Международная физическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2021–2022 учебный год. Заключительный этап

Условия и решения задач для 8 класса

8.1. (2 балла) Известно, что альбедо (коэффициент отражения видимого света) для поверхности Луны как космического тела составляет в среднем $a_Л = 0{,}12$, а для Земли в среднем $a_З = 0{,}37$. Земля в $N = 81$ раз тяжелее Луны, при этом средняя плотность Земли $\rho \approx 5{,}5$ г/см^3, а средняя плотность Луны $\rho \approx 3{,}35$ г/см^3. Оцените, во сколько раз на Луне в ночь полно-землия (то есть когда видна полная Земля) освещённость больше, чем на Земле в ясную ночь полнолуния. (*А. М. Минарский*)

Ответ: в 41 раз.

Решение. Объёмы пропорциональны кубам радиусов планет, а площади поверхностей — квадратам радиусов. Поэтому

$$N = \frac{M_З}{m_Л} = \frac{\rho_З V_З}{\rho_Л V_Л} = \frac{\rho_З}{\rho_Л} \cdot \left(\frac{R_З}{R_Л}\right)^3,$$

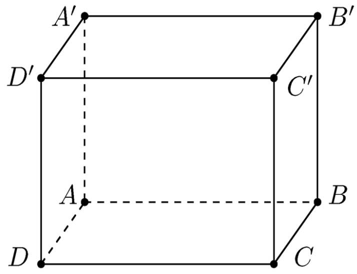
откуда

$$\frac{R_З}{R_Л} = \sqrt[3]{N \cdot \frac{\rho_Л}{\rho_З}} \approx 3{,}66.$$

Земля и Луна находятся на равном расстоянии друг от друга, примерно равноудалены от Солнца и светят его отражённым светом, поэтому отношение интенсивностей освещения от Земли и Луны определяется как отношения их площадей, умноженных на коэффициенты отражения (альбедо):

$$\frac{I_З}{I_Л} = \frac{a_З}{a_Л} \cdot \frac{S_З}{S_Л} = \frac{a_З}{a_Л} \cdot \left(\frac{R_З}{R_Л}\right)^2 \approx \frac{0{,}37}{0{,}12} \cdot (3{,}66)^2 \approx 41 \text{ раз.}$$

8.2. (2 балла) В помещении в форме прямоугольного паралеллепипеда $ABCDA'B'C'D'$ без потолка (см. рис.) с рёбрами $AA' = a = 12$ м, $AB = b = 15$ м и $AD = c = 16$ м натянуты вдоль диагоналей AC' и BD' два каната, по которым в направлении от первой вершины ко второй со скоростями $v_1 = 1{,}5$ м/с и $v_2 = 2{,}5$ м/с соответственно идут канатоходцы, которые держат концы однородного натянутого шнура, посередине которого привязан флажок. С какой по модулю скоростью v движется флажок?



Примечание. Провисание канатов и шнура не учитывайте.

(*С. Н. Сашов, А. В. Чудновский*)

Ответ: 1,63 м/с.

Решение. Из условия однородности шнура следует, что флажок всегда остаётся посередине шнура независимо от его удлинения, то есть справедливо равенство

$$\vec{R} = \frac{1}{2}\left(\vec{R_1} + \vec{R_2}\right),$$

где $\vec{R}$, $\vec{R_1}$ и $\vec{R_2}$ — это радиус-векторы соответственно флажка и канатаходцев. Найдя отношение перемещений ко времени в предположении равномерного прямолинейного движения, получаем аналогичное соотношение для скоростей:

$$\vec{v} = \frac{1}{2}(\vec{v_1} + \vec{v_2}). \qquad (*)$$

Для последующего расчёта проекций скоростей найдём длину большой диагонали помещения-параллелепипеда:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 25 \text{ м.}$$

Если направить оси системы координат вдоль рёбер помещения-параллелепипеда, то проекции скоростей канатоходцев будут выражаться через отношения длин соответствующих рёбер и большой диагонали:

$$\begin{cases} v_{1a} = v_1 \cdot \dfrac{a}{d} = 0{,}72 \ \dfrac{\text{м}}{\text{с}}, \\ v_{1b} = v_1 \cdot \dfrac{b}{d} = 0{,}90 \ \dfrac{\text{м}}{\text{с}}, \\ v_{1c} = v_1 \cdot \dfrac{c}{d} = 0{,}96 \ \dfrac{\text{м}}{\text{с}}, \end{cases} \qquad \begin{cases} v_{2a} = v_2 \cdot \dfrac{a}{d} = 1{,}2 \ \dfrac{\text{м}}{\text{с}}, \\ v_{2b} = -v_2 \cdot \dfrac{b}{d} = -1{,}5 \ \dfrac{\text{м}}{\text{с}}, \\ v_{2c} = v_2 \cdot \dfrac{c}{d} = 1{,}6 \ \dfrac{\text{м}}{\text{с}}, \end{cases}$$

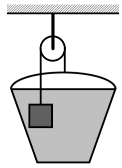
где знак проекции v_{2b} учитывает движение второго канатоходца против выбранного нами направления оси вдоль ребра AB. Из записанных выражений с учётом формулы (∗) находим проекции скорости флажка:

$$\begin{cases} v_a = \dfrac{v_{1a}+v_{2a}}{2} = 0{,}96\ \dfrac{\text{м}}{\text{с}}, \\ v_b = \dfrac{v_{1b}+v_{2b}}{2} = -0{,}3\ \dfrac{\text{м}}{\text{с}}, \\ v_c = \dfrac{v_{1c}+v_{2c}}{2} = 1{,}28\ \dfrac{\text{м}}{\text{с}}. \end{cases}$$

Искомый модуль скорости флажка найдём по теореме Пифагора:

$$v = \sqrt{v_a^2+v_b^2+v_c^2} \approx 1{,}63\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

8.3. **(4 балла)** В ведро собственной массы $m_0 = 600$ г налили воду массой $M = 9$ кг и подвесили на лёгком блоке груз объёмом $V = 3$ дм^3 так, что система оказалась в равновесии (см. рис).

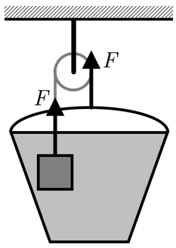


При какой плотности груза это возможно?

(*И. В. Демидов, А. М. Минарский*)

Ответ: 5,2 г/см^3.

