 до 449.

2. Докажите, что прямоугольник $1 \times 10$ можно разрезать на 7 частей и составить из них квадрат.

   **Решение.** Разрежем прямоугольник, как показано на рисунке.




   По теореме Пифагора найдём длины «косых» отрезков:
   $\sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{3}$, $\sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$.
   Получается, что все получившиеся треугольники подобны (коэффициент подобия «среднего» к «маленькому» равен 3, «большого» к «маленькому» — $\sqrt{10}$. Следовательно, все они прямоугольные. Поэтому можно составить из них фигуру, показанную на рисунке; она окажется прямоугольником, все стороны которого равны $\sqrt{10}$, то есть квадратом.

3. В треугольнике $ABC$ отмечена точка $D$ такая, что $BD + AC < BC$. Докажите, что $\angle DAC + \angle ADB > 180°$.

   **Решение.** См. решение задачи 3 для 7 класса.

4. У Флинта есть пять матросов и 60 золотых монет. Он хочет разложить их по кошелькам, а потом раздать кошельки матросам так, чтобы каждому досталось поровну монет. Но он не знает, сколько матросов останутся в живых к моменту делёжки.

Поэтому он хочет разложить монеты так, чтобы их можно было поровну раздать и двоим, и троим, и четверым, и пятерым. Какое наименьшее количество кошельков ему понадобится? Не забудьте доказать, что найденное вами количество — наименьшее.

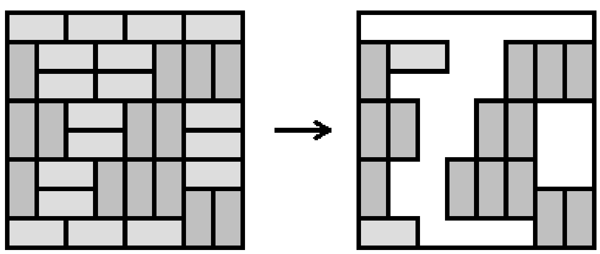
**Решение.** См. решение задачи 4 для 6 класса.

5. На доске $8 \times 8$ клеток можно расположить несколько доминошек (то есть прямоугольников $2 \times 1$), не накладывающихся друг на друга. Пусть $N$ — количество способов положить так 32 доминошки, а $S$ — количество способов положить так 16 доминошек. Что больше — $N$ или $S$? Способы, которые получаются друг из друга поворотом или отражением доски, считаются различными.

   **Решение.** 16 доминошек можно расположить бо́льшим количеством способов, чем 32. Для доказательства рассмотрим определённое соответствие (неоднозначное) между 32-разбиениями и 16-укладками (то есть способами расположить 32 доминошки и способами расположить 16 доминошек).

   Если горизонтальных доминошек 16, то оставим только их. Вертикальные доминошки восстанавливаются по ним однозначно.

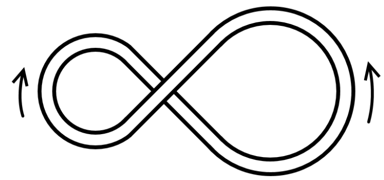
   Пусть горизонтальных доминошек больше или меньше 16. Выберем менее популярное направление доминошек и оставим на доске только их. По ним однозначно восстанавливается положение доминошек второго направления. Однако доминошек должно быть 16, а сейчас их меньше. Поэтому добавим к ним часть доминошек другого направления — из числа тех, что были в изначальном 32-разбиении.



   После этого, однако, может оказаться неясным, в каком из направлений лежали остальные 16 доминошек. Значит, каждая из полученных 16-укладок может быть порождена одним или двумя 32-разбиениями. В то же время каждое 32-разбиение по описанному алгоритму порождает много (более 16) 16-укладок в зависимости от того, какие именно доминошки преобладающего направления мы оставляем. Значит, 16-разбиений больше, чем 32-укладок.

# Решения задач для 9 класса

1. Том и Джерри бегают друг за другом по трассе в виде восьмёрки (см. рисунок). Они бегут в одном направлении и с постоянными скоростями. В начальный момент Джерри был точно над Томом. Через 20 минут Том оказался точно над Джерри, причём ни один из них не успел пробежать полный круг. В момент, когда Джерри пробежал ровно один круг с начала пути, Том наконец догнал его. Сколько времени Том гнался за Джерри?



