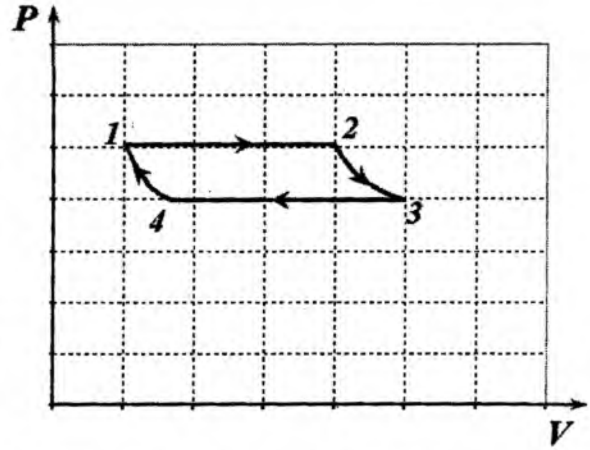
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО ТУРА

Задача 1. (10 баллов)

Задача 1А

Кипение на первом этапе происходит при постоянном давлении, следовательно, при постоянной температуре. Аналогично, на третьем этапе конденсация происходит при постоянных давлении и температуре. Второй и четвертый этапы можно считать адиабатическими. Цикл паровой машины показан на рис. Так как этот цикл состоит из двух изотерм и двух адиабат, то этот цикл является циклом Карно. Поэтому его КПД рассчитывается по формуле



$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \qquad (1)$$

где T_1 - температура кипения на первом этапе, T_2 - температура конденсации на третьем этапе цикла.

Температуры могут быть найдены из приведенной в условии зависимости давления насыщенного пара от температуры

Первый этап цикла происходит при постоянном давлении

$$P_1 = P_0 + \frac{(M+m)g}{S} \approx 1{,}3 \cdot 10^5\, Па \qquad (2)$$

Температура пара есть температура кипения и равна

$$t_1 = \frac{P_1 + b}{a} = \frac{130 + 384}{4{,}85} \approx 106°C = 379K. \qquad (3)$$

Разность температур в формуле (1) удобно вычислить по формуле

$$T_1 - T_2 = \frac{P_1 - P_2}{a} = \frac{mg}{Sa} = \frac{20}{4{,}85} \approx \overset{2{,}1}{\cancel{4{,}2}}\,K. \qquad (4)$$

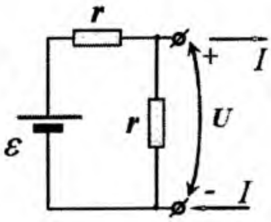
Таким образом, КПД машины равен $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{4{,}2}{379} = 1{,}1\%$

Схема оценивания

№	Содержание	баллы
1.	1 и 3 этапы – изобара и изотерма	0,25
2.	2 и 4 этапы – адиабаты	0,25
3.	Это цикл Карно	1,0
4.	Диаграмма цикла	0,75
5.	Формула для КПД цикла Карно	0,25
6.	Выражения для температур (2) и (4)	0,25
7.	Численное значение КПД	0,25
Итого		**3.0**

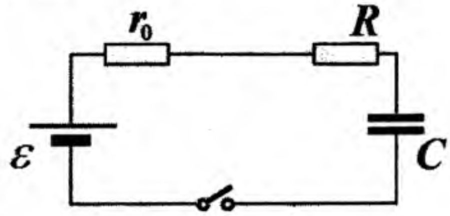
Задача 1В

Первое решение



Рассмотрим левую часть схемы. Её нагрузочная характеристика (зависимость $U(I)$) — прямая, соответствующая эквивалентному источнику с параметрами $\varepsilon_0 = \dfrac{\varepsilon}{2}$, $r_0 = \dfrac{r}{2}$.

