Олимпиада «Формула Единства» / «Третье тысячелетие» 2014/15 г.
Решения задач 1 тура

5 класс

1. Назовём «тяжёлым» месяц, в котором пять понедельников. Сколько тяжёлых месяцев может быть в течение года?

Решение. Год состоит из 365 или 366 дней, т.е. из 52 полных недель и ещё одного или двух дней. Значит, всего в течение года 52 или 53 понедельника.

Так как месяц не может быть короче 28 дней, то каждый месяц содержит не менее четырёх понедельников. Их 12·4=48. Остальные 4 или 5 «лишних» понедельников добавятся к разным месяцам и сделают эти месяцы «тяжёлыми».

Ответ: Если год начинается с понедельника (или високосный год начинается с воскресенья), то он содержит 5 тяжёлых месяцев. В остальных случаях их 4.

2. Андрей перемножил две последовательные цифры и получил в итоге двузначное число, записываемое двумя последовательными цифрами. Найдите все такие примеры.

Решение. Достаточно перебрать варианты.

Ответ: 3·4=12 и 7·8=56.

3. Саша зачеркнул на 25-й странице учебника все слова, в которых нет буквы А, потом он зачеркнул все слова, в которых нет буквы Б, а потом он нашел все слова, где есть и буква О, и буква А, и тоже зачеркнул их. Костя на той же странице своего учебника зачеркнул слова, где нет Б, но есть А или О (возможно, обе сразу), и после этого он зачеркнул все слова, где нет ни буквы А, ни буквы О. Могло ли у Саши остаться незачеркнутыми больше слов, чем у Кости?

Решение. Достаточно показать на кругах Эйлера. У Саши остались незачёркнутыми только те слова, в которых есть буквы А и Б, но нет буквы О. У Кости остались все эти слова, а также те, в которых есть О и А одновременно.

Ответ: Нет.

4. В каждом из двух классов по 30 учеников. Мальчиков в первом классе в 2 раза больше, чем во втором, а девочек – в 3 раза меньше, чем во втором. Сколько мальчиков и девочек в каждом классе?

Решение. Исходя из условия, можно составить уравнения:

Для 1 класса: $M\cdot 2+D=30$,

Для 2 класса: $M+D\cdot 3=30$, где M – количество мальчиков во 2 классе, а D – количество девочек в 1 классе.

Перепишем 2 полученных уравнения:

$M\cdot 2+D=30$,

$M+D\cdot 3=30$

Из 1-го уравнения получаем:

$D=30- M\cdot 2$

Из 2-го получаем:

$M=30- D\cdot 3=30-(30-M\cdot 2)\cdot 3=30-(30\cdot 3-M\cdot 2\cdot 3)=30-90+M\cdot 6$

$M=M\cdot 6-60$

$60=5M$

$M=12$

Тогда $D=30-12\cdot 2=6$

Итого:

В 1 классе – 6 девочек и 24 мальчика

Во 2 классе – 12 мальчиков и 18 девочек.

Ответ: В первом классе – 6 девочек и 24 мальчика. Во втором классе – 12 мальчиков и 18 девочек.

5. Три ручки, четыре карандаша и линейка вместе стоят 26 рублей, а пять ручек, шесть карандашей и три линейки - 44 рубля. Сколько стоят вместе две ручки и три карандаша?

Решение. Удорожание на 18 рублей происходит из-за добавления двух линеек, двух карандашей и двух ручек. Значит, комплект "ручка+карандаш+линейка" стоит 9 рублей. Но так как "три ручки + четыре карандаша + линейка" дороже его ровно на 17 рублей, то именно столько и стоят две лишних ручки и три лишних карандаша.

Ответ: 17 рублей.

6. Первоначально на доске написано число 1. Разрешается любое написанное на доске число умножить на 3 или переставить в нём цифры. Можно ли таким образом получить 999?

Решение. Эту задачу удобно решать с конца.

Допустим, что мы смогли при помощи данных в условии операций получить число 999.

Переставлять цифры в этом числе бессмысленно, поэтому получить его мы могли только умножением на 3 числа 333.

В числе 333, аналогично, менять цифры местами нет смысла, поэтому мы могли получить его лишь умножением на 3 числа 111.

В этом числе опять менять цифры нет смысла, поэтому получить его мы могли только умножением на 3 числа 37.

В числе 37 мы можем переставить цифры, тогда получим число 73. Однако ни число 37, ни 73 не делятся на три, поэтому не могли получиться в результате умножения на три. Значит, из числа 1 невозможно получить 999.

Ответ: Нельзя.