**Решение.** Пока Джерри пробегает малую петлю, Том пробегает большую; пока Джерри пробегает большую петлю, Том пробегает большую и малую вместе. Обозначим длины большой и малой петель буквами $L$ и $l$ соответственно. Тогда получим, что $L : l = (L + l) : L$. Если обозначить $L : l$ через $x$, то получим: $x = 1 + \frac{1}{x}$, откуда $x^2 = x + 1$. Решая квадратное уравнение (и учитывая, что $x > 0$), получаем, что отношение длин петель равно золотому сечению, то есть числу $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Мы знаем, что за 20 минут Джерри пробежал малую петлю. Значит, большую петлю он пробежал за $20\tau = 10+10\sqrt{5}$ минут, а весь круг — за $20+(10+10\sqrt{5})$ минут. Тут-то Том его и догнал.

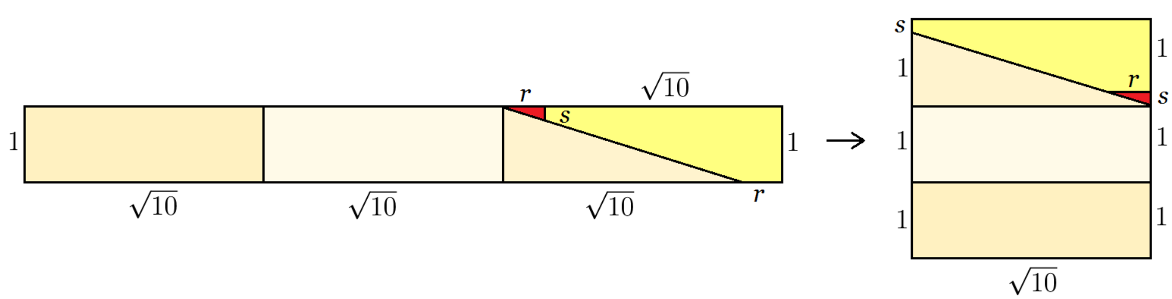
Ответ: $30 + 10\sqrt{5}$ минут.

2. Двое играют в такую игру. Они по очереди называют четырёхзначные числа, у которых нет нулей в записи, а сумма цифр делится на 9. При этом каждое следующее число должно начинаться с той же цифры, на которую кончается предыдущее, например: $3231 - 1539 - 9756 - 6561 \ldots$ Повторять числа нельзя. Тот, кто не может назвать очередное число, проигрывает. Кто из игроков — начинающий или его соперник — может выиграть независимо от игры другого?

**Решение.** См. решение задачи 3 для 6 класса.

3. Докажите, что прямоугольник $1 \times 10$ можно разрезать на 5 частей и составить из них квадрат.

**Решение.** Разрежем прямоугольник так, как показано на рисунке.




Легко видеть, что $r = 10 - 3\sqrt{10}$. Далее, поскольку малый треугольник подобен большому, то $r : s = \sqrt{10} : 1$, откуда $s = \sqrt{10} - 3$. Поэтому из этих частей можно составить квадрат со стороной $\sqrt{10}$, как показано справа.

4. На плоскости отмечены $2n + 1$ точек, причём никакие три точки не лежат на одной прямой, а никакие четыре — на одной окружности. Докажите, что существует окружность, проходящая через три из этих точек, внутри которой лежит $n - 1$ точек и снаружи — тоже $n - 1$.

   **Решение.** Лемма: можно выбрать точки $A$ и $B$ так, что все остальные точки лежат в одной полуплоскости от прямой $AB$.

   Доказательство леммы. Возьмём прямую, относительно которой вообще все точки лежат в одной полуплоскости. Будем параллельно перемещать её к точкам, пока одна из точек (назовём её $A$) не попадёт на прямую. Теперь будем вращать эту прямую вокруг точки $A$ до тех пор, пока на неё не попадёт ещё одна точка набора, которую назовём $B$.

   Для тех, кто знаком с понятием выпуклой оболочки множества точек, заметим, что в качестве $A$ и $B$ подойдут любые две соседние вершины выпуклой оболочки.

   Итак, пусть такие точки $A$ и $B$ выбраны. Для всех остальных точек $X$ углы $AXB$ различны, ведь если для точек $X$ и $Y$ они равны, то точки $A$, $B$, $X$, $Y$ лежат на одной окружности. Упорядочим точки (кроме $A$ и $B$) по увеличению этого угла. Пусть $M$ — средняя из этих точек. Тогда окружность, содержащая точки $A$, $B$, $M$ — искомая.