Для эквивалентной схемы

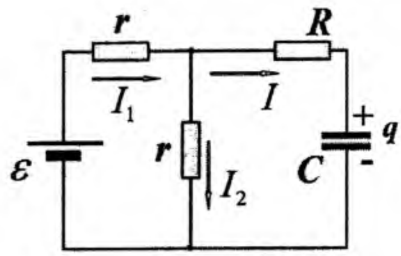


выделившееся тепло равно $Q_0 = \dfrac{C\varepsilon^2}{2}$. В резисторе R выделилось

$$Q = \frac{R}{R + r_0} Q_0 = \frac{R}{R + \frac{r}{2}} \cdot \frac{C\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2}{2} = \frac{RC\varepsilon^2}{4(2R + r)}$$

Второе решение

Система уравнений Кирхгофа имеет вид



$$\begin{cases} \varepsilon = I_1 r + I_2 r \\ I_2 r = IR + \dfrac{q}{C} \\ I_1 = I + I_2 \\ I = \dot{q} \end{cases}$$

Исключив I_1 и I_2, получим уравнение

$$I\left(R + \frac{r}{2}\right) + \frac{q}{C} = \frac{\varepsilon}{2},$$

Из которого домножением на I получим

$$I^2\left(R + \frac{r}{2}\right) = \frac{\varepsilon}{2} I - \frac{qI}{C} = \frac{\varepsilon}{2}\dot{q} - \frac{2q\dot{q}}{2C} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\varepsilon q}{2} - \frac{q^2}{2C}\right)$$

Отсюда

$$I^2 R = \frac{R}{R + \frac{r}{2}} \frac{d}{dt}\left(\frac{\varepsilon q}{2} - \frac{q^2}{2C}\right)$$

и

$$\int_0^\infty I^2 R dt = \frac{R}{R + \frac{r}{2}} \left(\frac{\varepsilon q}{2} - \frac{q^2}{2C}\right)\Bigg|_{q(0)}^{q(\infty)}$$

Подставив $q(0)=0$ и $q(\infty)=C\dfrac{\varepsilon}{2}$, получим

$$Q=\frac{RC\varepsilon^2}{4(2R+r)}$$

Схемы оценивания

I. Вычислительное решение

№	Содержание	баллы
1.	Имеется явно сформулированная полная система правильных уравнений, позволяющих в принципе получить ответ. 1 балл Если в системе есть ошибки или система не полна — **ноль за всё**.	1 балл
2.	Получено (исключением остальных неизвестных) правильное уравнение для тока в R и/или заряда конденсатора	1 балл
3.	Найдено выражение, производной которого является квадрат тока, **либо** найдена зависимость I(t) В случае чисто арифметических ошибок в этом пункте ставится 1 балл из 2-х. Propagation error не принимаются	2 балл
4.	Найдено $Q=\int I^2 R dt$	1 балл
Итого		**5.0**

II. Эквивалентная замена

Propagation errors are not accepted

№	Содержание	баллы
1.	Идея: замена части схемы эквивалентным источником позволит решить задачу только законами сохранения	1 балл
2.	Параметры эквивалентного источника 2.1 Присутствуют два из трёх утверждений: 1. Напряжение холостого хода равно $\mathcal{E}/2$ 2. Ток короткого замыкания равен $\mathcal{E}/r$ 3. Внутренним сопротивлением является параллельное соединение двух r **либо** найдена зависимость $U(I)$	1 балл
	2.2 Найдено: $\mathcal{E}_0=\mathcal{E}/2$, $r_0=r/2$ (по 0,5 за каждый результат) (Обоснование эквивалентности не требуется)	1 балл
3.	Найдено тепло в эквивалентной схеме	1 балл
4.	Ответ	1 балл
Итого		**5.0**

Задача 1С

Луч, проходящий через фокус линзы, после преломления идёт параллельно оптической оси. Поэтому все изображённые на рисунке предметы дадут изображение одинакового размера, т.е. увеличение обратно пропорционально расстоянию от предмета до фокуса.

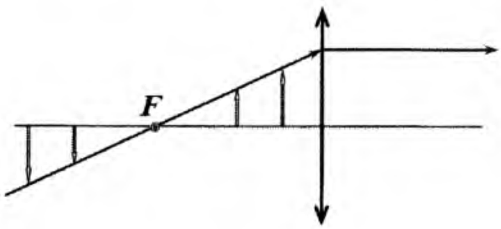


Рис. 1

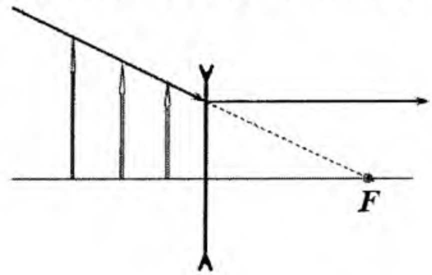


Рис. 2

Из рис. 2 видно, что в случае рассеивающей линзы невозможно получить одинаковый размер изображения при разных положениях предмета, поэтому линза обязательно собирающая.