6 класс

1. См. задачу №1 для 5 класса.
2. См. задачу №2 для 5 класса.
3. См. задачу №3 для 5 класса.
4. См. задачу №4 для 5 класса.
5. См. задачу №5 для 5 класса.
6. Первоначально на доске написано число 1. Разрешается любое написанное на доске число умножить на 2 или переставить в нём цифры. Можно ли таким образом получить 209?

Решение. Эту задачу удобно решать с конца:

209 – 920 – 460 – 230 – 320 – 160 – 610 – 305 – 530 – 265 – 256 – 128 – 64 – 32 – 16 – 8 – 4 – 2 – 1.

Ответ: можно.

7 класс

1. См. задачу №1 для 5 класса.

2. См. задачу №2 для 5 класса.

3. Сумма трех натуральных чисел равна 100. Какое наименьшее возможное значение может принимать НОК этих чисел?

Решение.

Пример: НОК(40, 40, 20)=40.

Оценка. Все три числа не могут быть равными, поскольку 100 не делится на 3. Значит, либо они все попарно неравны, либо два равны, а третье отличается.
Случай 1. $a<b<c$. Можно считать, что c делится на b и на a, поскольку иначе НОК$>c$, а значит, он равен хотя бы $2c>66$. Тогда $b \le c/2$, $a \le c/2$, откуда $100=a+b+c \le c+c/2+c/2$, $c \ge 50$. В этом случае НОК не меньше 50.
Случай 2а. $a=b<c$ аналогичен.
Случай 2б. $a<b=c$. Как и в пункте 1, можно считать, что c делится на a, поэтому $c \le a/2$, $100 = a+b+c \le c/2 + 2c$, откуда, $c \ge 40$, то есть НОК ≥ 40.

Ответ: 40.

4. Докажите, при любой расстановке чисел 1, 2, …, 10 по кругу найдутся три соседних числа с суммой не менее 18.

Решение. Рассмотрим все числа, кроме 1. Очевидно, их можно разбить на три тройки. В то же время сумма этих девяти чисел равна 2+3+...+10=54, поэтому хотя бы в одной из троек сумма не меньше 18.

5. См. задачу №5 для 5 класса.

6. Найдите наименьшее натуральное число, которое начинается на 11, заканчивается на 11 и делится на 7. Объясните, почему это число является наименьшим из удовлетворяющих условию.

Ответ: 11011.

Решение. Достаточно забраковать все меньшие натуральные числа: 11, 111, 1111.

8 класс

1. Докажите, что для любого $n>3$ существует n-угольник, у которого никакие две диагонали не параллельны.

Решение. Будем строить вершины такого n-угольника. Начнем с $n=4$, построим квадрат. Обе его диагонали пересекаются в центре квадрата, поэтому не параллельны. Чтобы впоследствии не возникало проблем с самопересечениями, проведём окружность, описанную около квадрата, и все новые вершины выбираем только на ней, после чего последовательно соединяем выбранные точки окружности. Проведем через все вершины квадрата прямые, параллельные обеим диагоналям. На полученных прямых не должны лежать никакие другие вершины многоугольника. Поэтому берем любую точку на окружности вне этих прямых, соединяем ее с двумя соседними вершинами квадрата вместо отрезка, который их соединял, и получаем пятиугольник.
Дальше просто повторяем эту же процедуру: проводим все диагонали, потом через все вершины проводим все прямые, параллельные диагоналям, потом выбираем любую точку вне этих прямых и добавляем ее к списку вершин многоугольника.

2. BK – биссектриса треугольника ABC. Известно, что AB=AC, а BC=AK+BK. Найдите углы треугольника ABC.

Решение. Обозначим AK=a , KC=b и отложим отрезок EC=a на стороне BC. Так как KC/CE = KC/AK = BC/AB , то треугольники EKC и ABC подобны. Значит, угол EKC равен углу C (обозначим его за x), а внешний для треугольника EKC угол BEK – вдвое больше. Но так как BE=BK, то треугольник BEK – равнобедренный, откуда угол EBK равен $180°-4x$. Угол B в треугольнике ABC вдвое больше угла EBK, но при этом равен углу C. Приравниваем: $x=2(180°-4x)$ и находим $x=40°$.

Ответ: 100° и два по 40°.

3. Каждый из трех землекопов, работая в одиночку, может вырыть траншею за целое число дней. А если ту же траншею они будут рыть все втроем, на это у них уйдет соответственно на 2, 5 и 10 дней меньше, чем при рытье вдвоем (т.е. без первого, второго и третьего соответственно). За сколько дней может выкопать яму самый медленный из них?

Решение.