Решение. Пусть плотность воды — ρ, тогда сила Архимеда, действующая на груз, равна $F_a = \rho V g$; и если его сила тяжести mg, то сила натяжения нити, на которой он подвешен:



$$F = mg - Fa = mg - \rho V g. \tag{8.3.1}$$

С другой стороны, такая же сила натяжения F через блок уравновешивает полный вес ведра, причём к силе тяжести самого ведра и воды надо добавить ещё и силу Архимеда груза (на сам груз груз эта сила действует вверх, а на ведро с водой противоположная сила отдачи действует вниз). Поэтому

$$F = m_0 g + Mg + Fa = m_0 g + Mg + \rho V g. \tag{8.3.2}$$

Приравняв выражения (8.3.1) и (8.3.2), получим

$$mg = m_0 g + Mg + 2\rho V g \quad \Rightarrow \quad \rho_{\text{груз}} = \frac{m}{V} = \frac{m_0}{V} + \frac{M}{V} + 2\rho = 5{,}2\ \frac{\text{г}}{\text{см}^3}.$$

8.4. **(3 балла)** В однокомнатном домике Незнайки не было отопления, в нём стало холодно, и тогда Незнайка купил три одинаковых электро-обогревательных элемента. Когда на улице была температура $T_0 = -10°$C, Незнайка соединил последовательно свои элементы, включил их в сеть постоянного напряжения, подождал и получил температуру в комнате $T_1 = -5°$C. Тогда Незнайка соединил эти же элементы параллельно.

А) Какую примерно температуру T_2 он получит, если подождёт достаточно долго?

Б) Подскажите Незнайке какой нибудь способ, как бы он мог использовать свои элементы, чтобы получить в комнате температуру около $T_3 = +20°$C.

Примечание. Считайте, что сам Незнайка собой подогревает комнату гораздо слабее обогревательного элемента, а сопротивление этих элементов не зависит от температуры. (*А. М. Минарский*)

Ответ: А) $T_2 = +35°$C, Б) соединить параллельно два элемента из трёх.

Решение. Если в комнате температура T, а на улице T_0, то мощность теплоотдачи из комнаты наружу будет примерно пропорциональна разности температур, то есть $P = k(T - T_0)$, где k — некоторый коэффициент, сложно зависящий от материала и формы стен и пропорциональный их площади. Нам важно лишь, что этот коэффициент постоянен.

Эта мощность теплопотерь в равновесии равна мощности тепловыделения в схеме, собранной из элементов. Пусть сопротивление одного элемента R, напряжение в сети U, тогда сопротивление трёх последовательных элементов $3R$, а мощность обогрева $U^2/3R$. Тогда получим:

$$k(T_1 - T_0) = \frac{U^2}{3R}$$

или, подставляя температуры:

$$T_1 - T_0 = 5°, \qquad 5k = \frac{U^2}{3R}. \tag{∗}$$

Пункт А. При параллельном соединении трёх элементов их общее сопротивление равно $R/3$, поэтому общая мощность такой схемы

$$\frac{U^2}{\frac{R}{3}} = \frac{3U^2}{R},$$

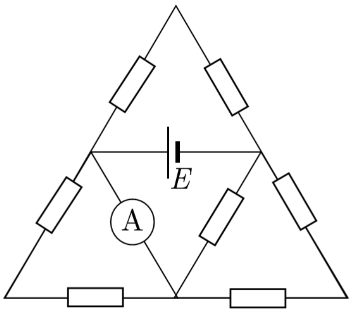
то есть в 9 раз больше, чем в (*). Поэтому и установившаяся разность температур $T_2 - T_0$ должна стать в 9 раз больше, то есть 45°C. Отсюда

$$T_2 = T_0 + 45 = +35°\text{C}.$$

Пункт Б. Если установится температура $T_3 = +20°\text{C}$, то $T_3 - T_0 = 30°\text{C}$, то есть в 6 раз больше, чем в (*). Тогда и требуемая мощность цепи должна быть в 6 раз больше, то есть около $2U^2/R$. Такая мощность может быть обеспечена общим сопротивлением схемы, равным $R/2$. Такую ситуацию проще всего получить, если взять два параллельно соединённых элемента, а третий попросту *не использовать*.

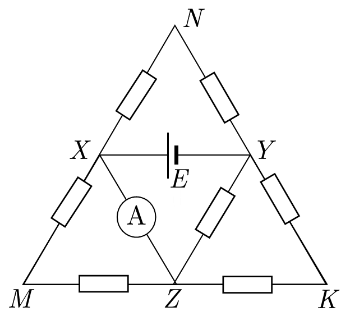
8.5. **(3 балла)** Из одинаковых сопротивлений $R = 3$ Ом каждое, идеального источника с эдс $E = 2$ В и идеального амперметра собрали треугольную схему (см. рис). Найдите показание амперметра.

(*И. В. Демидов, А. М. Минарский*)



Ответ: 1 А.

Решение. Для удобства пометим узлы схемы буквами (см. рис). Так как амперметр идеальный, его сопротивление равно нулю, а значит, между X и Y нет напряжения и можно считать, что точки X и Y соединены просто проводом (на месте амперметра), ток через который нас и интересует. При этом через параллельный ему участок XMY ток не идёт. В результате мы имеем источник, к которому параллельно подключены верхний участок XNZ и нижний участок, содержащий точки $XYKZ$, полный ток через который и есть искомый.



Благодаря идеальности источника участок XNZ никак не влияет на ток нижнего участка, который представляет собой провод XY (то есть амперметр) и параллельное соединение сопротивления R (участок YZ) и сопротивления $2R$ (участок YKZ). Полное сопротивление этого соединения равно

$$\frac{R \cdot 2R}{R + 2R} = \frac{2}{3} \cdot R.$$

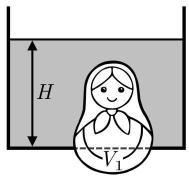
Тем самым общий ток:

$$I = \frac{E}{\frac{2}{3} \cdot R} = \frac{2}{\frac{2}{3} \cdot 3} = 1 \text{ А}.$$

Международная физическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2021–2022 учебный год. Заключительный этап

Условия и решения задач для 9 класса

9.1. **(4 балла)** Фигура полного объёма $V = 0{,}01$ м^3 стоит на дне сосуда с водой и плотно закрывает отверстие площади $S = 0{,}02$ м^2. Фигура выступает наружу на объём $V_1 = 0{,}002$ м^3, а вода в сосуде налита до уровня $H = 0{,}25$ м. При какой наименьшей массе фигуры она не всплывёт?

