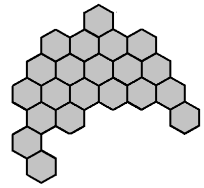
Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»

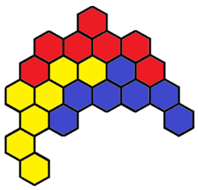
2016/2017 год. Первый тур

Решения задач для 5 класса

1. Покажите, как разрезать эту фигуру на три равных части.

   (Части называются равными, если их можно наложить друг на друга так, чтобы они совпали.)





Решение.

2. Одно натуральное число на 1 больше другого. Может ли их произведение оканчиваться на 2017?

   Решение. Из двух последовательных чисел одно будет чётным. Произведение чётного и нечётного будет являться чётным числом, то есть должно заканчиваться на четную цифру. 7 — нечётная цифра, значит, такого быть не может.

3. На столе лежат грузы массой 180, 181, 182, ..., 200 граммов (по одному грузу каждой массы). Можно ли выбрать несколько из них так, чтобы их суммарный вес равнялся 1 килограмму?

   Решение. Сумма масс шести самых лёгких грузов $180+181+182+183+184+185 = 1095 > 1000$ г, а сумма пяти самых тяжёлых $200+199+198+197+196 = 990 < 1000$ г. Таким образом, 6 и более грузов всегда будут весить больше 1 кг, а 5 и менее грузов — меньше 1 кг. Значит, нельзя выбрать несколько грузов массой ровно 1 кг.

4. На доске написаны 20 нулей и 17 единиц. За один ход можно стереть любые два числа и вместо них записать их сумму. Ход называется важным, если полученное в результате этого хода число было больше, чем каждое из стёртых. Сколько важных ходов будет сделано, прежде чем на доске останется единственное число?

   Решение. Согласно условиям задачи, ход будет являться важным лишь тогда, когда полученное в результате этого хода число будет больше, чем каждое из стёртых, то есть когда оба стираемых числа натуральные (не нули). То есть важные ходы — это те и только те, при которых количество ненулевых чисел уменьшается на единицу (при остальных ходах оно остаётся неизменным). Изначально на доске 17 ненулевых чисел, а в конце остаётся одно, поэтому таких ходов будет 16.

5. В пакете лежат несколько леденцов с разными вкусами, произведённых в разных странах. Любые два леденца в пакете различаются либо вкусом, либо страной производства, либо и тем и другим. Если два леденца в пакете различаются как по вкусу, так и по стране, то в пакете найдётся ровно один леденец, отличающийся от одного из них только вкусом, а от другого только страной. Известно, что в пакете ровно 5 леденцов со вкусом яблока и ровно 7 леденцов из России. Чему может быть равно число всех леденцов в пакете? Найдите все варианты ответа на вопрос.

   Решение. Составим прямоугольную таблицу, строки которой соответствуют странам, а столбцы вкусам леденцов из пакета. Ясно, что в ней не меньше 5 строк и не меньше 7 столбцов. На пересечении строки и столбца запишем 1, если в пакете есть леденец выбранного вкуса из выбранной страны, и 0 в противном случае. Согласно условию, в строке «Россия» ровно 7 единиц, в столбце «яблоко» ровно 5 единиц, а число всех леденцов в пакете равно количеству единиц во всей таблице. Наконец, ещё одно требование из условия означает, что если две единицы стоят в разных строках и разных столбцах, то ровно одна из двух оставшихся клеток на пересечении этих же строк и столбцов занята единицей, а другая из них занята нулём.

   Выделим строки, в которых стоит 1 в столбце «яблоко», и столбцы, в которых стоит 1 в строке «Россия». Допустим, что в пакете нет леденца со вкусом яблока, произведённого в России. Тогда единицы должны стоять на пересечении каждой выделенной строки и каждого выделенного столбца. Легко понять, что это противоречит условию. Значит, в пакете есть леденец со вкусом яблока, произведённый в России. Ему соответствует единица на пересечении выделенной строки «Россия» и выделенного столбца «яблоко». Но тогда на пересечении любой другой выделенной строки и любого другого выделенного столбца должен стоять ноль.

   Итак, всего на пересечениях выделенных строки с выделенными столбцами стоит $5 + 7 - 1 = 11$ единиц. Допустим, что в таблице есть ещё хотя бы одна единица (в пакете есть леденец не из России не со вкусом яблока). Она стоит на пересечении невыделенной строки и невыделенного столбца. Значит, нули стоят как на пересечении этой строки со столбцом «яблоко», так и на пересечении этого столбца со строкой «Россия». Но по условию в одном из этих пересечений должна стоять единица. Значит, в таблице нет ни невыделенных строк, ни невыделенных столбцов.

   Ответ: в пакете 11 леденцов.

6. Вдоль дороги стоят столбики, пронумерованные по порядку: 0, 1, 2, 3 и т.д. У столбика 0 стоит наездник на дрессированной лошади. Когда наездник называет натуральное число, лошадь прыгает вперёд к ближайшему столбику, номер которого делится на это число. Наездник назвал числа от 1 до 10 по одному разу в каком-то порядке. Каков максимально возможный номер столбика, у которого могла оказаться лошадь? Докажите, что он действительно максимален. (Пример: если наездник называет числа в порядке 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, то путь лошади таков: 10, 18, 24, 28, 30, 35, 36, 39, 40, 41.)