Обозначим время, за которое все трое суммарно выкопают траншею, за t (дней). Тогда их суммарная производительность равна 1/t. Производительность пар, согласно условию, равна 1/(t+2), 1/(t+5) и 1/(t+10). Если сложить производительность пар, то получится удвоенная общая производительность (как если бы копали два первых, два вторых и два третьих землекопа): 1/(t+2) + 1/(t+5) + 1/(t+10) = 2/t.

Отсюда t/(t+2) + t/(t+5) + t/(t+10)=2;
вычитая 1 из каждой дроби, получаем равносильное уравнение
1/(t+2) + 1/(t+5) + 1/(t+10)=1.

Угадываем один из корней этого уравнения: t=10. Других положительных корней уравнение иметь не может, поскольку каждая дробь при положительном t убывает.

(Другой вариант решения — привести уравнение к виду $t^3-80t-200=0$. Далее, опять же, угадываем один из корней (в частности, воспользовавшись утверждением о том, что рациональные корни такого уравнения должны быть делителями свободного члена): t=10. После этого получаем:

$t^3-10t^2+10t^2-100t+20t-200=0$,
$(t-10)(t^2+10t+20)=0$ –

никаких положительных корней, кроме t=10, это уравнение не имеет.)

Таким образом, все трое выроют траншею за 10 дней. Суммарная производительность троих равна 1/10 траншеи в день, а суммарная производительность двух самых быстрых – 1/12 траншеи в день. Производительность самого медленного равна 1/10-1/12=1/60 траншеи в день.

Ответ: за 60 дней. (А два других — за 20 и 30 дней)

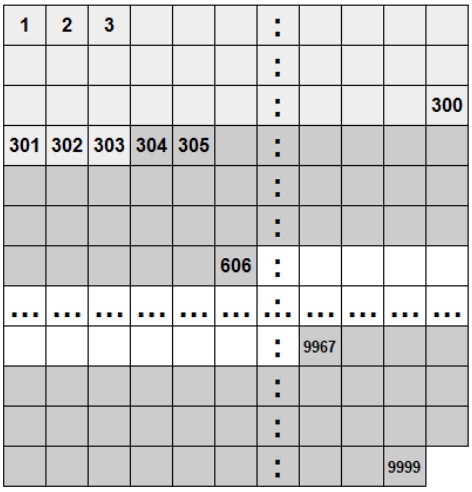
Примечание. Условие о целочисленности не используется, но наводит на мысль о подборе корней.

4. Даны 15 составных чисел, не превосходящих 2014. Докажите, что какие-то два из них имеют общий делитель, больший 1.

Решение. Допустим противное и разложим каждое из данных 15 составных чисел на простые множители. Меньший из множителей в каждом разложении заведомо не превосходит $\sqrt{2014}\approx 44{,}88$. Выпишем первые 15 простых чисел: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47. Последнее из них оказалось больше $\sqrt{2014}$. Значит, у каких-то двух из данных 15 составных чисел найдётся общий множитель.

5. Дан квадрат 100x100 без угловой клетки. Можно ли разрезать его по клеткам на 33 фигуры, у которых одинаковые площади и одинаковые периметры?

Ответ: Да.



Решение. Прежде всего, находим, что площадь таких фигур должна быть равна 303. Значит, фигура не сможет поместиться в 3 строки по 100 клеток. Но если каждая фигура занимает ровно 4 строки (включая неполные), то её периметр окажется точно таким же, как и у прямоугольника 4x100, т.е. равный 208. Чтобы получить нужное разрезание, достаточно последовательно по строкам (сверху вниз, справа налево) занумеровать все клетки и включать их в фигуры в порядке нумерации.

Нам могла бы помешать ситуация, когда фигура занимает три полных строки, две клетки в одной и одну клетку в другой. Однако это невозможно, поскольку для этого последняя клетка предыдущей фигуры должна иметь номер, оканчивающийся на 98 или 99 (а такой номер — 9999 — будет только для последней фигуры).

6. В шестизначном числе поставили знак произведения после первых трех цифр, и оказалось, что произведение двух полученных трехзначных чисел в 7 раз меньше исходного числа. Какое число было написано?

Решение. Если полученные трехзначные числа обозначить через А и В, то задача сводится к уравнению 7АВ=1000А+В .

Так как 7АВ≥1000А , то В≥143. Сделаем подстановку В=143+К. После сокращения 1000А, получим: А(1+7К)=143+К (=В).

Если К=0, то А=В=143 (удовлетворяет условию).

Если К=1, то 8А=144, откуда А=18 и В=144 (удовлетворяет уравнению, но не удовлетворяет условию, так как 18 – не трехзначное число).

Так как А(К)=(143+К)⁄(1+7К) убывает с ростом К, то все последующие решения уравнения (ещё есть К=7, для которого А=3 и В=150) дают ещё меньшие значения А, из-за чего не получается нужного по условию шестизначного числа.