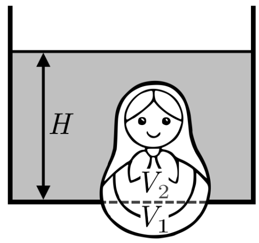


Примечание. Считайте, что трение в отверстии отсутствует.

(*И. В. Демидов, А. М. Минарский*)

Ответ: 3 кг.

Решение. Мысленно разделим фигуру на две части: выступающую вниз часть 1 объёма V_1, и находящуюся внутри сосуда часть 2 объёмом $V_2 = V - V_1 = 0{,}008$ м^3.



Предположим, что между ними в совсем тонкий слой затекла вода из сосуда (см. рис.). Тогда на часть 1 будет действовать сила давления воды вниз, равная $F_д = P \cdot S = \rho g H \cdot S$, а на часть 2 — такая же сила со стороны слоя вверх. Поскольку теперь вода под часть 2 подтекает, суммарная сила на часть 2 со стороны воды будет сила Архимеда, то есть сила, направленная вверх и равная $F_А = \rho g V_2$. Суммарная сила вверх со стороны воды на всю фигуру будет $F = F_А - F_д$. Если теперь убрать этот мысленный слой затёкшей воды, суммарная сила со стороны воды останется та же, поскольку слой действует с противоположной силой на части 1 и 2, а суммарная сила от него равна нулю.

Чтобы фигура не всплыла, необходимо, чтобы сила F была не больше силы тяжести фигуры, то есть $F = F_А - F_д \leqslant mg$. Подставляя $F_А$ и $F_д$, получим для минимальной массы фигуры:

$$m = \rho V_2 - \rho H \cdot S = 1000 \cdot 0{,}008 - 1000 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}02 = 3 \text{ кг}.$$

9.2. **(2 балла)** Тяжёлая вертикальная стенка движется горизонтально со скоростью 2 м/с. В сторону стенки в том же направлении брошен упругий мяч со скоростью 10 м/с, начальной высотой 5 м и начальным расстоянием от стенки 4 м. Определите, на каком расстоянии от точки бросания упадёт мяч после отскока от стенки. Ответ дайте с точностью до 1 см.

Примечание. Ускорение свободного падения считайте равным 10 м/с^2. (*А. Б. Яковлев*)

Ответ: $\sqrt{29}$ м.

Решение. Введём декартову систему координат $К_1$ следующим образом: начало системы координат совпадает с точкой бросания мяча, ось x в направлении движения мяча и стенки, ось y вертикально вверх. Тогда вертикальная координата поверхности Земли будет равна -5 м/с, начальная координата стенки $x_1^{ст}(0) = 4$ м, начальные координаты мяча равны нулю. Обозначим скорости мяча и стенки в этой системе как $v_x^{м}(t)$, $v_y^{м}(t)$, $v_x^{ст} = 2$ м/с.

Вторую систему отсчёта $К_2$ с осями, параллельными осям системы $К_1$, свяжем с движущейся стенкой. Обозначим скорости мяча и стенки в этой системе как $\tilde{v}_x^{м}(t)$, $\tilde{v}_y^{м}(t)$, $\tilde{v}_x^{ст} = 0$ м/с. В этой системе отсчёта удобно рассматривать отражение мяча от стенки, так как в данном случае углы падения и отражения совпадают. До момента соударения со стенкой $\tilde{v}_x^{м}(t) = 10 - 2 = 8$ м/с, поэтому оно произойдёт через

$$\Delta t_1 = \frac{x_1^{ст}(0)}{\tilde{v}_x^{м}} = 0{,}5 \text{ сек}.$$

За это время стенка сдвинется на 2 метра и будет иметь координату $x_1^{ст}(0{,}5) = 5$ м. В момент столкновения величина горизонтальной составляющей скорости мяча поменяется на противоположную, а вертикальная составляющая скорости в системе $К_2$ сохранится. Рассчитаем вертикальную координату и соответствующую составляющую скорости мяча в момент соударения:

$$y_1^{м}(0{,}5) = -\frac{g\Delta t_1^2}{2} = -1{,}25 \text{ м}, \qquad v_y^{м}(0{,}5) = -g\Delta t_1 = -5 \ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Тогда после соударения $\tilde{v}_x^{м}(t) = -8$ м/с, $v_x^{м}(t) = -8 + 2 = -6$ м/с, $v_y^{м}(0{,}5) = -5$ м/с, $x_1^{м}(0{,}5) = 5$ м.

Дальнейшее рассмотрение будем вести в системе K_1. Определим время от момента соударения до падения на землю. Начальная вертикальная координата $-1{,}25$ м, конечная -5 м. Начальная вертикальная скорость -5 м/с. Тогда

$$-5-(-1{,}25)=-\frac{g\Delta t_2^2}{2}+v_y^{\text{м}}(0{,}5)\cdot\Delta t_2.$$

Подставив числовые значения, из квадратного уравнения получаем $\Delta t_2=0{,}5$ с. Тогда

$$x_1^{\text{м}}(1)=x_1^{\text{м}}(0{,}5)+v_x^{\text{м}}(0{,}5)\cdot\Delta t_2=2\text{ м}.$$

Конечные координаты мяча $(2,-5)$. Поэтому расстояние от точки броска равно $\sqrt{5^2+2^2}=\sqrt{29}$ м.

Другое решение. Перейдём в систему отсчёта тяжёлой стенки. В ней мяч бросают горизонтально вдогонку стенке с начальной скоростью $v_x=10-2=8$ м/с. Упругий удар о вертикальную стенку не влияет на вертикальное движение мяча, поэтому мяч падает по закону

$$y=y_0-\frac{gt^2}{2}=5-5t^2,$$

откуда полное время его падения (то есть когда станет $y=0$) будет $t=1$ с. За это время мяч относительно стенки пройдёт горизонтальное расстояние $L=v_xt=8\cdot1=8$ м. При этом сначала 4 м, на которые по условию мяч отстоял от стенки горизонтально, мяч летит к стенке, а затем он меняет направление скорости v_x после упругого отскока и поэтому расстояние $L-4=8-4=4$ м удаляется от стенки. Таким образом, мяч в момент падения по горизонтали оказывается относительно стенки в том же положении, что и в начале, при этом сама стенка в системе отсчёта земли сместилась на $v_{\text{ст}}\cdot t=2\cdot1=2$ м. Это и есть перемещение по горизонтали относительно точки броска, а по вертикали перемещение равно $y=5$ м. Полное же расстояние по теореме Пифагора равно

$$\sqrt{2^2+5^2}=\sqrt{29}\text{ м}.$$

9.3. **(4 балла)** Сизиф катит камень в форме куба с ребром $a=0{,}5$ м и массой 250 кг по наклонной дороге в гору, перекатывая камень вокруг ребра. Высота горы равна $H=400$ м, а угол наклона дороги равен $\alpha=30^\circ$. Определите минимальную выполненную Сизифом работу.