   Решение. Оценка. Среди любых десяти последовательных чисел найдется число, которое делится на 10, из любых девяти чисел последовательных найдётся кратное

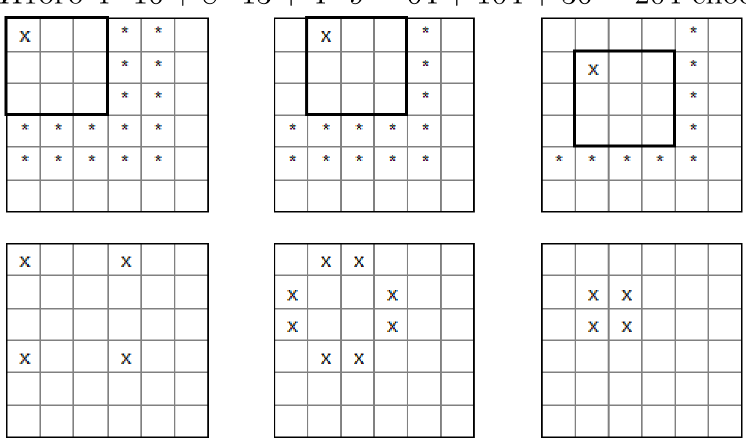
9 и т. д. (вплоть до 1). Таким образом, если названо число 10, то наездник может увеличить номер столбика не более чем на 10, и т. д. Значит, максимальный номер столбика, у которого окажется наездник, не превосходит $1 + 2 + 3 + \ldots + 10 = 55$.

Пример. Пусть названы числа: 6, 2, 1, 9, 3, 7, 4, 8, 10, 5.
Тогда путь лошади таков: 6, 8, 9, 18, 21, 28, 32, 40, 50, 55.

7. Лиза хочет закрасить на доске 6×6 два квадрата разного размера так, чтобы их контуры шли по границам клеток и они не имели общих клеток. Сколькими способами она может это сделать? Способы, которые получаются друг из друга поворотом доски, считаются различными.

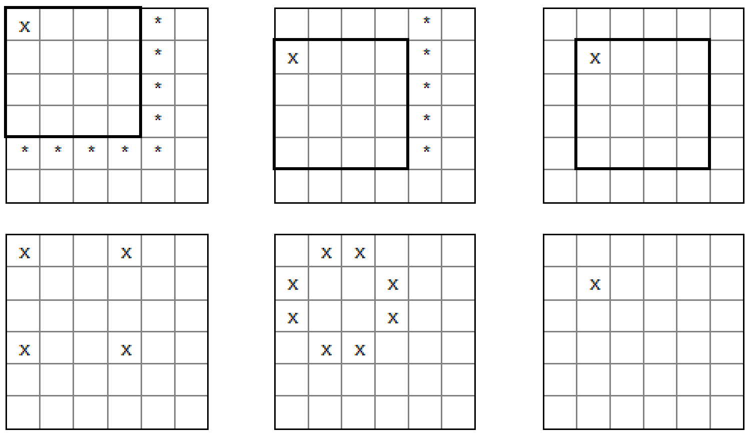
Решение. Заметим, что квадрат 5×5 можно расположить 4 способами (его верхняя левая клетка может быть любой клеткой в верхнем левом квадрате 2×2), квадрат 4×4 — 9 способами (верхняя левая клетка находится в верхнем левом квадрате 3×3), квадрат 3×3 — 16 способами, квадрат 2×2 — 25 способами.
После того, как мы расположили первый квадрат, нужно разместить второй (если это квадрат 1×1, то количество способов равно количеству свободных клеток; если больше, то оно зависит от положения первого квадрата, нужно перебирать случаи).

Таким образом, возможны следующие варианты.
а) Один квадрат 2×2, второй 1×1: $25 \cdot 32 = 800$ способов.
б) Один квадрат 3×3, второй 1×1: $16 \cdot 27 = 432$ способа.
в) Один квадрат 3×3, второй 2×2. На рисунке показаны все принципиально различные положения самого большого квадрата (ниже крестиками показано, где может находиться левый верхний угол этого квадрата для получения аналогичной картинки). Звёздочками показано, где может находиться левый верхний угол квадрата 2×2.
Итого $4 \cdot 16 + 8 \cdot 13 + 4 \cdot 9 = 64 + 104 + 36 = 204$ способа.



$4 \cdot 16$ $\quad$ $8 \cdot 13$ $\quad$ $4 \cdot 9$

г) Один квадрат 4×4, второй 1×1: $9 \cdot 20 = 180$ способов.
д) Один квадрат 4×4, второй 2×2: $4 \cdot 9 + 4 \cdot 5 + 1 \cdot 0 = 56$ способов.



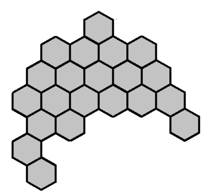
$4 \cdot 9$ $\quad$ $4 \cdot 5$ $\quad$ $1 \cdot 0$

e) Один квадрат 5×5, второй 1×1: $4 \cdot 11 = 44$ способа.
Всего получим $800 + 432 + 204 + 180 + 56 + 44 = 1716$ способов.
Ответ: 1716 способов.

Решения задач для 6 класса

1. Покажите, как разрезать эту фигуру на три равных части.

   (Части называются равными, если их можно наложить друг на друга так, чтобы они совпали.)



   Решение: см. задачу 1 для 5 класса.

2. Одно натуральное число на 2 больше другого. Может ли их произведение оканчиваться на 2017?

   Решение. Произведение двух чисел может оканчиваться на 7 только в том случае, когда одно из них оканчивается на 7, а второе на 1 или одно на 3, а второе на 9. В обоих этих случаях числа будут отличаться больше, чем на 2, значит, произведение на 2017 заканчиваться не может.