Ответ: 143143.

7. У нас есть набор из N^2 карточек, на каждой карточке с одной стороны написано число, с другой стороны пусто. Написанные числа попарно различны. Эти карточки выложены в виде квадрата NxN пустой стороной (рубашкой) вверх. Разрешается перевернуть любую карточку и тем самым узнать написанное на ней число. Доказать, что не более чем за 8N переворачиваний можно найти карточку, число на которой меньше чисел всех её соседей (по стороне).

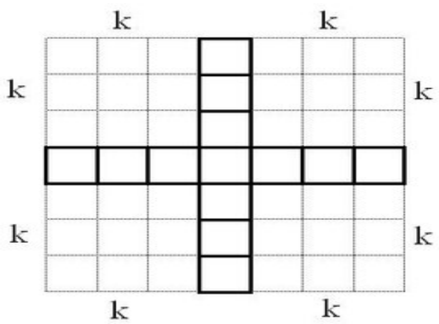
Решение. Мы докажем следующее утверждение, из которого непосредственно следует утверждение задачи. «Пусть у нас есть квадрат $n\times n$, в котором открыта одна клетка, тогда не более чем за $4n$ открытий мы сможем найти локальный минимум (карту с числом, меньшим числа на каждой из соседних карт), причем значение этого минимума будет не больше, чем число d на этой открытой (заранее заданной) карте.»

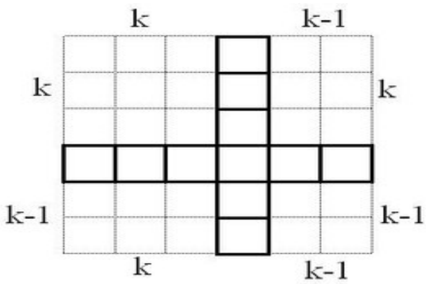
Это утверждение мы докажем последовательно для n=1, 2, …

Очевидно, что для n=1 и n=2 можно просто открыть все карты и взять минимальное число (она будет локальным минимумом, так все числа различны, и будет не больше заданного числа, так как она глобальный минимум).

Теперь мы докажем, что можно выполнить требуемое для любого данного числа n в предположении, что мы уже умеем это делать для всех меньших значений n.

Откроем центральный крестик так, как показано на рисунке (отдельно для четного и нечетного случая) и найдем среди клеток этого крестика минимальную по значению, обозначим число в ней за m.

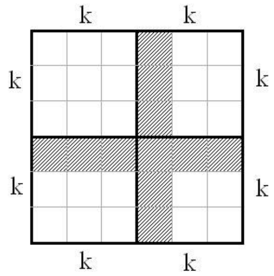




Возможны два случая: $m > d$ и $m \le d$.

Случай 1, $m > d$. Тогда d не может лежать на крестике. Значит, оно лежит в каком-нибудь из четырёх квадратов $k\times k$ (предполагаем сперва, что n нечётное). Поскольку мы считаем наше утверждение доказанным для меньших значений n, мы можем найти в этом квадрате локальный минимум (рассматривая d в качестве заранее открытой карты); обозначим его значение через x. Таким образом, $x \le d$, и это число будет локальным минимумом и для квадрата $n \times n$, так как даже если локальный минимум лежит на границе квадрата, соприкасающейся с крестом, и у него тем самым добавляются новые соседи, то все эти соседи $\ge m > d \ge x$.

Если же n четное и d лежит не в квадрате $k \times k$, то дополним его прямоугольник $k \times (k-1)$ (или квадрат $(k-1) \times (k-1)$) до квадрата $k \times k$ кусочками нашего креста (см. рисунок). Мы не получим ни одну из добавленных карт в качестве искомого локального минимума, так как они все $> d$, а мы ищем локальный минимум $\le d$. Значит, соседями полученного минимума все равно будут либо карты его квадрата $k \times k$, либо карты креста (но не клетки других квадратов $k \times k$), и все вышеприведенное рассуждение остается в силе.



Случай 2, $m \le d$. Тогда если m — это центральная карта креста, то это наш искомый локальный минимум (т.к. $m \le d$); иначе у неё есть два пока неоткрытых соседа, откроем их. Если оба из них больше m, то это то, что нам нужно. В противном случае у m есть сосед d_2, такой что $d_2 < m$, и мы свели ситуацию к случаю 1, только с d_2 вместо d. Применяя алгоритм из Случая 1, получаем локальный минимум $\le d_2 < d$.

Теперь убедимся, что число операций не слишком велико.

При $n = 2k + 1$ мы тратим $4k + 1$ операций на открытие креста, 2 операции на открытие соседей m для Случая 2 и $4k$ операций для нахождения локального минимума в квадрате $k \times k$. В сумме получается $8k+3 < 4n$.