Примечание. Коэффициент трения достаточно велик, чтобы камень не скользил; при этом камень при перекатывании не отскакивает от поверхности дороги. Ответ дайте с точностью до кДж. Ускорение свободного падения 9,8 м/с^2. *(А. М. Минарский)*

Ответ: 1027 кДж.

Решение. Подсчитаем работу Сизифа за один поворот камня на 90°. В начале движения высота центра масс камня равна (по отношению к нижней стартовой точке камня, см. рис. 1):

$$h_0=\frac{1}{2}\cdot a\cdot(\sin\alpha+\cos\alpha).$$

Максимально он поднимает центр масс камня на высоту

$$h=\frac{1}{2}\cdot a\cdot(2\sin\alpha+\sqrt{2})$$

по отношению к той же точке (см. рис. 2).

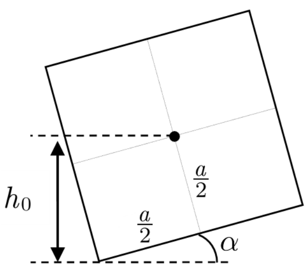


Рисунок 1

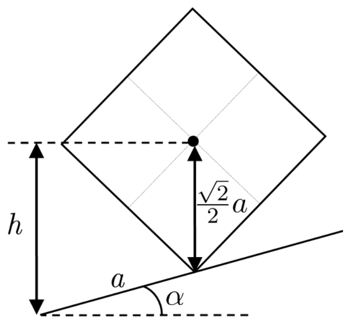


Рисунок 2

Минимальная работа Сизифа против силы тяжести равна изменению потенциальной энергии камня

$$A_1=mg(h-h_0)=\frac{1}{2}\cdot mga\cdot(\sqrt{2}+\sin\alpha-\cos\alpha)=642\text{ Дж}.$$

За один поворот на 90° куб смещается на ребро a, так как путь в гору равен $L=H/\sin\alpha=800$ м, значит, всего нужно сделать $N=L/a=1600$ поворотов. Общая работа Сизифа $A=N\cdot A_1=1027$ КДж.

9.4. **(1 балл)** В городах А и Б расположены телевизионные вышки высотой соответственно $h_A=100$ м и $h_Б=170$ м. Широты городов $\Phi_А=40{,}5^\circ$ и $\Phi_Б=33{,}5^\circ$ северной широты. Проводятся многочисленные (с точностью до 1 см) измерения длины тени каждой из вышек. Определите, самая короткая тень от какой из вышек будет короче.

Примечание. Напомним, что наклон экватора к орбите составляет $\Phi = 23{,}5°$.

(*В. Е. Белонучкин, А. Б. Яковлев*)

Ответ: у башни в городе Б.

Решение. Самые короткие тени имеют место в день летнего солнцестояния. В этот день Солнце будет точно над тропиком. Поэтому углы падения в этот день будут соответственно $\Phi_А - \Phi = 17°$ и $\Phi_Б - \Phi = 10°$. Тогда кратчайшие длины теней $L_А = h_А \cdot \tan 17° = 100 \cdot \tan 17° = 30{,}5$ м, $L_Б = h_Б \cdot \tan 10° = 170 \cdot \tan 10° = 29{,}98$ м. Таким образом, короче тень у башни в городе Б.

9.5. (2 балла) В результате измерений промежутка времени между двумя последовательными затмениями Европы, спутника Юпитера, определено, что в течение года он изменяется от 84 часов 56 минут 42 секунд до 84 часов 57 минут 42 секунд. Оцените по этим данным скорость света.

Примечание. Радиус орбиты Земли $R_З$ считайте равным $1{,}5 \cdot 10^{11}$ м. (*В. Е. Белонучкин, А. Б. Яковлев*)

Ответ: $3{,}04 \cdot 10^8$ м/с.

Решение. В связи с тем, что орбита Юпитера гораздо больше земной орбиты, а скорость Юпитера намного меньше скорости Земли, можно считать, что за время одного оборота Европы взаимное положение Земли и Юпитера практически не меняется. Измеренные изменения продолжительности периода обращения Европы связаны только с изменением направления движения Земли по орбите. Обозначим через T_E период обращения Европы вокруг Юпитера, скорость движения Земли по орбите:

$$v_З = \frac{2\pi R_З}{T_З} = 29{,}8\ \frac{\text{км}}{\text{с}},$$

(здесь $T_З = 1$ год $= 3{,}15 \cdot 10^7$ с), скорость света c, минимальный и максимальный промежутки времени как t_1 и t_2.

При движении к Юпитеру Земля получает сигнал об очередном затмении Европы раньше на время $v_З \cdot T_E / c$. При движении от Юпитера сигнал на такое же время запаздывает. Значит, во втором случае свет проходит расстояние на $2v_З T_E$ больше, чем в первом. Поэтому

$$c(t_2 - t_1) = 2v_З T_E, \tag{9.5.1}$$

а время между затмениями равно

$$T_E = \frac{t_2 + t_1}{2}. \tag{9.5.2}$$

Подставив (9.5.2) в (9.5.1) и преобразовав, получим

$$c = v_З \cdot \frac{t_2 + t_1}{t_2 - t_1} = 3{,}04 \cdot 10^8\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Примечание. Получившийся результат приблизительно на 1% отличается от действительного значения скорости света.

Международная физическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2021–2022 учебный год. Заключительный этап

Условия и решения задач для 10 класса

10.1. (4 балл) Упругий мяч массы M падает в вакууме в поле тяжести g с высоты H на поршень массы m и площади S, закрывающий цилиндрический вертикальный сосуд с ν молями газа гелия при температуре T. На какое расстояние сместится поршень, когда мяч перестанет прыгать?
Примечание. Система теплоизолирована, теплоёмкостью поршня и стенок сосуда пренебрегите.