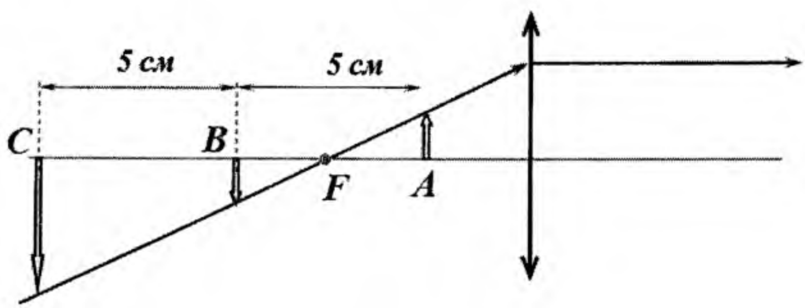


Рис. 3

Положения *A* и *B* предмета, дающие изображения одинакового размера, расположены симметрично относительно фокуса линзы (рис. 3). Если предмет отодвинуть ещё на 5 см, то он окажется в положении *C*, в котором изображение того же размера дал бы втрое больший предмет, поэтому тот же предмет даст втрое меньшее изображение.

Ответ 1/3 см.

Схема оценивания

№	Содержание	баллы
1.	Правильный ответ	1.0
2.	Обоснование ответа	1.0
3.	В идейно правильном обосновании есть вычислительная ошибка	-0.5
Итого		**2.0**

Задача 2. Реактивное движение (10 баллов)

1. Рассмотрим движение ракеты в сопутствующей системе отсчета – инерциальной системе отсчета, которая движется относительно лабораторной системы отсчета со скоростью самой ракеты, то есть в системе отсчета, в которой ракета в данный момент времени покоится. Пусть ракета, имеющая в момент времени t массу m, выбрасывает массу dm со скоростью u, а ее скорость изменятся на $d\mathrm{v}$. Тогда закон сохранения импульса запишется в виде

$$md\mathrm{v} - dmu = 0. \qquad (1)$$

В классической механике изменение скорости ракеты в лабораторной системе отсчета должно совпадать с изменением скорости ракеты в сопутствующей системе отсчета в силу преобразований Галилея. Поэтому, решая уравнение (1) с начальным условием $m = m_0$ при $v = 0$, получаем формулу Циолковского

$$\mathrm{v} = u\ln\left(\frac{m_0}{m}\right). \qquad (2)$$

2. Известно, что первая космическая скорость на поверхности Земли равна

$$v_1 = \sqrt{gR}\,, \qquad (3)$$

тогда из формулы (2) находим начальную массу ракеты

$$m_0 = m\exp\left(\frac{v}{u}\right) = 4.87\times10^3 \text{ кг}. \qquad (4)$$

3. Если на ракету действует внешняя сила F, то в сопутствующей системе координат полный импульс системы будет изменяться и уравнение (1) перепишется в виде

$$mdv - dmu = Fdt, \qquad (5)$$

или, используя обозначение $\mu = -dm/dt$, получим

$$m\frac{dv}{dt} = F + \mu u. \qquad (6)$$

В силу принципа относительности это уравнение не меняет свой вид в произвольной инерциальной системе отсчета и называется уравнением Мещерского.