5. На доске $8 \times 8$ клеток можно расположить несколько доминошек (то есть прямоугольников $2 \times 1$), не накладывающихся друг на друга. Пусть $N$ — количество способов положить так 32 доминошки, а $S$ — количество способов положить так 16 доминошек. Что больше — $N$ или $S$? Способы, которые получаются друг из друга поворотом или отражением доски, считаются различными.

   **Решение.** См. решение задачи 5 для 8 класса.

## Решения задач для 10 класса

1. Сумма цифр натурального числа равна 2017. При этом, какие бы десять подряд идущих цифр числа мы не рассмотрели, все они различны. Найдите первые 10 цифр наименьшего и наибольшего из таких чисел. Обоснуйте ответ.

   **Решение.** Среди каждых десяти подряд идущих цифр все цифры от 0 до 9 встречаются по одному разу, то есть сумма каждых 10 последовательных цифр равна 45. Значит, первая цифра равна одиннадцатой, вторая — двенадцатой и т.д., то есть число состоит из повторяющихся блоков по 10 цифр (последний блок, возможно, неполон).

   Заметим, что $2017 = 44 \cdot 45 + 37$. Значит, число состоит из 44 блоков по 10 цифр и в конце ещё нескольких цифр с суммой 37. Иначе говоря, до 45 блоков (до 450 цифр) не хватает суммы цифр 8, которая может быть набрана одной (8), двумя (35), тремя (521) или четырьмя (5210) цифрами, но не более ($0+1+2+3+4 > 8$). Значит, длина числа — от 446 до 449 цифр.

   Число будет наименьшим, если оно состоит из 446 цифр, причём первые 10 цифр образуют как можно меньшее число. Сумма первых шести цифр должна равняться 37. Первая из них может равняться 2, тогда остальные — 5, 6, 7, 8, 9 (если первая цифра равна 1, то сумма остальных пяти должна быть 36, что невозможно для различных цифр). Следующие четыре цифры — 0, 1, 3, 4, минимальное образованое ими число равно 0134. Наименьшее число начинается с цифр 2567890134.

Число будет наибольшим, если оно состоит из 449 цифр, причём первые девять цифр образуют наибольшее возможное число с суммой цифр 37 (тогда десятая цифра будет равна 8). Максимальное число, образованное первыми девятью цифрами, есть 976543210.

Ответ: первые десять цифр наименьшего числа — 2567890134, наибольшего — 9765432108.

2. Найдите все такие пары действительных чисел $x$ и $y$, для которых

$$25^{x^4-y^2}+25^{y^4-x^2}=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

**Решение.** Заметим, что

$$\frac{25^{x^4-y^2}+25^{y^4-x^2}}{2}\geqslant\sqrt{25^{x^4-y^2}\cdot 25^{y^4-x^2}}$$

(неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим).

Правая часть равна

$$5^{x^4-x^2+y^4-y^2}=5^{(x^2-1/2)^2+(y^2-1/2)^2-1/2}\geqslant 5^{-1/2}=\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Таким образом, в задаче нужно найти $x$ и $y$, при которых неравенство обращается в равенство. Для этого необходимо выполнение следующих условий:

$$25^{x^4-y^2}=25^{y^4-x^2},$$

$$(x^2-1/2)^2+(y^2-1/2)^2=0.$$

Они выполняются при $x^2=y^2=1/2$ (и только в этом случае), что даёт четыре варианта ответа для $x$ и $y$.

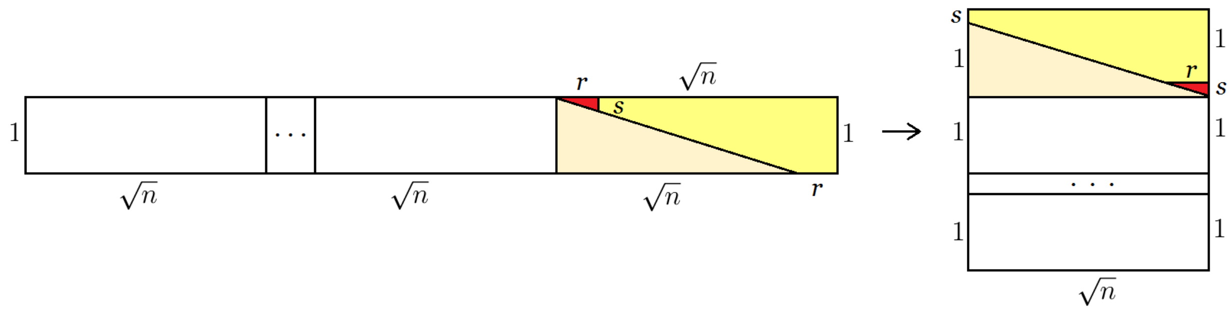
Ответ: $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right);\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right);\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right);\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