(*А. М. Минарский*)

Ответ: $x = \dfrac{3M\nu RT}{5m(m+M)g} - \dfrac{2M}{5(m+M)} \cdot H$.
Решение. Пусть поршень сместится вниз на расстояние x, а его температура установится T_1. По закону сохранения энергии:

$$MgH + (M+m)gx + \frac{3}{2}\nu RT = \frac{3}{2}\nu RT_1 \qquad (10.1.1)$$

Начальные объём и давление $V = hS$, $P = mg/S$, где h — начальная высота сосуда, заполненная гелием; конечные объём и давление $V_1 = (h-x)S$; $P_1 = (m+M)g/S$; поэтому уравнение состояния $PV = \nu RT$ для начального и конечного положения будут:

$$mgh = \nu RT, \qquad (10.1.2)$$

$$(M+m)g(h-x) = \nu RT_1. \qquad (10.1.3)$$

Из уравнений (10.1.2) и (10.1.3), избавляясь от h, найдём

$$\nu RT_1 = (M+m)\left(\frac{\nu RT}{m} - gx\right),$$

и подставляя это в (10.1.1), находим x:

$$x = \frac{3M\nu RT}{5m(m+M)g} - \frac{2M}{5(m+M)} \cdot H.$$

Примечание. Если $3/2 \cdot \nu RT < mgH$, то $x < 0$. Это означает, что мяч поднимется, то есть эффект нагрева газа за счёт падения мяча оказывается сильнее эффекта дополнительного сжатия газа под тяжестью мяча.

10.2. (3 балла) У электрического чайника, потребляющего от сети с напряжением 220 В ток в 10 А, вышел из строя автомат отключения. Определите, с какой скоростью выходит пар из носика чайника площадью 3 см^2. КПД чайника равен 90%, а пар из него выходит только через носик.
Примечание. Плотность насыщенного водяного пара при температуре 100°C равна 0,6 кг/м^3, удельная теплота парообразования $2{,}26 \cdot 10^6$ Дж/кг. Ответ дайте с точностью до 0,1 м/с.

(*Л. Г. Асламазов, А. А. Варламов, А. Б. Яковлев*)

Ответ: 4,9 м/с.
Решение. Будем считать, что в установившемся процессе почти вся подводимая к чайнику энергия идёт на процесс парообразования, то есть не будем учитывать тепловые потери самого пара. Учитывая КПД чайника, мощность, идущая на образование пара равна

$$P = I \cdot U \cdot \eta,$$

где U — напряжение, I — сила тока, η — КПД чайника. Поэтому за малый промежуток времени Δt испарится масса ΔM воды, определяемая соотношением

$$\Delta M \cdot c = P \cdot \Delta t,$$

где c — удельная теплота парообразования. Так как вся образовавшаяся за время Δt масса пара должна покинуть чайник через носик, то справедливо следующее соотношение

$$\Delta M = \rho_{\text{пар}} \cdot S \cdot v \cdot \Delta t,$$

где S — площадь сечения носика чайника, v — скорость пара, $\rho_{\text{пар}}$ — плотность насыщенного водяного пара.
Таким образом для искомой скорости пара получим

$$v = \frac{I \cdot U \cdot \eta}{c \cdot S \cdot \rho_{\text{пар}}}.$$

Подставляя числовые значения, получим
$$v = \frac{10 \cdot 220 \cdot 0{,}9}{2{,}26 \cdot 10^6 \cdot 3 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}6} \approx 4{,}9\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

10.3. **(3 балла)** Вблизи поверхности Луны существует направленное вертикально вверх электрическое поле, резко спадающее с высотой. На высоте $h = 20$ см напряжённость E равна 1 В/м. Было предложено использовать его для создания транспортной системы для перемещения параллельно плоским участкам поверхности Луны.

Пусть система, которая представляет собой круг массой $m_1 = 100$ кг и радиуса $R = 10$ м, переносит полезный груз массой $m_2 = 120$ кг. Для создания подъёмной силы на поверхности круга создаётся положительный электрический заряд Q.

А) Предполагая, что токи утечки с поверхности системы отсутствуют, найдите поверхностную плотность электрического заряда, обеспечивающего работу системы на высоте $h = 20$ см.
Примечание. Ускорение свободного падения на Луне 1,622 м/с^2. Ответ дайте с точностью до 0,01 Кл/м^2.

Б) Покажите, что равновесие в процессе движения будет устойчивым по высоте.

(А. Б. Яковлев)

Ответ: 1,14 Кл/м^2.

Решение пункта А. В равновесии сумма всех сил, действующих на транспортную систему, равно нулю:
$$EQ - m_1 g - m_2 g = 0, \tag{$*$}$$
где g — ускорение свободного падения у поверхности Луны. Преобразовав ($*$), получим выражение для поверхностной плотности поверхностного заряда σ:
$$\sigma = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{g(m_1 + m_2)}{\pi E R^2}.$$
Подставляя числовые значения, получим $\sigma = 1{,}14$ Кл/м^2.

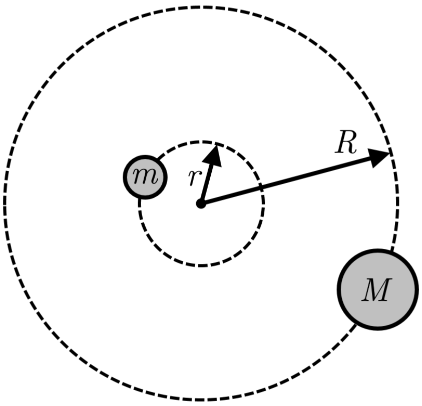
Решение пункта Б. Наконец, рассмотрим вопрос об устойчивости движения. Согласно условию задачи, электрическое поле у поверхности Луны резко спадает с высотой, поэтому при малом смещении транспортной системы вниз резко возрастает поле и направленная вверх электрическая сила, что вызовет подъём системы. Смещение вверх вызовет противоположный эффект, то есть приведёт к понижению высоты. Это и означает устойчивость движения.

10.4. **(3 балла)** Если бы масса Земли возросла до половины массы Солнца без изменения расстоянием между Солнцем и Землёй, то как бы изменилась длительность земного года?

(В. Е. Белонучкин, А. Б. Яковлев)

Ответ: уменьшилась в $\sqrt{1{,}5}$ раза.

Решение. Согласно обобщённому третьему закону Кеплера:
$$(M + m) \cdot \frac{T^2}{a^3} = \text{const},$$
где M и m — массы взаимодействующих тел, T — период обращения вокруг центра масс, a — большая полуось эллипса, который одно тело описывает относительно другого. Получим обобщённый третий закон Кеплера, если предположить, что оба тела движутся по окружностям относительно общего центра масс.