3. Алексей решил купить два комплекта редких марок (для себя и друга). Один комплект состоит из трёх марок А, Б и В. В интернете он нашёл три магазина, но каждый из них продавал марки парами. Первый магазин продавал комплект «марка А + марка Б» за 200 рублей, второй продавал комплект «марка Б + марка В» за 300 рублей, а в третьем комплект «марка В + марка А» стоил x рублей. Алексей подсчитал минимальное количество денег, необходимое для покупки. Потом, однако, он подумал, что хотел бы посетить только два каких-нибудь магазина из этих трёх. Из-за этого

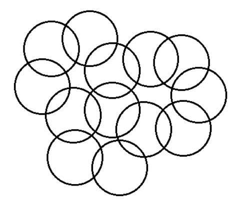
условия минимально необходимое количество денег увеличилось на 120 рублей. Чему мог равняться x?

Решение. Чтобы купить два комплекта марок, Алексей посетит минимум два магазина. Но по условию, посетив два магазина, он ухудшил ситуацию, значит, первоначально он планировал посетить все три магазина. Отсюда следует, что первоначально он планировал потратить $200 + 300 + x = 500 + x$ рублей, где рублей — стоимость комплекта в третьем магазине.

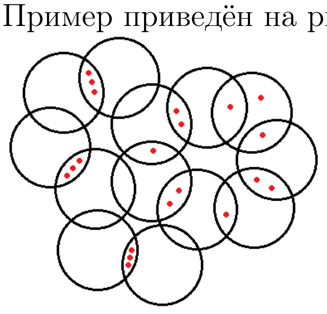
Рассмотрим варианты посещения двух магазинов:
а) Допустим, он посетил 1-й и 2-й магазины, тогда он потратил $2(200 + 300) = 1000$ рублей. Для выполнения условия задачи это должно равняться $1000 = (500+x)+120$, отсюда $x = 380$.
б) Алексей посетил 1-й и 3-й магазины, тогда он потратил $2(200+x) = 400+2x$ рублей. Чтобы выполнялось условие задачи, это должно равняться $(500 + x) + 120$, отсюда $x = 220$.
в) Алексей посетил 2 и 3 магазины, тогда он потратил $2(300 + x) = 600 + 2x$ рублей, что должно равняться $(500+x)+120$ рублей, значит $x = 20$. В этом случае получаем, что покупка в 1-м и 3-м магазинах дешевле, чем в трёх, значит, этот вариант нам не подходит.

Ответ: в третьем магазине комплект мог стоить 380 или 220 рублей.

4. На плоскости расположены круги, как показано на рисунке. Внутри каждого круга поставлены три точки, а на границах кругов нет ни одной точки. Каково минимально возможное общее количество точек?



Решение. Оценка. Если точка принадлежит n кругам, будем говорить, что у нее кратность n. Понятно, что сумма кратностей всех точек равна $3 \cdot 13 = 39$, а кратность каждой точки не превосходит 2. Поэтому общее количество точек не меньше $39/2$, то есть не меньше 20.
Пример приведён на рисунке.



5. В пакете лежат несколько леденцов с разными вкусами, произведённых в разных странах. Любые два леденца в пакете различаются либо вкусом, либо страной производства, либо и тем и другим. Если два леденца в пакете различаются как по вкусу, так и по стране, то в пакете найдётся ровно один леденец, отличающийся от одного из них только вкусом, а от другого только страной. Известно, что в пакете ровно 5 леденцов

со вкусом яблока и ровно 7 леденцов из России. Чему может быть равно число всех леденцов в пакете? Найдите все варианты ответа на вопрос.

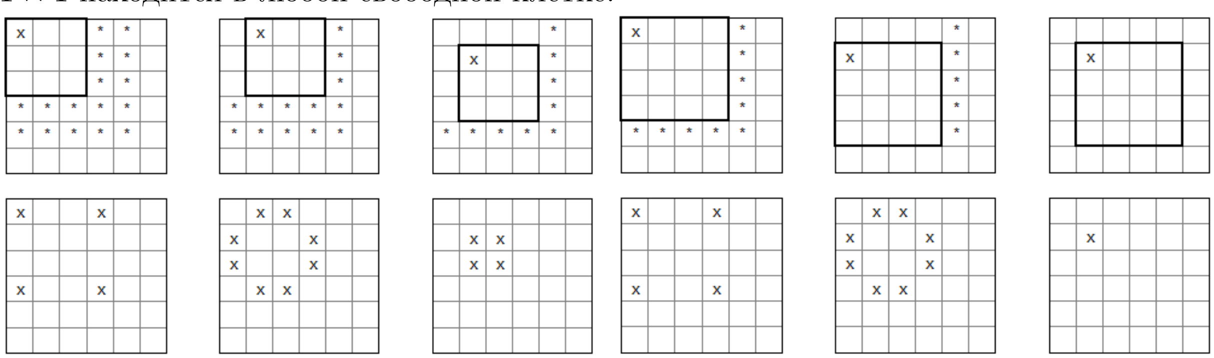
Решение: см. задачу 5 для 5 класса.

6. Вдоль дороги стоят столбики, пронумерованные по порядку: 0, 1, 2, 3 и т.д. У столбика 0 стоит наездник на дрессированной лошади. Когда наездник называет натуральное число, лошадь прыгает вперёд к ближайшему столбику, номер которого делится на это число. Наездник назвал числа от 1 до 10 по одному разу в каком-то порядке. Каков максимально возможный номер столбика, у которого могла оказаться лошадь? Докажите, что он действительно максимален. (Пример: если наездник называет числа в порядке 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, то путь лошади таков: 10, 18, 24, 28, 30, 35, 36, 39, 40, 41.)

   Решение: см. задачу 6 для 5 класса.

7. Лиза хочет закрасить на доске 6×6 три квадрата так, чтобы их контуры шли по границам клеток, никакие два квадрата не имели общих клеток и у всех трёх квадратов был разный размер. Сколькими способами она может это сделать? Способы, которые получаются друг из друга поворотом доски, считаются различными.