Пусть $n = 2k$. Если соседей m нам открывать не надо, то число операций $\le 8k-1$. Если же надо, то заметим следующее: где бы m не лежало на кресте (для четного случая), его соседи будут относиться к двум кускам неравных размеров (например, один лежит в квадрате $k \times k$, а второй в прямоугольнике $k \times (k-1)$). Откроем сначала того соседа, который лежит в большем по площади квадрате; если он меньше m, то реализуем алгоритм из Случая 1 для него, при этом суммарное число операций будет не больше $8k$. В противном случае откроем второго соседа. При этом мы сэкономим одну операцию: так как сосед меньший, то в него входит один из кусочков креста (см. рисунок выше), а на этом кресте мы все карты уже открыли. Таким образом, когда мы будем открывать очередной крест для квадратика $k \times k$, как минимум одна из его карт уже окажется открытой. Понадобится не более $4k-1$ операций на нахождение локального минимума в этом квадрате, и общее число операций не превысит $8k$.

8. Назовем число натуральное возрастающим, если в нем цифры идут в порядке строгого возрастания (например, 1589 - возрастающее, а 447 - нет). Какое наименьшее количество возрастающих чисел надо сложить, чтобы получить 2014?

Ответ: 3.

Решение. Начнём с примера (их много): 1268+378+368.

Покажем теперь, что двух возрастающих чисел недостаточно. Прежде всего, заметим, что хотя бы одно из них должно быть четырёхзначным. Тогда его последняя цифра –

не меньше 4. Но так как последняя цифра другого числа заведомо не 0, то сумма в последнем разряде равна 14 и может складываться как 9+5, 8+6 или 7+7.

Цифры в предпоследних разрядах также не могут быть нулями. Значит, их сумма (без учёта единицы переноса) равна 10. Варианты: 8+2, 7+3, 6+4 или 5+5.

Чтобы получить 2014, сумма в разряде сотен (без учёта единицы переноса) должна быть равна 9. Но так как каждая цифра сотен должна быть хотя бы на 1 меньше соответствующей цифры десятков, то эта сумма не может оказаться больше 8.

9. Найдите натуральные A, B и C из уравнения $2014=2^{A}-2^{B}-2^{B+C}$.
Ответ: A=11, B=1, C=4.

Решение. Достаточно заметить, что 2014=2048−32−2, после чего представить число 2014 в двоичной системе счисления (11111011100) и интерпретировать данное уравнение как вычитание в столбик.

Критерии. Верный ответ без обоснования, что других ответов нет — 2 балла. Верно найдено равенство 2014=2048−32−2, но числа A, B, C из него найдены неверно — 1 балл.

10. В треугольнике ABC углы B и C равны 30° и 105°, а P – середина стороны BC. Найдите угол BAP.

Решение. Опустим высоту CH из вершины C. Тогда прямоугольный треугольник ACH с углом в 45° - равнобедренный, а в прямоугольном треугольнике BCH угол C равен 60°, и медиана HP равна половине гипотенузы BC. Отсюда HP=PC=CH=AH. Следовательно, треугольник APH тоже равнобедренный. Так как его внешний угол BHP равен данному углу B, то искомый угол – вдвое меньше.

Ответ: 15°.

9 класс

1. См. задачу №1 для 8 класса.
2. См. задачу №3 для 7 класса.
3. См. задачу №3 для 8 класса.
4. Андрей перемножил два последовательных натуральных числа и получил в некоторой системе счисления двузначное число, записываемое двумя последовательными цифрами, не превосходящими 9. Найдите эти цифры.

Решение. Пусть d – основание системы счисления, а p и $p+1$ − искомые числа. Прежде всего, заметим, что $p<d$, иначе запись $p(p+1)$ в этой системе счисления имела бы не менее трёх цифр.

Пусть c и $c+1$ − искомые цифры. Тогда $p(p+1)=cd+c+1$, откуда $p^2+p-1=c(d+1)$.

Сразу напрашивается вариант $c=1$ с $d=p^2+p-2$. Подходящее d можно подобрать для любого целого $p>1$, но $p(p+1)$ всегда будет записываться как 12.

Постараемся найти $c>1$. Прежде всего, так как $p(p+1)$ чётно, то p^2+p-1 нечётно. Поэтому c не может быть чётным.

Если $p(p+1)$ делится на 3, то p^2+p-1 не делится на 3. В противном случае p даёт при делении на 3 остаток 1, а $p+1$ даёт при делении на 3 остаток 2. В этом случае $p(p+1)$ даёт при делении на 3 остаток 2. Значит, p^2+p-1 не делится на 3 ни при каком целом p. Поэтому c тоже не может делиться на 3.