Посмотрим на рисунок. Тела массой M и m движутся под действием силы одинаковых по величине сил $\frac{GMm}{(R+r)^2}$ по круговым орбитам с радиусами R и r соответственно. При этом ускорения масс равны
$$\frac{v_M^2}{R} = \frac{4\pi^2 R^2}{T^2 R} = \frac{4\pi^2 R}{T^2} \quad \text{и} \quad \frac{v_m^2}{r} = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2 r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2}.$$
Поэтому будут справедливы уравнения
$$\frac{GMm}{(R+r)^2} = M \cdot \frac{4\pi^2 R}{T^2}, \tag{10.4.1}$$
$$\frac{GMm}{(R+r)^2} = m \cdot \frac{4\pi^2 r}{T^2}. \tag{10.4.2}$$
Поделив уравнение (10.4.2) на уравнение (10.4.1), получим
$$mr = MR. \tag{10.4.3}$$

Получим с помощью (10.4.3) полезное соотношение, которое можно использовать в дальнейшем:

$$r + R = r + \frac{mr}{M} = r \cdot \frac{M+m}{M} \quad \Rightarrow \quad \frac{r}{M} = \frac{R+r}{M+m}. \tag{10.4.4}$$

Подставив (10.4.3) в (10.4.1) и используя (10.4.4), получим

$$(M+m) \cdot \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G},$$

то есть обобщённый третий закон Кеплера. Если в качестве M взять массу Солнца, то при обычной массе Земли можно считать $m = 0$, а в случае возросшей массы $m = M/2$, то есть массовый множитель увеличивается в полтора раза, следовательно, в полтора раза уменьшается T^2. Окончательно, период уменьшается в $\sqrt{1{,}5} = 1{,}225$ раза.

10.5. **(4 балла)** В конце 21 века, согласно прогнозам некоторых уфологов, будет осуществлена частичная колонизация Марса. Естественно, что контакт с прародиной Землёй будет предполагать и проведение спортивных соревнований между землянами и колонистами.

Пусть в программу межпланетной олимпиады включены прыжки в высоту. Землянин Иван (масса 70 кг, рост 185 см, высота точки центра масс 130 см) прыгает на максимальную высоту 250 см способом «фосбери флоп» (с положением центра масс при прыжке на 15 см ниже планки, а перед толчком происходит сгибание ноги на $\Delta = 30$ см). Какого максимального результата он может ожидать в марсианских условиях, если ускорение на его поверхности в 2,5 раз меньше, чем на Земле?

Примечание. Считайте, что характер движения не меняется при смене планеты. Ответ дайте с точностью до 10 см. *(П. В. Маковецкий, А. Б. Яковлев)*

Ответ: 4,5 м.

Решение. Определим силу ног Ивана для преодоления планки на Земле на высоте 250 см. При этом с помощью толчка необходимо поднять точку центра масс на высоту $h_З = 250 - 15 - 130 = 105$ см. Для этого скорость отрыва должна быть равна

$$v_З = \sqrt{2g_З h_З} = 4{,}54\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Для обеспечения такой скорости на длине толчка Δ требуется постоянное ускорение величиной

$$a_З = \frac{v_З^2}{2\Delta} = \frac{g_З h_З}{\Delta} = 34{,}3\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Тогда вызвавшая ускорение сила ног равна $F_{З\text{разгон}} = m a_З = 2401$ Н. Для определения полной силы ног к этой силе необходимо добавить силу тяжести прыгуна на Земле:

$$F_{\text{ноги}} = F_{З\text{разгон}} + m g_З = 3087\ \text{Н}.$$

Предполагая, что на Марсе сила ног не изменится, вычислим силу разгона на Марсе:

$$F_{\text{Мразгон}} = F_{\text{ноги}} - m g_{\text{М}} = 2812{,}6\ \text{Н}.$$

Тогда ускорение толчка на Марсе

$$a_{\text{М}} = \frac{F_{\text{Мразгон}}}{m} = 40{,}18\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Так как длина толчка Δ не изменяется (это связано с отработанной тренировками техникой движения), то скорость в конце толчка равна

$$v_{\text{М}} = \sqrt{2a_{\text{М}}\Delta} = 4{,}91\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Тогда высота подъёма центра масс на Марсе

$$h_{\text{М}} = \frac{v_{\text{М}}^2}{2g_{\text{М}}} = \frac{a_{\text{М}}\Delta}{g_{\text{М}}} = 3{,}08\ \text{м}.$$

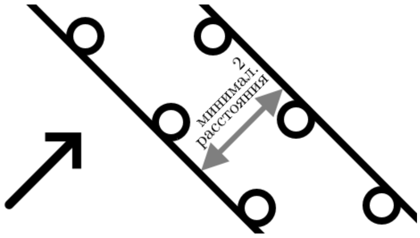
При этом будет преодолена планка на высоте $h_{\text{планка}} = h_{\text{М}} + 1{,}30 + 0{,}15 = 4{,}53$ м $\approx 4{,}5$ м (с точностью до 10 см).

Примечание. При расчёте мы брали $g_З = 9{,}8$ м/с^2. Взятие для расчётов $g_З = 10$ м/с^2 изменило бы промежуточные результаты, но не повлияло бы на окончательный ответ.

Международная физическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2021–2022 учебный год. Заключительный этап

Условия и решения задач для 11 класса

11.1. **(2 балла)** Однородный поток альфа частиц (ядер гелия) падает перпендикулярно на очень тонкую пластину некоторого вещества с простой кубической решёткой. Толщина пластины равна 2 минимальным расстояниям между атомами. Будем предполагать, что взаимодействие альфа частиц с атомами пластины возможно, только если расстояние от центра атома до альфа-частицы меньше радиуса атома.



Определите долю альфа частиц, прошедших пластину без взаимодействия для двух рассматриваемых способов формирования пластины:

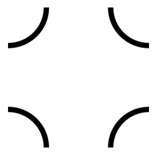
А) поверхность пластины параллельна плоскости элементарной ячейки,

Б) поверхность пластины составляет угол 45° с плоскостью элементарной ячейки (см. рис., направление частиц указано стрелкой).

Примечание. Радиус атома вещества $r = 1{,}4 \cdot 10^{-9}$ м, длина ребра элементарной ячейки $d = 4 \cdot 10^{-9}$ м, радиус альфа частицы $r_\alpha = 2 \cdot 10^{-15}$ м (задача носит модельный характер и указанные параметры не являются табличными). *(А. Б. Яковлев)*

Ответ: А) 0,615; Б) 0,456.