   Решение. Одновременно закрашенными могут быть квадраты 1×1, 2×2 и 4×4 или 1×1, 2×2 и 3×3. На рисунке показаны все принципиально различные положения самого большого квадрата (ниже крестиками показано, где может находиться левый верхний угол этого квадрата для получения аналогичной картинки). Звёздочками показано, где может находиться левый верхний угол квадрата 2×2. Последний квадрат 1×1 находится в любой свободной клетке.



$4 \cdot 16 \cdot 23$ $8 \cdot 13 \cdot 23$ $4 \cdot 9 \cdot 23$ $4 \cdot 9 \cdot 16$ $4 \cdot 5 \cdot 16$ 0

   Рассматривая все возможные случаи, получим, что количество вариантов равно $4 \cdot 16 \cdot 9 + 4 \cdot 16 \cdot 5 + 4 \cdot 9 \cdot 23 + 4 \cdot 16 \cdot 23 + 4 \cdot 13 \cdot 23 + 4 \cdot 13 \cdot 23 = 5588$.

Решения задач для 7 класса

1. Может ли сумма 44 натуральных чисел быть в 4 раза больше, чем их произведение?

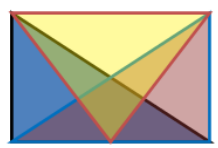
Решение. Да. Пример: 3, 2, 2 и сорок одна единица.

2. Одно натуральное число на 1 больше другого. Может ли их произведение оканчиваться на 2016?

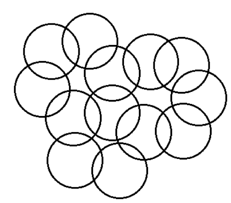
   Решение. Нет. Рассмотрим пары цифр, на которые оканчиваются эти числа. Среди них всего две пары, при перемножении которых может получиться последняя цифра 6: 2, 3 и 7, 8.

   Рассмотрим эти случаи:
   $(10x+2)(10x+3) = 100x^2 + 50x + 6$;
   $(10x+7)(10x+8) = 100x^2 + 150x + 56$.
   Очевидно, что в обоих случаях предпоследняя цифра может быть равной только 0 или 5.

3. Можно ли нарисовать три трегольника так, чтобы их пересечение и объединение были выпуклыми четырёхугольниками? Четырёхугольник называется выпуклым, если обе его диагонали проходят внутри него.

   Решение. Да, можно, например, вот так: 

4. На плоскости расположены круги, как показано на рисунке. Внутри каждого круга поставлены три точки, а на границах кругов нет ни одной точки. Каково минимально возможное общее количество точек?



   Решение: см. задачу 4 для 6 класса.

5. На столе лежат грузы массой 150, 151, 152, ..., 200 граммов (по одному грузу каждой массы). Петя может выбрать один или несколько грузов и взвесить их. Сколько различных масс он может получить таким образом?

   Решение. С помощью одного груза можно взвесить от 150 до 200 граммов.

   С помощью двух: минимум $150 + 151 = 301$, максимум $199 + 200 = 399$. Все промежуточные варианты возможны (увеличиваем больший из грузов до максимума, потом увеличиваем меньший — в результате сумма будет увеличиваться на 1, пока не достигнет максимума).

   С помощью трёх: минимум $150 + 151 + 152 = 453$, максимум $198 + 199 + 200 = 597$.

   С помощью четырёх: минимум $150+151+152+153 = 606$, максимум $200+199+198+197 = 794$.

   С помощью пяти: минимум $150+151+152+153+154 = 760$. Видим, что максимальный вес четырёх грузов превосходит минимальный вес пяти грузов.

Аналогично будет происходить далее: при $4 \leqslant n \leqslant 46$ максимальный вес n грузов превосходит минимальный вес $n+1$ груза. Действительно, в максимальный n-набор входят грузы 197, 198, 199, 200. Если заменить их на грузы 150, 151, 152, 153, 154 (которые в этот n-набор не входят), то получится $(n+1)$-набор с меньшей суммой.

Для количества грузов от 47 до 51 ситуация аналогична ситуации с количеством от 0 до 4 в силу понятной симметрии (взять s грузов $\iff$ не взять $51 - s$ грузов). Исключение состоит в том, что комбинация из 0 грузов недопустима, а комбинация из 51 груза допустима. Максимально возможный вес равен $150 + \ldots + 200 = 175 \cdot 51 = 8925$.

Таким образом, среди чисел от 1 до 8925 можно получить все, кроме следующих:

- числа, большие 0, но меньшие 150 (149 штук);
- числа, большие 200, но меньшие 301 (100 штук);
- числа, большие 399, но меньшие 453 (53 штуки);
- числа, большие 597, но меньшие 606 (8 штук);
- а также «симметричные им» числа (их тоже $149 + 100 + 53 + 8 = 310$ штук).

Таким образом, из количества чисел от 1 до 8925 нужно вычесть $2 \cdot 310$ «недостижимых» чисел. Итого $8925 - 620 = 8305$ чисел.

6. Лиза хочет закрасить на доске 6×6 три квадрата так, чтобы их контуры шли по границам клеток, никакие два квадрата не имели общих клеток и у всех трёх квадратов был разный размер. Сколькими способами она может это сделать? Способы, которые получаются друг из друга поворотом доски, считаются различными.

   Решение: см. задачу 6 для 6 класса.

7. В школе для девочек любые две ученицы либо дружат, либо враждуют между собой. Школа называется успешной, если выполняется хотя бы одно из следующих условий:
   1) существуют 100 девочек $A_1, A_2, \ldots, A_{100}$ таких, что A_1 дружит с A_2, A_2 дружит с A_3, …, A_{99} дружит с A_{100};
   2) существуют 7 девочек $B_1, \ldots, B_7$ таких, что B_1 враждует с B_2, B_3 — с B_4, а B_6 враждует с B_5 и B_7.
   Найдите максимальное количество учениц, при котором школа может не оказаться успешной.