Аналогично можно показать, что c не может делиться на 7.

Из цифр от 0 до 9 остаётся только 5. Она подходит. Кроме $7\cdot8=56$, есть примеры и в других системах счисления. Например, $17\cdot18=306$ записывается как 56 в системе счисления с основанием 60.

Ответ: 12 или 56.

5. См. задачу №5 для 8 класса.

6. См. задачу №9 для 8 класса.

7. В таблице 30х30 клеток поставлено 162 плюса и 144 минуса (в каждой клетке не более одного знака) так, что в каждой строке и каждом столбце таблицы стоит не более 17 знаков. Для каждого плюса подсчитали, сколько минусов находится в той же строке. Для каждого минуса подсчитали, сколько плюсов находится в том же столбце. Какое наибольшее значение может иметь сумма найденных чисел?

Решение. Заметим, что суммирование можно вести только по плюсам (или только по минусам), а сумма в каждой строке или в каждом столбце равна произведению количества стоящих там плюсов на количество минусов. Лимит не более 17 знаков не позволяет каждому такому произведению превысить 72. Если где-то знаков меньше 17, то потеря в произведении не восполняется дополнительными слагаемыми. Поэтому для достижения максимума в целом по таблице нужно в некоторых строках и столбцах поставить ровно по 17 знаков (точнее, 9 плюсов и 8 минусов), а в остальных не ставить их вовсе.

Подходящий вариант расстановки – занять плюсами квадраты 9х9 в правом верхнем и левом нижнем углах, а минусы ставить в такие же квадраты в правом нижнем и левом верхнем углах, за исключением их главных диагоналей.

Ответ: 1296.

8. В треугольнике ABC выбрана точка D на стороне AB так, что углы ACD и ABC равны. Пусть S − центр описанной окружности треугольника BCD. Докажите, что точки A, C, S и середина BD лежат на одной окружности.

Решение. Поскольку S лежит на серединном перпендикуляре к отрезку BD, то угол ADS прямой. Для решения задачи нам осталось доказать, что угол ACS прямой (тогда четырехугольник ADSC будет вписанным, поскольку сумма его противоположных углов 180 градусов). Действительно, прямая AC - касательная к описанной окружности треугольника BCD, так как угол между прямыми AC и BC равен половине дуги, заключенной между ними (углу ABC).

9. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ таковы, что sin A = cos A_1 , sin B = cos B_1 , sin C=cosC_1 . Найдите наибольший из шести углов.

Решение. Начнём с того, что синусы всегда положительны. Косинусы же положительны только для острых углов. Поэтому треугольник $A_1B_1C_1$ остроугольный. Если треугольник ABC тупоугольный, то наибольшим окажется какой-то из его углов. Не теряя общности считаем, что тупой угол – A. Тогда условие сводится к соотношениям: $A= 90°+A_1$, $B= 90°-B_1$, $C= 90°-C_1$. Вычитаем из первого равенства два других, выделяем в итоговом соотношении суммы углов каждого треугольника и заменяем их на 180°. После упрощений находим $A=135°$.

Если же оба треугольника остроугольные, то $A= 90°-A_1$, $B= 90°-B_1$, $C= 90°-C_1$, в результате общая сумма шести углов равна 270°, что невозможно.

Ответ: 135° .

10. Пусть H – такая точка внутри треугольника ABC, что равны величины углов HAB и HCB, а также HBC и HAC. Докажите, что H – точка пересечения высот треугольника ABC.

Решение. Продолжим BH и CH до пересечения со сторонами AC и AB в точках D и E.

Углы EHD и BHC равны как вертикальные. Следовательно, сумма углов A и H в четырёхугольнике AEHD равна сумме углов треугольника ABC, т.е. 180°. Значит, точки A, E, H и D лежат на одной окружности.

Углы HDE и HAB опираются в этой окружности на одну и ту же дугу EH. Отсюда следует равенство углов HDE и HCB. Это значит, что вокруг четырёхугольника BCDE тоже можно описать окружность.

Следовательно, равны углы BDC и BEC. Значит, равны и дополняющие их углы ADH и AEH. Но так как их сумма равна 180°, то они – прямые.

10 класс

1. Выберите на каждой стороне квадрата по одной точке так, чтобы образованный ими четырехугольник имел наименьший периметр.

Решение. Разместим искомый четырехугольник внутри одной из клеток стандартного разбиения плоскости на квадраты и симметрично отразим его в соседние клетки. Тогда периметр четырехугольника превратится в ломаную, соединяющую одну из его вершин с точкой, получающейся из неё параллельными переносами на 2 по горизонтали и по вертикали. Ясно, что кратчайшая длина ломаной достигается в случае прямолинейного отрезка. Значит, стороны четырехугольника должны быть наклонены под углом 45° к линиям сетки (сторонам исходного квадрата).