Подставляя $F = -mg$, окончательно получаем

$$m\frac{dv}{dt} = -mg + \mu u. \qquad (7)$$

4. Для того, чтобы ракета зависла на постоянной высоте, необходимо, чтобы $v = 0$. Подставляя $v = 0$ в уравнение (7) и дифференцируя по времени, получаем

$$-\mu g = \frac{d\mu}{dt}u, \qquad (8)$$

отсюда находим с учетом $\mu(0) = m_0 g/u$

$$\mu(t) = \frac{m_0 g}{u}\exp\left(-\frac{gt}{u}\right). \qquad (9)$$

5. Подставляя $\mathrm{v}(t) = A_1 t + A_2\ln(1 + A_3 t)$ и уравнение $m = m_0 - \mu t$ в (7), найдем

$$A_1 = -g, \qquad (10)$$

$$A_2 = -u, \qquad (11)$$

$$A_3 = -\frac{\mu}{m_0}. \qquad (12)$$

6. Максимальная скорость достигается ракетой, если топливо сгорает практически мгновенно, а при этом и работа силы тяжести оказывается минимально возможной. Таким образом оптимальным расходом топлива является

$$\mu_{opt} = \infty. \qquad (13)$$

Так как сила тяжести не успевает сказаться, то для скорости ракеты можно использовать формулу Циолковского (2)

$$\mathrm{v} = u\ln\left(\frac{m_0}{m}\right). \tag{14}$$

Значит, максимальная высота полета ракеты равна

$$H_{\max} = \frac{u^2}{2g}\ln^2\left(\frac{m_0}{m}\right). \tag{15}$$

7. Пусть в системе отсчета, двигающейся со скоростью v, движется частица со скоростью v'. Тогда ее скорость w в покоящейся системе отсчета дается релятивистской формулой сложения скоростей

$$w = \frac{\mathrm{v}+\mathrm{v}'}{1+\dfrac{\mathrm{v}\mathrm{v}'}{c^2}}\ . \tag{16}$$

Отсюда находим связь между изменениями скоростей в соответствующих системах отсчета

$$dw = \frac{\left(1-\dfrac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right)}{\left(1+\dfrac{\mathrm{v}\mathrm{v}'}{c^2}\right)^2}d\mathrm{v}'. \tag{17}$$

В соответствии с преобразованиями Лоренца

$$t = \frac{t'+\dfrac{\mathrm{v}x'}{c^2}}{\sqrt{1-\mathrm{v}^2/c^2}} \tag{18}$$

изменения времени в двух системах отсчета связаны соотношением

$$dt = dt'\frac{\left(1+\dfrac{\mathrm{v}\mathrm{v}'}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\mathrm{v}^2/c^2}}. \tag{19}$$

Деля уравнения (17) и (19) и полагая $\mathrm{v}'=0$, окончательно получаем

$$a_r = \frac{dw}{dt} = \left(1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right)^{3/2}\frac{d\mathrm{v}'}{dt'} = \left(1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right)^{3/2}a_p. \tag{20}$$

8. В сопутствующей системе координат движение ракеты является классическим, а ее ускорение определяется выражением

$$a_p = \frac{d\mathrm{v}'}{dt'} = \frac{u}{m}\frac{dm}{dt'}. \tag{21}$$

Теперь воспользуемся преобразованием ускорения (20) и времени (19) при $\mathrm{v}'=0$, и получим

$$\frac{dm}{d\mathrm{v}} = \frac{m}{u(1-\mathrm{v}^2/c^2)}. \tag{22}$$

Отсюда находим, что

$$\alpha = \frac{c}{2u}. \tag{23}$$

9. Вычисления по формуле дают

$$m_0 = m\left(\frac{1+\mathrm{v}/c}{1-\mathrm{v}/c}\right)^{c/2u} = 10^{14316}\ \text{кг}. \tag{24}$$

10. Вычисления по формуле дают

$$m_0 = m\left(\frac{1+\text{v}/c}{1-\text{v}/c}\right)^{c/2u} = 1730\,\text{кг}. \qquad (25)$$