   Решение. Ответ: 101.

   Пример. Пусть 99 девочек попарно дружат, а ещё 2 девочки враждуют со всеми. Очевидно, что в каждой из трёх групп $B_1 - B_2$, $B_3 - B_4$, $B_5 - B_6 - B_7$, должна быть хотя бы одна девочка из двух враждующих. Противоречие.

   Докажем, что группа из 102 девочек всегда успешна. Если среди них никто ни с кем не дружит, то можно выбрать любых 7 девочек в качестве B_1˘B_7.
   В противном случае выделим максимальную по длине цепочки дружащих девочек. Если её длина 100 или больше, то группа успешна. В противном случае у нас осталось не менее 3 девочек (назовём их «злыми»), для каждой из которой выполнены следующие условия:

(1) она враждует с первой и последней девочкой в цепочке дружащих (иначе можно было бы увеличить цепочку за её счёт);
(2) ни для каких двух девочек, идущих в цепочке подряд, она не дружит с ними обеими (иначе можно было бы увеличить цепочку, вставив злую девочку между двумя девочками в цепочке, с которыми она дружит).

Заметим, что если количество девочек в доброй цепочке 7 или более, то по условию (2) для любой злой девочки в цепочке найдётся не менее двух девочек, помимо начала и конца цепочки, с которыми она враждует. Тогда обозначим любых трёх злых девочек как B_1, B_3 и B_6. К B_1 и B_3 подберём по паре внутри цепочки, а в качестве B_5 и B_7 возьмём начало и конец цепочки.
Пусть в дружащей цепочке менее 7 человек. Выберем из злых девочек две произвольных враждующих пары. Если это сделать невозможно, то у нас осталось не менее 92 злых девочек, попарно дружащих между собой. Очевидно, что из них можно выбрать дружащую цепочку длины больше 7. Противоречие.

Решения задач для 8 класса

1. Может ли сумма 44 натуральных чисел быть в 4 раза больше, чем их произведение?
Решение: см. задачу 1 для 7 класса.

2. Из книжки выпал фрагмент, состоящий из 96 листов (каждый лист — это пара страниц). Может ли сумма номеров всех этих страниц равняться 20170?

Решение. Нет. Сумма номеров страниц на двух листах подряд даёт остаток 2 при делении на 4 (так как содержит все остатки от деления на 4). Следовательно, сумма всех номеров на 96 листах будет делиться на 4, а 20170 не делится.

3. Пусть a, b, c, d, e, f — положительные числа. Какие значения может принимать выражение
$$\frac{ab}{(f+a)(b+c)}+\frac{cd}{(b+c)(d+e)}+\frac{ef}{(d+e)(f+a)}?$$

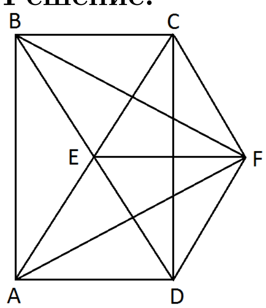
Решение. После приведения к общему знаменателю получаем выражение:
$$\frac{abd+abe+acd+cdf+bef+cef}{(f+a)(b+c)(d+e)}.$$

Очевидно, что при положительных a, b, c, d, e, f выражение строго больше 0. При раскрытии скобок в знаменателе получаем все слагаемые числителя плюс ещё два, поэтому выражение меньше 1.

Докажем, что любое значение из $(0;1)$ можно получить. Пусть $a = c = 0$, $b = e = f = 1$, тогда исходное выражение определено и равно $\frac{1}{1+d}$. Очевидно, что это выражение принимает любое значение из промежутка $(0;1)$. Однако a и c не могут быть равными 0. Делая их сколь угодно малыми, получаем выражение сколь угодно близкое к $\frac{1}{1+d}$.

4. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке E. Биссектрисы углов DAE и EBC пересекаются в точке F. Найдите величину угла AFB, если $ECFD$ — параллелограмм.

   Решение.

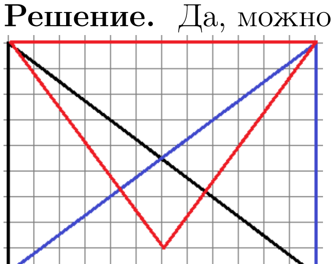
   Поскольку $EFCD$ — параллелограмм, то $ED||FC$, и $\angle CFB = \angle EBF$; значит, $\angle CFB = \angle CBF$, и треугольник FBC равнобедренный. Обозначим длину BC через x, тогда и $FC = BC = x$. Поскольку $ABCD$ — тоже параллелограмм, то $AD = BC = x$; аналогичные рассуждения дают $FD = AD = x$. Далее, $DFCE$ — параллелограмм, так что $DE = FC = x$, $CE = FD = x$. Далее, $BE = DE = x$, $AE = CE = x$ (диагонали параллелограмма $ABCD$ делятся пополам точкой пересечения). У четырёхугольника $BECF$ стороны BE и FC параллельны и равны x, поэтому он — тоже параллелограмм (и даже ромб, поскольку $BC = CF$). Значит, $FE = BC = x$. Таким образом, треугольник EFC равносторонний, и $CFE = 60°$. Диагональ BF делит этот угол пополам (свойство ромба), то есть $BFE = 30°$. Аналогично $DFE = 30°$, итого угол AFB равен $60°$. Замечание. Попутно выясняется, что $ABCD$ — прямоугольник, поскольку его диагонали равны.

5. На столе лежат грузы массой 150, 151, 152, ..., 200 граммов (по одному грузу каждой массы). Петя может выбрать один или несколько грузов и взвесить их. Сколько различных масс он может получить таким образом?