Ответ: Это может быть любой прямоугольник, стороны которого параллельны диагоналям данного квадрата.

2. См. задачу №3 для 8 класса.

3. См. задачу №4 для 9 класса.

4. Костя выписал на доску 30 последовательных членов арифметической прогрессии с разностью 2061. Докажите, что в ней содержится не более 20 точных квадратов.

Решение. Смотрим на последнюю цифру. На каждом шаге она увеличивается на 1, но в случае точных квадратов она не может быть равна 2, 3, 7 и 8. Значит, 4 из каждых 10 последовательных членов арифметической прогрессии с разностью 2061 заведомо не являются точными квадратами. Следовательно, точных квадратов заведомо не может быть больше 18.

5. Вещественные числа x и y таковы, что $x^4y^2+x^2+2x^3y+6x^2y+8\le 0$. Докажите, что $x\ge -1/6$.

Решение. Если $x<-1/6$, то дискриминант этого квадратного трехчлена относительно y отрицателен. Следовательно, трехчлен принимает только положительные значения.

6. Решите систему уравнений:

$2^a + 3^b = 5^b$

$3^a + 6^b = 9^b$

Ответ: $a=b=1$.

Решение. Так как ответ легко угадывается, то проблема лишь в доказательстве его единственности.

Прежде всего, заметим, что функция $(2/5)^x+(3/5)^x$ строго убывает. Значит, $2^x+3^x>5^x$ для $x<1$ и $2^x+3^x<5^x$ для $x>1$. Аналогично для второго уравнения.

Рассмотрим случай, когда 1 лежит между a и b . Так как оба варианта аналогичны, то для определённости считаем, что $a<1<b$. Тогда $6^b=9^b-3^a<6^a$, что приводит к противоположному неравенству $b<a$.

Другой случай, когда a и b лежат с одной стороны от 1 также распадается в пару аналогичных вариантов. Пусть, для определённости, $a<1$ и $b<1$. Так как $6^b=9^a-3^a<6^a$, то $b<a$. Но так как $2^a=5^b-3^b<2^b$, то $a<b$. Опять противоречие.

Случаи $a=1\ne b$ и $a\ne 1=b$ отвергаются ещё проще.

7. Маша красит клетки белой доски 10х10. Она может покрасить любой вертикальный ряд клеток синей краской или любой горизонтальный ряд красной краской (каждый ряд красят не более одного раза). Если синяя краска ложится поверх красной, получается синяя клетка, а если красная поверх синей, то краски вступают в реакцию и обесцвечиваются, получается белая клетка. Может ли на доске оказаться 33 красных клетки?

Решение. Достаточно заметить, что в любой момент можно так переставить строки и столбцы на доске, чтобы красные клетки образовали прямоугольник. Его площадь была бы равна 33 только в случаях 1х33 или 3х11. Но ни тот, ни другой не помещаются внутри квадрата 10х10.

Ответ: Нет.

8. См. задачу №8 для 9 класса.

9. См. задачу №9 для 9 класса.

10. Решите уравнение в простых числах: $100q+80=p^3+q^2$.

Решение 1. Рассмотрим это уравнение как квадратное относительно q:
$q^2-100q+(p^3-80)=0$.
Его дискриминант равен $10000-4(p^3-80)$. Заметим, что при $p\geq 15$ этот дискриминант отрицателен, и уравнение не имеет корней. Для остальных простых p (2, 3, 5, 7, 11, 13) дискриминант положителен, но не является точным квадратом, поэтому корни уравнения — нецелые.

Решение 2. Перепишем уравнение в виде:
$p^3+(q-50)^2=2580$.
Отсюда следует, что $p^3\leq 2580$ и $p<14$. Простые числа, меньшие 14, а именно 2, 3, 5, 7, 11 и 13 могут быть легко исключены перебором.

Ответ: Решений нет.

11 класс

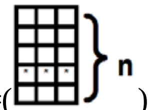
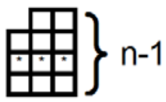
1. См. задачу №3 для 8 класса.
2. См. задачу №4 для 9 класса.
3. См. задачу №4 для 10 класса.
4. См. задачу №5 для 10 класса.
5. См. задачу №7 для 10 класса.
6. Можно ли утверждать, что $\log_{\sqrt{a}}(a+1)+\log_{a+1}(\sqrt{a}) \geq \sqrt{6}$ при $a>1$?