Схема оценивания

№	Содержание	баллы	
1	Формула (1)	0.25	**0.5**
	Формула (2)	0.25	
2	Формула (3)	0.25	**0.5**
	Правильное численное значение в формуле (4)	0.25	
3	Формула (5)	0.25	**0.75**
	Формула (6)	0.25	
	Формула (7)	0.25	
4	Формула (8)	0.25	**0.75**
	Начальное условие $\mu(0) = m_0 g / u$	0.25	
	Формула (9)	0.25	
5	Приравнивание коэффициентов полинома по времени к нулю	0.5	**2.0**
	Формула (10)	0.5	
	Формула (11)	0.5	
	Формула (12)	0.5	
6	Формула (13)	0.5	**1.0**
	Формула (14)	0.25	
	Формула (15)	0.25	
7	Формула (16)	0.25	**2.5**
	Формула (17)	0.75	
	Формула (18)	0.25	
	Формула (19)	0.75	
	Формула (20)	0.5	
8	Использование формулы (19) для получения уравнения (22)	0.5	**1.5**
	Формула (21)	0.25	
	Формула (22)	0.25	
	Формула (23)	0.5	
9	Правильное численное значение в формуле (25)	0.25	**0.25**
10	Правильное численное значение в формуле (26)	0.25	**0.25**
Итого			**10,0**

Задача 3 Метаматериалы (10 баллов)

1. Рассмотрим слой проводника расположенный по радиусу в интервале $[r, r+dr]$. Его проводимость $d\rho$ равна

$$d\rho = \sigma_0 \frac{dS}{L} = \beta r \frac{2\pi r dr}{L}, \qquad (1)$$

а значит полная проводимость

$$\rho = \int_0^R d\rho = \frac{2\pi\beta R^3}{3L}. \qquad (2)$$

Таким образом, полное сопротивление проводника записывается в виде

$$R_0 = \frac{1}{\rho} = \frac{3L}{2\pi\beta R^3} = 2.39\times10^{-2}\,Ом. \qquad (3)$$

2. Количество теплоты, выделяемое в проводнике в единицу времени определяется законом Джоуля-Ленца

$$P_I = I^2 R_0. \tag{4}$$

В установившемся режиме тоже самое количество тепла должно отводиться через поверхность проводника в окружающую среду, поэтому по закону Ньютона-Рихмана

$$P_I = 2\pi RLP_{ext} = 2\pi\alpha RL(T_s - T_0), \tag{5}$$

откуда

$$T_s = T_0 + \frac{3I^2}{4\pi^2\alpha\beta R^4} = 297K. \tag{6}$$

3. Рассмотрим цилиндр радиуса r. Найдем количество теплоты P_r, выделяемое в единицу времени внутри этого цилиндра. Для этого сначала определим напряженность электрического поля. По закону Ома плотность тока равна

$$j = \sigma_0 E, \tag{7}$$

поэтому полный ток записывается в виде

$$I = \int_0^r j2\pi r dr = E\int_0^r \sigma_0 2\pi r dr = \frac{2\pi R^3\beta E}{3}. \tag{8}$$

Отсюда

$$E = \frac{3I}{2\pi\beta R^3}. \tag{9}$$

Мощность выделяемого тепла P_r определяется законом Джоуля-Ленца в дифференциальной форме

$$P_r = \int_0^r \sigma_0 E^2 2\pi r L dr = \frac{3I^2 Lr^3}{2\pi\beta R^6}. \tag{10}$$

Очевидно, что мощность, выделяемая внутри цилиндра, должна отводиться через его поверхность, поэтому

$$P_r = P = -\kappa 2\pi r L\frac{dT}{dr}. \tag{11}$$

Решая дифференциальное уравнение (11) с помощью (10) и используя начальное условие

$$T(R) = T_s, \tag{12}$$

получаем решение в виде

$$T(r) = T_0 + \frac{I^2(\alpha R^3 + 3\kappa R^2 - \alpha r^3)}{4\pi^2\alpha\beta\kappa R^6}. \tag{13}$$

Таким образом, температура в центре проводника равна

$$T_{\max} = T_0 + \frac{I^2(\alpha R^3 + 3\kappa R^2)}{4\pi^2\alpha\beta\kappa R^6} = 299K. \tag{14}$$

4. Изменение радиуса проводника определяется законом теплового расширения тел и записывается в виде

$$\delta R_T = \int_0^R \gamma\left[T(r) - T_0\right]dr = \frac{3\gamma(\alpha R + 4\kappa)I^2}{16\pi^2\alpha\beta\kappa R^3} = 5.70\times10^{-9}\,м. \tag{15}$$