   Решение: см. задачу 5 для 7 класса.

6. Три трегольника расположены так, что их пересечение и объединение — четырёхугольники. Могут ли эти два четырёхугольника иметь вместе 6 прямых углов?

   Решение. Да, можно, например, вот так:

Заметим, что боковые стороны красного треугольника перпендикулярны гипотенузам чёрного и синего (исходя из их угловых коэффициентов).

7. В школе для девочек любые две ученицы либо дружат, либо враждуют между собой. Школа называется успешной, если выполняется хотя бы одно из следующих условий: 1) существуют 100 девочек $A_1, A_2, \ldots, A_{100}$ таких, что A_1 дружит с A_2, A_2 дружит с A_3, …, A_{99} дружит с A_{100};
2) существуют 7 девочек $B_1, \ldots, B_7$ таких, что B_1 враждует с B_2, B_3 — с B_4, а B_6 враждует с B_5 и B_7.
Найдите максимальное количество учениц, при котором школа может не оказаться успешной.

   Решение: см. задачу 7 для 7 класса.

Решения задач для 9 класса

1. Из книжки выпал фрагмент, состоящий из 96 листов (каждый лист — это пара страниц). Может ли сумма номеров всех этих страниц равняться 20170?

   Решение: см. задачу 2 для 8 класса.

2. Все вершины 789-угольника отмечены красным цветом, а внутри него лежат ещё 615 красных точек. Никакие три красных точки не лежат на одной прямой. Многоугольник разбит на треугольники, вершинами которых являются все красные точки, и только они. Сколько этих треугольников?

   Решение. Посчитаем сумму углов всех треугольников. Сумма углов исходного 789-угольника даёт $(789-2)\cdot 180^\circ$, каждая красная точка внутри треугольника даёт ещё 180°.
   Итого $(789-2)\cdot 180^\circ + 615\cdot 360^\circ = 180^\circ\cdot(787+2\cdot 615) = 180^\circ\cdot 2017$.

   Ответ: 2017 треугольников.

3. Пусть a, b, c, d, e, f — положительные числа. Какие значения может принимать выражение
$$\frac{ab}{(f+a)(b+c)} + \frac{cd}{(b+c)(d+e)} + \frac{ef}{(d+e)(f+a)}?$$

   Решение: см. задачу 3 для 8 класса.

4. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке E. Биссектрисы углов DAE и EBC пересекаются в точке F. Найдите величину угла AFB, если $ECFD$ — параллелограмм.

   Решение: см. задачу 4 для 8 класса.

5. Диагонали граней почтового ящика равны 4, 6 и 7 дециметрам. Поместится ли мяч диаметром 2 дециметра в такой ящик?

   Решение. Почтовый ящик имеет форму прямоугольного параллелепипеда с рёбрами a, b, c. Теорема Пифагора приводит к следующей системе уравнений:
   $$\begin{cases} a^2 + b^2 = 16 \\ a^2 + c^2 = 36 \\ b^2 + c^2 = 49 \end{cases}$$
   Сложив уравнения и поделив сумму на два, получим: $a^2 + b^2 + c^2 = 101/2$, откуда $a^2 = (a^2 + b^2 + c^2) - (b^2 + c^2) = 3/2$. Следовательно, $a = \sqrt{3/2} < 2$. Значит, одно из рёбер коробки меньше диаметра мяча, поэтому мяч не влезает.

6. Алексей решил купить три комплекта редких марок (для себя и двух друзей). Один комплект состоит из трёх марок А, Б и В. В интернете он нашёл три магазина, но каждый из них продавал марки парами. Первый магазин продавал комплект «марка А + марка Б» за 200 рублей, второй продавал комплект «марка Б + марка В» за 300 рублей, а в третьем комплект «марка В + марка А» стоил x рублей. Алексей подсчитал минимальное количество денег, необходимое для покупки. Потом, однако, он подумал, что хотел бы посетить только два каких-нибудь магазина из этих трёх. Из-за этого условия минимально необходимое количество денег увеличилось на 120 рублей. Чему мог равняться x?

   Решение. Существуют следующие способы покупки марок:

   - 2 комплекта в первом магазине, 2 во втором и 1 в третьем — стоит $1000 + x$
   - 2 комплекта в первом магазине, 1 во втором и 2 в третьем — стоит $700 + 2x$
   - 1 комплект в первом магазине, 2 во втором и 2 в третьем — стоит $800+2x$ (можно не рассматривать)
   - 3 в первом и 3 во втором — стоит 1500
   - 3 в первом и 3 в третьем — стоит $600 + 3x$
   - 3 во втором и 3 в третьем — стоит $900 + 3x$ (можно не рассматривать)

   Остальные способы хуже этих, поскольку содержат один из них в качестве поднабора.

   Построим графики:
   (1) минимальная стоимость марок в зависимости от x;
   (2) минимальная стоимость марок при покупке не более чем в двух магазинах в зависимости от x.
   Оба графика кусочно линейны с изломом при $x = 300$ (при этом разность между функциями равна 200), пересекаются при $x = 100$ и $x = 500$ (разность равна нулю). Поэтому разность 120 достигается при $x = 220$ и $x = 380$.

7. Представьте двучлен $33x^4 + 578$ в виде суммы квадратов как можно меньшего числа многочленов с целыми коэффициентами.

Решение. Очевидно, что коэффициент при x^4 складывается из квадратов коэффициентов при x^2 искомых многочленов, поэтому многочленов не меньше, чем минимальное количество квадратов, которые в сумме дают 33. Число 33 — не квадрат и не представимо в виде суммы двух квадратов (проверяется, например, перебором). Представление в виде суммы трёх квадратов возможно, например, $(4x^2+17)^2+(4x^2-17)^2+(x^2)^2$.