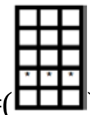
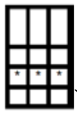
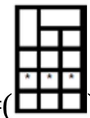
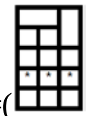
Решение. Прежде всего, нужно заметить, что слагаемые – взаимно обратные величины. Поэтому чем дальше они от 1, тем больше их сумма. Если в первом слагаемом заменить $a+1$ на a, то оно станет равно 2. Следовательно, сумма не может быть меньше, чем $2+0.5$, что больше $\sqrt{6}$.

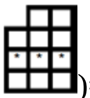
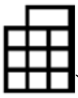
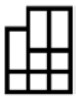
Ответ: Да, неравенство верно.

7. Докажите, что количество способов разрезать прямоугольник 200x3 на домино (прямоугольники 1x2) делится на 3.

Решение. Будем обозначать количество способов разрезать фигуру F на доминошки через #(F).

Введём также обозначения: N(n)=#(), M(n)=#().
Наша задача — найти рекуррентное соотношение для N(n).
Заметим, что

1) N(n)=#() = #() + #() + #() = N(n-2)+2M(n),

2) M(n)=#()=#()+#()=N(n-2)+M(n-2).

Итак, имеем:
N(n)=N(n-2)+2M(n) (пункт 1),
2M(n-2)=N(n-2)-N(n-4) (следует из пункта 1, если в нём уменьшить все индексы на 2),
2M(n)=2N(n-2)+2M(n-2) (следует из пункта 2).

Сложив эти три равенства, получаем:
N(n)+2M(n)+2M(n-2)=4N(n-2)+2M(n)+2M(n-2)-N(n-4),
откуда Nn=4N(n-2)-N(n-4) – искомое рекуррентное соотношение.

Легко проверить, что N(2)=3, N(4)=11.
Далее нетрудно доказать (индукцией по k), что N(6k+2) кратно 3, а N(6k+4) и N(6k+6) сравнимы по модулю 3. В частности, получаем, что N(200) кратно 3.

8. Случайным образом выбираются 3 числа от 1 до N и располагаются в порядке возрастания. С какой вероятностью они образуют арифметическую прогрессию?

Решение. Обозначим (с учётом очерёдности выбора!) первое число через X, второе – через Y, а третье – через Z. Всего имеется N^3 равновероятных вариантов (X, Y, Z). Геометрически им соответствуют целочисленные точки куба $1 \leq X, Y, Z \leq N$.

Чтобы эти числа образовали арифметическую прогрессию, среднее по величине должно быть равно полусумме двух оставшихся. Рассмотрим, как плоскость $X+Y=2Z$ (отвечающая случаю, когда средним по величине является Z) пересекается с кубом $1\le X, Y, Z \le N$. Сечением служит ромб с вершинами (1, 1, 1), (0, N, N/2), (N, N, N) и (0, N/2, N). Если (X, Y, Z) – какая-то точка в этом сечении, то (X, Y, 0) – её проекция на плоскость Z=0 . Поэтому вместо подсчёта точек сечения, все три координаты которых целые числа, достаточно найти число точек квадрата $1\le X, Y\le N$, для которых X+Y чётно. Это одна точка с X+Y=2, три точки с X+Y=4, пять с X+Y=6 и т.д. Никуда не уйти от рассмотрения двух случаев разной чётности N.

Если N=2K – чётно, то последними перед главной диагональю будут К точек с X+Y=2K (=N), после чего все варианты повторятся в обратном порядке. Суммарное число точек $2K^2$.

Если N=2K+1 – нечётно, то к предыдущей сумме добавляются N точек главной диагонали. Суммарное число точек $2K^2+2K+1$.

Найденное значение нужно сначала утроить (так как средним по величине может оказаться любое из трёх чисел), а затем из полученного вычесть 2N (так как точки главной диагонали куба X=Y=Z были учтены трижды). Получим $6K^2-4K$ для N=2K и $6K^2+2K+1$ для N=2K+1. Если использовать квадратные скобки для обозначения целой части числа, то оба случая можно объединить одной формулой $[3N^2/2]-4[N/2]$.

Ответ: вероятность равна $([3N^2/2]-4[N/2])/N^3$.

9. См. задачу №9 для 9 класса.

10. Пусть d(k) – число делителей натурального числа k, а квадратные скобки означают целую часть вещественного числа. Докажите, что числа $d(1)+d(2)+\ ...+d(n)$ и $[\sqrt{n}\,]$ имеют одинаковую чётность.

Решение. Ключевая идея: нечётное число делителей имеют все точные квадраты и только они (если число не является точным квадратом, то его делители естественным образом разбиваются на пары, тогда как у √n нет пары). Поэтому по мере добавления новых слагаемых перемена чётности суммы будет происходить в те же самые моменты, когда целая часть корня увеличится на 1.