3. У Флинта есть пять матросов и 60 золотых монет. Он хочет разложить их по кошелькам, а потом раздать кошельки матросам так, чтобы каждому досталось поровну монет. Но он не знает, сколько матросов останутся в живых к моменту делёжки. Поэтому он хочет разложить монеты так, чтобы их можно было поровну раздать и двоим, и троим, и четверым, и пятерым. Какое наименьшее количество кошельков ему понадобится? Не забудьте доказать, что найденное вами количество — наименьшее.

**Решение.** См. решение задачи 4 для 6 класса.

4. Докажите, что при любом натуральном $n \leqslant 2017$ прямоугольник $1\times n$ можно разрезать на 50 частей и составить из них квадрат.

**Решение.** Отрежем от исходного прямоугольника столько прямоугольников размером $1 \times \sqrt{n}$, чтобы оставшаяся часть имела длину между $\sqrt{n}$ и $2\sqrt{n}$. Поскольку $\sqrt{n} < 45$, то будет отрезано менее 45 прямоугольников. Оставшуюся часть разрежем на три фигуры (большой треугольник, маленький треугольник и пятиугольник), как показано на рисунке.



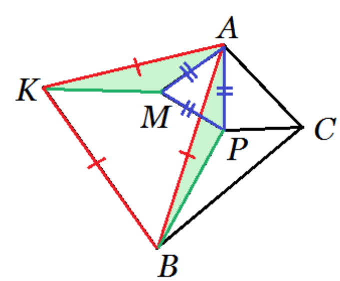

Теперь переложим эти фигуры, как показано справа. (Три непрямоугольных фигуры действительно образуют прямоугольник, поскольку их «косые» стороны имеют раные угловые коэффициенты и одна из них равна сумме двух других.) В результате получился прямоугольник, одна из сторон которого равна $\sqrt{n}$. Поскольку его площадь $n$, то другая сторона тоже равна $\sqrt{n}$, то есть это квадрат. Заметим, что он сооставлен менее чем из 48 частей. Разрезав произвольным образом некоторые из них на меньшие части, можно получить 50 частей.

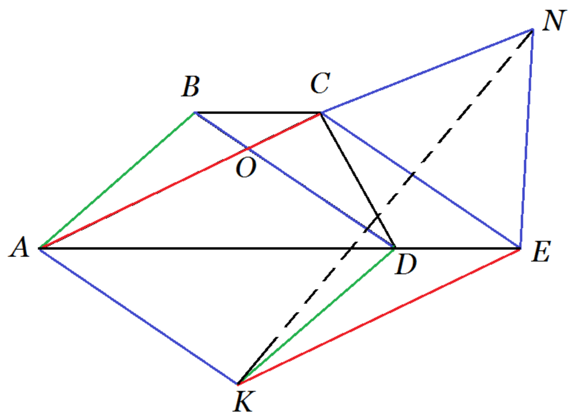
5. Угол между диагоналями трапеции равен $60°$. Докажите, что сумма длин боковых сторон не меньше, чем длина большего основания.

**Решение.** Пусть основания трапеции — $AD$ и $BC$, а диагонали пересекаются в точке $O$. Рассмотрим сначала более сложный случай, когда $\angle COD = 60°$.

Лемма. Пусть на стороне произвольного треугольника $ABC$ построен вовне правильный треугольник $ABK$. Тогда для любой точки $P$ имеет место неравенство $PA + PB + PC \geqslant CK$.

Доказательство леммы: построим правильный треугольник $APM$, ориентированный как $ABK$. Тогда треугольники $AKM$ и $ABP$ равны по двум сторонам и углу, и $PA + PB + PC = KM + MP + PC \geqslant CK$.