Решения задач для 10 класса

1. Все вершины 789-угольника отмечены красным цветом, а внутри него лежат ещё 615 красных точек. Никакие три красных точки не лежат на одной прямой. Многоугольник разбит на треугольники, вершинами которых являются все красные точки, и только они. Сколько этих треугольников?

   Решение: см. задачу 2 для 9 класса.

2. Какое максимальное значение может принимать наибольший общий делитель чисел n^2+3 и $(n+1)^2+3$, где n — натуральное число?

   Решение. Проделаем нечто похожее на алгоритм Евклида.

   НОД$(n^2+3, (n+1)^2+3)$ =НОД$((n+1)^2+3, 2n+1)$.
   Он является делителем $n(2n+1)$ и $2(n^2+3)$ $\Rightarrow$ он делит и их разность $n-6$.
   Он делит $2n+1$ и $2(n-6)$ $\Rightarrow$ делит и их разность 13. Поэтому НОД не может быть больше 13.

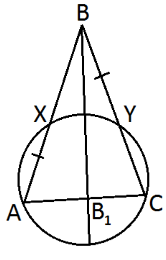
   При этом 13 достигается, например, при $n=6$.

3. Диагонали граней почтового ящика равны 4, 6 и 7 дециметрам. Поместится ли мяч диаметром 2 дециметра в такой ящик?

   Решение: см. задачу 5 для 9 класса.

4. На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки X и Y так, что $AX = BY$. При этом точки A, X, Y и C лежат на одной окружности. B_1 — основание биссектрисы угла B. Докажите, что прямые XB_1 и YC параллельны.

   Решение.

   (a) Так как BB_1 — биссектриса, то $\frac{AB_1}{AB} = \frac{B_1C}{BC}$.

(b) $BX \cdot BA = BY \cdot BC$ (степень точки B относительно окружности), откуда $BC = \frac{BX \cdot BA}{BY}$.

(c) $\frac{AB_1}{AB} = \frac{B_1C \cdot BY}{BX \cdot BA}$, поэтому $\frac{AB_1}{BY} = \frac{B_1C}{BX}$.

(d) По условию, $BY = AX$, то есть $\frac{AB_1}{AX} = \frac{B_1C}{BX}$.

(e) По теореме, обратной теореме Фалеса, $XB_1 || BC$. □

5. Алексей решил купить три комплекта редких марок (для себя и двух друзей). Один комплект состоит из трёх марок А, Б и В. В интернете он нашёл три магазина, но каждый из них продавал марки парами. Первый магазин продавал комплект «марка А + марка Б» за 200 рублей, второй продавал комплект «марка Б + марка В» за 300 рублей, а в третьем комплект «марка В + марка А» стоил x рублей. Алексей подсчитал минимальное количество денег, необходимое для покупки. Потом, однако, он подумал, что хотел бы посетить только два каких-нибудь магазина из этих трёх. Из-за этого условия минимально необходимое количество денег увеличилось на 120 рублей. Чему мог равняться x?

   Решение: см. задачу 6 для 9 класса.

6. Представьте двучлен $6x^4 + 5$ в виде суммы квадратов как можно большего числа многочленов с целыми коэффициентами.

   Решение. Ответ: наибольшее число многочленов — 16, например: один квадрат x^2, пять квадратов $x^2 - 1$ и десять квадратов x.

   Докажем, что больше быть не может.
   Прежде всего заметим, что нельзя использовать многочлены третьей степени или выше. Их возведение в квадрат даст слагаемые выше четвёртой степени. При этом все коэффициенты при максимальной степени окажутся строго положительными, что не позволит получить 0 в сумме.
   Каждый многочлен второй степени даст x^4 с положительным целым коэффициентом. Значит, таких слагаемых не может быть больше 6.
   Каждый многочлен с ненулевым свободным членом после возведения в квадрат имеет положительный целый свободный член. Значит, таких слагаемых не может быть больше 5.
   Всего может набраться до 11 таких слагаемых. Их число резко сокращается в случаях, когда используется больший единицы свободный член или коэффициент при x^2.
   «Лишние» слагаемые могли бы появиться из квадратов x. Примером служит квадрат $x^2 - 1$. Соединение в пару слагаемых двух описанных выше типов уменьшает их число на 1, но компенсируется добавлением двух квадратов x, что в итоге увеличивает на 1 общее число слагаемых.
   Как и сказано выше, здесь тоже «невыгодно» заменять 1 на большие по модулю значения (общая сумма 11 ограничивает перебор интервалом от -3 до 3).
   Ещё более «невыгодно» использовать двучлены или трёхчлены с ненулевыми коэффициентами при x. Аннулирования нечётных степеней можно достичь, используя сопряжённые слагаемые. Но каждая их пара даёт положительный вклад в суммарный коэффициент при x^2, что приводит к уменьшению общего числа слагаемых.

7. Составители олимпиады голосованием определяют, какую из задач (А или Б) поместить в вариант. Для этого все составители по очереди (в алфавитном порядке) сообщают, какая из задач им больше нравится. В результате голосования оказалось, что задача А «победила» со счётом 11:5, причём в каждый момент она имела хотя бы вдвое больше голосов, чем задача Б. Сколькими способами могло проходить голосование?

   Решение. Построим таблицу, которая показывает, сколькими способами можно отдать a голосов за задачу А и b голосов за Б так, чтобы в каждый момент за А было отдано хотя бы вдвое больше, чем за Б. При этом используем следующий факт: если для данной цепочки голосов $a > 2b$, то её можно продолжить как голосом за А, так и голосом за Б; если же $a = 2b$, то следующий голос обязательно за А.