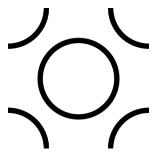
Решение. Изобразим одну элементарную ячейку (участок площади, при повторении воспроизводящий картину всей решётки) для первого случая, когда частицы летят параллельно граням кубической решётки.



Поток альфа частиц направлен перпендикулярно плоскости рисунка, и при этом атомы второго слоя пластины полностью заслоняются атомами первого слоя.

По условию диаметр альфа-частицы почти в миллион раз меньше диаметра атома, поэтому можно считать её точечной. При этом взаимодействие произойдёт в том случае, если альфа частица пересечёт проекцию атома.

Таким образом, доля невзаимодействующих частиц будет равна отношению площади, свободной от атомов к полной площади одной элементарной ячейки. Площадь, занятая атомами на одну ячейку, равна πr^2 (4 раза по четверти поперечного сечения атома), а площадь ячейки — d^2. Отношение этих площадей $\pi(r/d)^2$ даст долю столкнувшихся альфа-частиц, и, тем самым, доля свободно пролетевших для 1-го случая равна $\epsilon = 1 - \pi(r/d)^2$. Подставляя числовые значения, получим $\epsilon = 0{,}615$.



Изобразим одну элементарную ячейку для второго случая (в условиях задачи проекции атомов двух слоёв не перекрывают друг друга).

Площадь, занятая атомами на одну ячейку, равна $2\pi r^2$ (4 раза по четверти и одно полное поперечное сечение атома). Однако площадь ячейки при этом увеличивается за счёт наклона и равна $\sqrt{2} \cdot d^2$.

Таким образом, во 2-м случае доля столкнувшихся равна $\sqrt{2} \cdot \pi(r/d)^2$, а доля свободно пролетевших равна $\epsilon = 1 - \sqrt{2} \cdot \pi(r/d)^2$. Подставляя числовые значения, получим $\epsilon \approx 0{,}456$.

11.2. **(3 балла)** Проектируется игрушечный подъёмный кран из очень лёгкой пластиковой плёнки с надувной стрелой. Эта стрела представляет собой цилиндр диаметром 2 см и длиной 70 см, на конце заглушённый. В него планируется подавать воздух давлением $P = 50000$ Па $= 0{,}5$ атм (имеется в виду превышение давления над атмосферным). Какую массу можно поднять таким краном, если вертикальное отклонение конца стрелы не должно превышать половины диаметра, а сопротивлением пластиковой оболочки на изгиб можно пренебречь?

Примечание. Считайте молярную массу воздуха $29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, ускорение свободного падения $g = 10$ Н/кг, температуру воздуха 20°С. Ответ округлите до 10 грамм. *(С. Н. Сашов, А. Б. Яковлев)*

Ответ: 440 грамм.

Решение. Изобразим стрелу крана с грузом при её максимально допустимой деформации и введём систему координат следующим образом: точка начала O расположена в середине закреплённого торца, ось x направим вдоль средней линии от закреплённого конца к свободному, ось y направлена вертикально вверх. Так как диаметр стрелы значительно меньше её длины, то можно считать, что торцевая поверхность на свободном конце будет оставаться параллельной оси y.

Расставим силы: F_1 — сила тяжести приложенного груза, F_3 — сила давления газа внутри стрелы на свободный торец, F_2 — сила тяжести стелы и газа внутри неё. Все остальные силы можно не учитывать, так как они не имеют моментов относительно точки O. В равновесии будет справедливо следующее уравнение моментов:

$$F_2 \cdot \frac{L}{2} + F_1 \cdot L - F_3 \cdot d = 0, \qquad (*)$$

где L — длина стрелы, d — диаметр стрелы. Массу газа m можно определить из уравнения Клапейрона-Менделеева:

$$P \cdot V = \frac{m}{\mu} \cdot R \cdot T,$$

где P — давление газа, V — объём газа, μ — молярная масса воздуха, R — универсальная газовая постоянная, T — температура газа в Кельвинах.
Принимая во внимание, что

$$F_3 = P \cdot S = P \cdot \frac{\pi d^2}{4},$$

где S — площадь поперечного сечения стрелы, и пренебрегая массой оболочки (в условии задачи не задана) преобразуем уравнение ($*$) к виду

$$Mg = \frac{P \cdot S \cdot d}{L} - \frac{mg}{2}.$$

Тогда масса груза равна

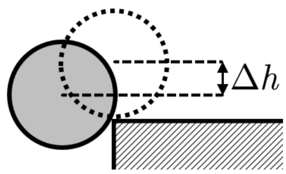
$$M = \frac{P\pi d^2}{4} \cdot \left(\frac{d}{Lg} - \frac{L\mu}{2RT}\right) = \frac{5 \cdot 10^5 \cdot \pi \cdot 4 \cdot 10^{-4}}{4} \cdot \left(\frac{2 \cdot 10^{-2}}{0{,}7 \cdot 10} - \frac{0{,}7 \cdot 29 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 8{,}314 \cdot 293}\right) \approx 0{,}440 \text{ кг}.$$

11.3. (4 балла) С резко остановившегося грузовика скатывается незакреплённое колодезное кольцо со скоростью 1 м/с. Определите, с какой скоростью оно ударится о поверхность дороги, если внешний диаметр кольца 90 см, высота кузова грузовика 1,5 м, ускорение свободного падения 9,8 м/с^2.

(А. И. Буздин, А. Р. Зильберман, С. С. Кротов, А. Б. Яковлев)

Ответ: 5,17 м/с.

Решение. Так как грузовик покоится, то движение кольца можно рассматривать в системе отсчёта, неподвижной относительно земли, относительно которой кольцо движется со скоростью $v_0 = 1$ м/с. С момента, когда центр кольца окажется над краем кузова грузовика, и до момента отрыва центр кольца движется по окружности радиуса $R = 45$ см с центром в точке касания, совершая при этом поворот на угол α.