5. Индукция магнитного поля определяется теоремой о циркуляции, которая в данном случае записывается в виде

$$B2\pi r = \int_0^r j2\pi r dr = E\int_0^r \sigma_0 2\pi r dr. \tag{16}$$

Используя выражение (9), окончательно находим

$$B(r) = \frac{\mu_0 I r^2}{2\pi R^3}. \tag{17}$$

6. Плотность энергии магнитного поля определяется выражением

$$w_B(r) = \frac{B^2(r)}{2\mu_0}, \tag{18}$$

откуда энергия магнитного поля внутри проводника

$$W_B = \int_0^R w_B(r) 2\pi r L dr = \frac{\mu_0 I^2 L}{24\pi} = 8.33\times10^{-10}\,Дж. \tag{19}$$

7. Запишем условие равновесия прямоугольного слоя проводника очень малой толщины l и длиной L, расположенного от расстояния r до $r + dr$. Полная сила Ампера, действующая на этот слой, равна

$$dF_A = jB(r)Lldr. \tag{20}$$

Отсюда разность давлений

$$dp(r) = \frac{dF_A}{lL} = \frac{3\mu_0 I^2 r^3}{4\pi^2 R^6} dr. \tag{21}$$

Принимая во внимание, что на поверхности проводника давление равно нулю, получаем

$$p(r) = \frac{3\mu_0 I^2 (R^4 - r^4)}{16\pi^2 R^6}. \tag{22}$$

8. В результате механического давления в кристаллической решетке появится напряжение, плотность механической энергии которого определяется выражением

$$w_\sigma = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{p^2(r)}{2E}, \tag{23}$$

откуда полная энергия механических деформаций

$$W_\sigma = \int_0^R w_\sigma 2\pi r L dr = \frac{3\mu_0^2 I^4 L}{320 E\pi^3 R^2} = 2.39\times10^{-18}\,Дж. \tag{24}$$

9. Изменение радиуса провода определяется законом Гука, который в данном случае может быть записан в виде

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{p(r)}{E}, \tag{25}$$

где ε – относительное изменение радиуса.

Таким образом, изменение радиуса вследствие механических деформаций

$$\delta R_\sigma = \int_0^R \varepsilon dr = \frac{1}{E}\int_a^R p(r) dr = \frac{3\mu_0 I^2}{20\pi^2 E R} = 1.91\times10^{-12}\,м. \tag{26}$$

10. Приравнивая выражения (15) и (26), получим

$$\gamma = \frac{4\mu_0 \alpha\beta\kappa R^2}{5E(\alpha R + 4\kappa)} = 3.35\times10^{-10}\,K^{-1}. \tag{27}$$

Схема оценивания

№	Содержание	баллы	
1	Формула (1)	0.25	1.0
	Формула (2)	0.25	
	Формула (3)	0.25	
	Правильное числовое значение в формуле (3)	0.25	
2	Формула (4)	0.25	1,0
	Формула (5)	0.25	
	Формула (6)	0.25	
	Правильное числовое значение в формуле (6)	0.25	
3	Формула (7)	0.25	2.5
	Формула (8)	0.25	
	Формула (9)	0.25	
	Формула (10)	0.25	
	Формула (11)	0.25	
	Формула (12)	0.25	
	Формула (13)	0.5	
	Формула (14)	0.25	
	Правильное числовое значение в формуле (14)	0.25	
4	Формула (15)	0.25	0.5
	Правильное числовое значение в формуле (15)	0.25	
5	Формула (16)	0.25	0.5
	Формула (17)	0.25	
6	Формула (18)	0.5	1.0
	Формула (19)	0.25	
	Правильное числовое значение в формуле (19)	0.25	
7	Формула (20)	0.25	1.0
	Формула (21)	0.25	
	Формула (22)	0.5	
8	Формула (23)	0.5	1.0
	Формула (24)	0.25	
	Правильное числовое значение в формуле (24)	0.25	
9	Формула (25)	0.5	1.0
	Формула (26)	0.25	
	Правильное числовое значение в формуле (26)	0.25	
10	Формула (27)	0.25	0.5
	Правильное числовое значение в формуле (27)	0.25	
Итого			**10,0**