	$a=0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$b=0$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2					3	7	12	18	25	33	42	52
3							12	30	55	88	130	182
4									55	143	273	455
5											273	728

   Ответ: 728 способов.

Решения задач для 11 класса

1. При скольких натуральных n выполняется неравенство

$$\sin\frac{10\pi}{n} > \cos\frac{10\pi}{n}?$$

   Решение. $10\pi/n$ должно лежать в диапазонах

$$\left(\frac{\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{9\pi}{4};\frac{13\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{17\pi}{4};\frac{21\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{25\pi}{4};\frac{29\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{33\pi}{4};\frac{37\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{41\pi}{4};\frac{45\pi}{4}\right)\cup\ldots$$

   Поэтому n лежит в

$$(8;40)\cup\left(\frac{40}{13};\frac{40}{9}\right)\cup\left(\frac{40}{21};\frac{40}{17}\right)\cup\ldots$$

   Все дальнейшие диапазоны не содержат целых чисел, больших 1; подстановкой убеждаемся, что $n=1$ не подходит.

   Целые числа в этих диапазонах: $2, 4, 9\ldots 39$ — всего 33 числа.

2. Какое максимальное значение может принимать наибольший общий делитель чисел n^2+3 и $(n+1)^2+3$, где n — натуральное число?

   Решение: см. задачу 2 для 10 класса.

3. Назовём заслуженными числа вида 2^x+3^y, где x и y — натуральные числа или 0. Легко видеть, что числа $5=2^1+3^1=2^2+3^0$ и $11=2^3+3^1=2^1+3^2$ — дважды заслуженные (то есть представляются в таком виде двумя способами). А сколько всего существует дважды заслуженных чисел?

   Решение. Жюри не располагает полным решением этой задачи. Нам известны пять примеров таких чисел: 5, 11, $17=16+1=9+8$, $35=32+3=8+27$, $257=256+1=16+243$.

4. На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки X и Y так, что $AX=BY$. При этом точки A, X, Y и C лежат на одной окружности. B_1 — основание биссектрисы угла B. Докажите, что прямые XB_1 и YC параллельны.

   Решение: см. задачу 4 для 10 класса.

5. Отец хочет отправить сыну 13 одинаковых мячиков. Для этого он купил почтовый ящик, диагонали граней которого равны 4, 6 и 7 дециметрам. Оказалось, что один мяч помещается в этот ящик. Верно ли, что в нём можно уместить все 13 мячей?

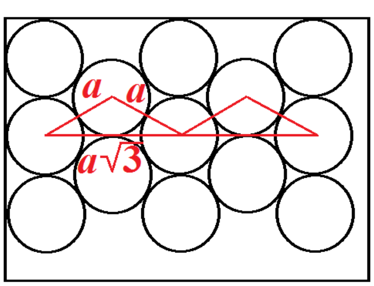
   Решение. Почтовый ящик имеет форму прямоугольного параллелепипеда с рёбрами a, b, c. Теорема Пифагора приводит к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} a^2+b^2=16 \\ a^2+c^2=36 \\ b^2+c^2=49 \end{cases}$$

   Сложив уравнения и поделив сумму на два, получим: $a^2+b^2+c^2=101/2$.

   Отсюда $a^2=(a^2+b^2+c^2)-(b^2+c^2)=3/2$, $b^2=29/2$, $c^2=69/2$. Следовательно, $a=\sqrt{3/2}$, $b=\sqrt{29/2}$, $c=\sqrt{69/2}$.

   Если шар влезает в ящик, то его диаметр не превосходит a. Зная соотношение рёбер, докажем, что в прямоугольник $b\times c$ влезают 13 кругов диаметра a (а значит, в ящик влезают 13 мячей). Действительно, чтобы поместить в прямоугольник 13 шаров радиуса a, достаточно, чтобы его стороны имели длины не менее $3a$ и $(1+2\sqrt{3})a$ (см. рисунок).



   В то же время у нас $b/a=\sqrt{29/3}>3$, $\quad c/a=\sqrt{23}>4{,}6>1+2\sqrt{3}$.

6. Составители олимпиады голосованием определяют, какую из задач (А или Б) поместить в вариант. Для этого все составители по очереди (в алфавитном порядке) сообщают, какая из задач им больше нравится. В результате голосования оказалось, что задача А «победила» со счётом 11:5, причём в каждый момент она имела хотя бы вдвое больше голосов, чем задача Б. Сколькими способами могло проходить голосование?

   Решение: см. задачу 7 для 10 класса.

7. Существуют ли такие целые коэффициенты $a \neq 0, b, c, d$, для которых кубический многочлен $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ принимает каждое из значений 1, 2, 3 и 4 при каком-нибудь целом значении x?

   Решение. Обозначим через x_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ точки, для которых $f(x_i) = i$. Заметим, что

$$f(x_2) - f(x_1) = a(x_2^3 - x_1^3) + b(x_2^2 - x_1^2) + c(x_2 - x_1) =$$

$$= a(x_2 - x_1)(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2) + b(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) + c(x_2 - x_1) \vdots x_2 - x_1.$$

   Получается, что $f(x_2)-f(x_1)$ делится на x_2-x_1. Аналогично $f(x_3)-f(x_2)$ и $f(x_4)-f(x_3)$ делятся на $x_3 - x_2$ и $x_4 - x_3$ соответственно.
   Но в то же время $f(x_4) - f(x_3) = f(x_3) - f(x_2) = f(x_2) - f(x_1) = 1$, а это значит, что $|x_{i+1}-x_i| = 1$. Это выполняется, только если x_i образуют арифметическую прогрессию с разностью 1 или -1. Но тогда $f(x) - x$ или $f(x) + x$ принимает одно и то же значение четыре раза, поэтому является константой. Значит, $a = 0$, и f — не кубический многочлен.