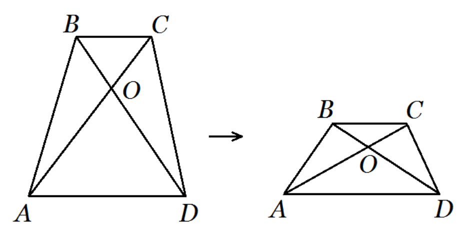



Теперь построим параллелограммы $BCED$ и $ABDK$. Треугольник $KDE$ получается из $ABC$ переносом на вектор $\overrightarrow{BD}$, поэтому $AC = KE$. В силу параллельности $\angle CEK = \angle AOB = 60°$, $\angle ACE = \angle AOD = 120°$.
Имея в виду применить лемму, отложим правильный треугольник $CNE$ вовне $CKE$. Треугольники $KEN$ и $ACE$ равны по двум сторонам и углу 120° между ними, поэтому $KN = AE$. Пользуясь леммой, имеем

$$AB + CD = (DC + DK + DE) - DE \geqslant KN - DE = AE - DE = AD,$$

что и требовалось доказать.

Теперь рассмотрим более простой случай, когда $\angle AOD = 60°$. Приведём этот случай к предыдущему с помощью сжатий. А именно, будем сдвигать $BC$ к $AD$ в направлении, перпендикулярном $AD$ (на рисунке — вниз). При этом углы $CAD$ и $CDA$ уменьшаются, значит, $\angle AOD$ увеличивается. Можно привести $BC$ в такое положение, что $\angle AOD = 120°$. По уже доказанной части задачи, в этом случае сумма боковых сторон будет не меньше основания. Но боковые стороны в процессе сжатия уменьшились (по теореме Пифагора), а основание не изменилось. Значит, до сжатия это неравенство тем более выполнялось.

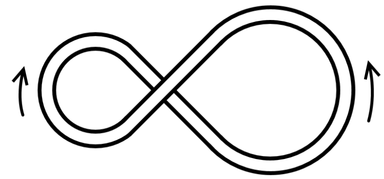



# Решения задач для 11 класса

1. Двое играют в такую игру. Они по очереди называют четырёхзначные числа, у которых нет нулей в записи, а сумма цифр делится на 9. При этом каждое следующее число должно начинаться с той же цифры, на которую кончается предыдущее, например: 3231 – 1539 – 9756 – 6561 ... Повторять числа нельзя. Тот, кто не может назвать очередное число, проигрывает. Кто из игроков — начинающий или его соперник — может выиграть независимо от игры другого?

**Решение.** См. решение задачи 3 для 6 класса.

2. Том и Джерри бегают друг за другом по трассе в виде восьмёрки (см. рисунок). Они бегут в одном направлении и с постоянными скоростями. В начальный момент Джерри был точно над Томом. Через 20 минут Том оказался точно над Джерри, причём ни один из них не успел пробежать полный круг. В момент, когда Джерри пробежал ровно один круг с начала пути, Том наконец догнал его. После этого они продолжили бежать в том же направлении. Окажется ли ещё когда-нибудь один из них над другим? Тома и Джерри считать точками, трассу — линией.



**Решение.** Пока Джерри пробегает малую петлю, Том пробегает большую; пока Джерри пробегает большую петлю, Том пробегает большую и малую вместе. Обозначим длины большой и малой петель буквами $L$ и $l$ соответственно. Тогда получим, что $L : l = (L + l) : L$. Если обозначить $L : l$ через $x$, то получим: $x = 1 + \frac{1}{x}$, откуда $x^2 = x + 1$. Решая квадратное уравнение (и учитывая, что $x > 0$), получаем, что отношение длин петель равно золотому сечению, то есть числу $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Поскольку за одно и то же время Джерри пробегает малую петлю, а Том — большую, то отношение их скоростей тоже равно $\tau$.

Заметим, что отношение меньшей петли к большей равно $\frac{1}{\tau} = \tau - 1$, а отношение меньшей петли к полному кругу — $\frac{1}{\tau+1} = 2-\tau$ (использованные здесь свойства золотого сечения легко доказать).

Пусть теперь Том и Джерри повторно оказались друг над другом. Это значит, с момента встречи один пробежал целое число ($k$) кругов, другой — целое число ($m$) кругов плюс малую петлю, то есть $m + 2 - \tau$ кругов. Отношение пройденных расстояний должно равняться отношению скоростей, то есть золотому сечению. То есть либо $k\tau = m + 2 - \tau$, либо $\frac{k}{\tau} = m + 2 - \tau$. Первое приводит к равенству $\tau(k + 1) = m + 2$, второе — учитывая, что $\tau^2 = \tau + 1$ — к равенству $k + 1 = (m + 1)\tau$. И то и другое невозможно, поскольку $k \geqslant 0$, $m \geqslant 0$ и $\tau$ иррационально.