Найдём высоту центра кольца относительно поверхности Земли, на которой произойдёт отрыв и скорость v_1 центра в этот момент. Для этого воспользуемся законом сохранения энергии и вторым законом Ньютона:

$$\begin{cases} \dfrac{mv_1^2}{2} = \dfrac{mv_0^2}{2} + mg\Delta h \\ \dfrac{mv_1^2}{R} = mg\cos\alpha = mg \cdot \dfrac{R - \Delta h}{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta h = \dfrac{R}{3} \cdot \left(1 - \dfrac{v_0^2}{gR}\right), \\ v_1 = \sqrt{\dfrac{1}{3} \cdot (v_0^2 + 2gR)} = 1{,}81 \text{ м}, \\ \cos\alpha = \dfrac{1}{3} \cdot \left(2 + \dfrac{v_0^2}{gR}\right) = 0{,}74. \end{cases}$$

При нахождении кольца в кузове грузовика высота центра кольца относительно поверхности земли равна $H_1 = H + R = 1{,}5 + 0{,}45 = 1{,}95$ м. В момент начала падения высота равна $H_2 = H_1 - \Delta h = 1{,}69$ м. В момент удара о землю высота центра $H_3 = R = 0{,}45$ м. Таким образом, центр кольца должен пройти по вертикали расстояние $\Delta H = H_3 - H_2 = 1{,}24$ м с начальными горизонтальной и вертикальной скоростями $v_{1\text{г}} = v_1 \cdot \cos\alpha = 1{,}34$ м/с, $v_{1\text{в}} = v_1 \cdot \sin\alpha = 0{,}82$ м/с. Горизонтальная компонента в процессе падения не изменяется, а вертикальную составляющую можно найти из закона сохранения энергии:

$$\frac{m{v_{2\text{в}}}^2}{2} = \frac{m{v_{1\text{в}}}^2}{2} + mg\Delta H.$$

Подставив известные значения, получим

$$v_{2\text{в}} = 5\ \frac{\text{м}}{\text{с}}, \qquad v_2 = \sqrt{{v_{1\text{г}}}^2 + {v_{2\text{в}}}^2} = 5{,}17\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Примечание. Для того чтобы решение было справедливым начальная скорость должна быть достаточно малой $v_0^2 \leqslant gR$.

11.4. (2 балла) Есть закон Стефано-Больцмана для интенсивности I теплового излучения (то есть мощности теплового излучения с единицы поверхности):

$$I = aT^4,$$

где $a = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\ \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$ — коэффициент в законе Стефана-Больцмана, T — абсолютная температура поверхности. Известно, что энергия и импульс для излучения связаны соотношением

$$E = p \cdot c,$$

где $c = 3 \cdot 10^8$ м/с — скорость света.
Оцените, какую силу давления создаёт тепловое излучение Солнца ($T = 6000$K, $R = 6{,}5 \cdot 10^8$ м), падающее перпендикулярно на идеально отражающее зеркало площади $S = 217{,}4$ м^2, расположенное в космосе вблизи Земли.
Примечание. Радиус орбиты Земли вокруг Солнца $r = 1{,}5 \cdot 10^{11}$ м. Ответ дайте с точностью до милли-Ньютона. *(А. Н. Матвеев, А. М. Минарский)*
Ответ: 2 мН.
Решение. Общая мощность солнечного излучения:
$$N_0 = I \cdot S_0 = I \cdot 4\pi R^2,$$
где S_0 — площадь поверхности Солнца. Эта мощность на расстоянии орбиты Земли равномерно распределяется по всей поверхности сферы, вписанной в эту орбиту, то есть по площади $S_1 = 4\pi r^2$, тем самым на зеркало S падает мощность
$$N = \frac{S}{S_1} \cdot N_0 = S \cdot \left(\frac{R}{r}\right)^2 \cdot I = S \cdot \left(\frac{R}{r}\right)^2 \cdot aT^4 = 217{,}4 \cdot \left(\frac{6{,}5}{1{,}5}\right)^2 \cdot 10^{-6} \cdot 5{,}67 \cdot 10^{-8} \cdot 6000^4 = 299980 \text{ Вт}.$$
Эта мощность (энергия в единицу времени) после деления на скорость света даёт импульс в единицу времени, падающий на зеркало. Поскольку при отражении в хорошем зеркале импульс излучения меняется на противоположный, то полный импульс, передаваемый зеркалу в единицу времени, то есть сила, действующая на него, будет в 2 раза больше, то есть:
$$F = \frac{2N}{c} = 2 \text{ мН}.$$

11.5. (2 балла) Говорят, что капля камень точит. Рассчитайте силу, с которой капля массой $m_к = 5$ грамм, упавшая с высоты $H = 10$ м, действует на горизонтальную поверхность. Для простоты представьте каплю в виде цилиндра с высотой, равной диаметру.
Примечание. Скорость звука в воде 1500 м/с. Ответ дайте с точностью до 1 Н.
(С. С. Хилькевич, А. Б. Яковлев)
Ответ: 5666 Н.
Решение. Для капли выбранной формы её взаимодействие с преградой можно описывать как одномерное. В момент удара тонкий слой воды, вступающий во взаимодействие с поверхностью, останавливается. Скорость воды в слое становится равной нулю и сам слой становится в свою очередь препятствием. О первый слой тормозится следующий и так далее. В капле распространяется ударная волна, то есть вдоль неё со скоростью звука $v_{зв}$ в обратном направлении движется поверхность, разделяющая движущуюся часть капли от уже покоящейся части.
По второму закону Ньютона
$$F = ma = m\frac{\Delta v}{\Delta t},$$
где a — ускорение, Δv — изменение скорости, m — масса жидкости, которая изменила свою скорость до нуля за промежуток времени Δt. Так как после контакта скорость капли нулевая, то
$$\Delta v = v_к,$$
где $v_к$ — скорость капли непосредственно перед контактом с поверхностью.
Теперь определим массу затормозившей за Δt жидкости. За данное время затормозит жидкость внутри цилиндра высотой
$$h = v_{зв}\Delta t \quad \Rightarrow \quad m = \rho\pi \cdot \frac{d^2}{4} \cdot v_{зв}\Delta t,$$
где d — диаметр капли, ρ — плотность воды. Таким образом, получим для силы
$$F = \rho\pi \cdot \frac{d^2}{4} \cdot v_{зв} v. \qquad (*)$$
Для того, чтобы провести расчёт, необходимо найти неизвестные величины v и d. Скорость капли определяется из закона сохранения энергии
$$gH = \frac{v^2}{2},$$
а диаметр из формулы для массы цилиндра воды
$$m_в = \rho\pi \cdot \frac{d^2}{4} \cdot d,$$
с учётом того, что диаметр равен высоте. Подставив в (*), окончательно получим
$$F = \sqrt[3]{\frac{\rho\pi m_в^2}{4}} \cdot v_{зв} \cdot \sqrt{2gH}.$$
Подставим числовые значения: $F = 5666$ Н.