Ответ: не окажется.

3. На плоскости отмечены $2n + 1$ точек, причём никакие три точки не лежат на одной прямой, а никакие четыре — на одной окружности. Докажите, что существует окружность, проходящая через три из этих точек, внутри которой лежит $n - 1$ точек и снаружи — тоже $n - 1$.

**Решение.** См. решение задачи 4 для 9 класса.

4. Угол между диагоналями трапеции равен $60°$. Докажите, что сумма длин боковых сторон не меньше, чем длина большего основания.

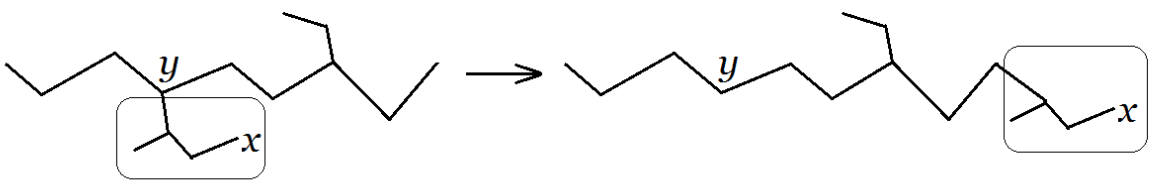
**Решение.** См. решение задачи 5 для 10 класса.

5. В стране 100 городов, между ними действует несколько беспосадочных авиалиний так, что от любого города до любого можно добраться, возможно, с пересадками. Для каждой пары городов вычислили наименьшее количество перелётов, необходимых чтобы

добраться от одного до другого. Назовём транспортной затруднённостью страны сумму квадратов этих 4950 чисел. Какое наибольшее значение может принимать транспортная затрудённость? Ответ должен быть дан в виде числа (в десятичной системе счисления).

**Решение.** Сначала докажем, что транспортная затруднённость наибольшая в случае, когда города связаны «по цепочке».

Действительно, можно считать граф деревом (иначе выкинем часть рёбер так, чтобы осталось дерево — затруднённость увеличится). Выберем в дереве самый длинный путь. Допустим, что есть вершины, не входящие в этот путь. Тогда среди них найдётся висячая вершина $x$ (то есть вершина, в которую ведёт только одно ребро). Пусть $y$ — ближайшая к $x$ вершина самого длинного пути. Перенесём всю «ветку», отходящую от $y$ и содержащую $x$, в конец самого длинного пути, более удалённый от $y$. Заметим, что в результате попарные расстояния между вершинами в пределах «ветки» не изменились, расстояния между вершинами вне ветки — тоже. При этом легко видеть, что для каждой вершины ветки сумма квадратов расстояний до всех остальных вершин возросла. Действительно, если $k$ — расстояние от некой вершины $z$ ветки до $y$, то набор расстояний от $z$ до вершин вне ветки (включая $y$) был $k$, $k+1$, $k+1$, $k+2$, $k+2$, $\ldots, k+s$, $k+s$, $k+s+1$, $k+s+2$, $\ldots, k+s+t$, а стал $k$, $k+1$, $k+2$, $k+3, \ldots$.




Такими «перевешиваниями» можно привести граф к виду цепочки, причём затруднённость всё время будет возрастать; значит, для цепочки она максимальна.

Теперь посчитаем затруднённость для «цепочки». Задача сводится к нахождению суммы $99 \cdot 1^2 + 98 \cdot 2^2 + 97 \cdot 3^2 + \ldots + 1 \cdot 99^2$.

Обозначим $S_n^2 = 1^2+2^2+\ldots+n^2$, $S_n^3 = 1^3+2^3+\ldots+n^3$. Как известно, $S_n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $S_n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ (это можно доказать по индукции).

Заметим, что искомая сумма равна

$$100 \cdot (1^2 + 2^2 + ... + 99^2) - (1 \cdot 1^2 + 2 \cdot 2^2 + \ldots + 99 \cdot 99^2) = 100 S_{99}^2 - S_{99}^3 =$$

$$= 100 \cdot \frac{99 \cdot (99+1) \cdot (2 \cdot 99 + 1)}{6} - \Big(\frac{99 \cdot (99+1)}{2}\Big)^2 = 32835000 - 24502500 = 8332500.$$