Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2021–2022 учебный год. Заключительный этап

Решения и критерии

Каждая задача оценивается в 7 баллов. Частичные баллы могут ставиться, если задача в целом не решена, но есть существенные продвижения (от 1 до 3 баллов), или если задача в целом решена, но есть существенные недочёты (от 4 до 6 баллов). Ниже приведены более точные критерии для некоторых задач.

Задачи для 5 класса

1. Дедушка дал Пете несколько карточек и попросил составить из них равенство. У Пети получилось вот что:

$$\boxed{8}\boxed{1}\ \boxed{-}\ \boxed{7}\boxed{5}\ \boxed{=}\ \boxed{0}\boxed{6}$$

«Мне не очень нравится твоё равенство, — сказал дедушка, — ведь в нём число 6 записано как 06, а так писать не принято». Придумайте, как Пете из всех карточек сложить верное равенство, которое понравится дедушке. (*А. А. Теслер*)

Ответ: Например, так: $\boxed{1}\boxed{0}\boxed{5}\ \boxed{-}\ \boxed{7}\ \boxed{=}\ \boxed{9}\boxed{8}$.

2. На космическом корабле среди мирных космонавтов завелись два предателя, которые хотят избавиться от всех людей на корабле. Раз в день все собираются в одной комнате и голосуют, кого выгнать.
В первый день Красный, Зелёный, Чёрный и Фиолетовый выбрали Жёлтого, Синий и Голубой — Зелёного, Жёлтый — Красного, Розовый — Фиолетового. По итогам голосования Жёлтого космонавта выгнали с корабля.
Во второй день Красный и Чёрный выбрали Голубого, Синий, Зелёный, Розовый и Фиолетовый — Чёрного, Голубой — Фиолетового. В результате Чёрный космонавт был выгнан.
В третий день Красный, Голубой и Зелёный выбрали Фиолетового, Синий — Красного, Розовый и Фиолетовый — Синего.
Вычислите предателей, если голосуют они одинаково. Объясните, почему предатели — именно они, а не кто-нибудь другой. (*П. Д. Муленко*)

Решение. Мы ищем двух голосующих одинаково. По результатам голосования первого дня делаем вывод, что Жёлтый и Розовый вне подозрений. На второй день у нас формируется две пары: Красный-Чёрный и Зелёный-Фиолетовый, в то время как голоса Синего и Голубого разошлись. Наконец, на третий день чёрный проголосовать не смог, поэтому совпадение в паре Красный-Чёрный мы не видим, но можем увидеть, что Зелёный и Фиолетовый голосовали по-разному, а значит, они не предатели.

Ответ: Красный и Чёрный.

3. Однажды Геральта укусила виверна. Лекарь велел ему принимать лекарство в течение 180 дней по графику «2 через 1»: два дня приёма перемежаются одним днём отдыха. Геральт начал принимать лекарство в понедельник. Сколько раз он будет его принимать по понедельникам и вторникам подряд? (*Л. С. Корешкова*)

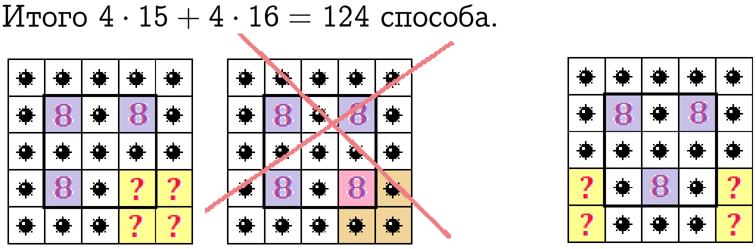
Ответ: 9 раз.

Решение. За каждые 3 недели (21 день) это произойдёт 1 раз. $180 = 8 \cdot 21 + 12$; в начале последних 12 дней ситуация произойдёт в девятый раз.

Критерии. За замечание о том, что каждые три недели ситуация происходит один раз — 3 балла.

4. Женя играет в игру «Сапёр», в которой необходимо установить, в каких клетках квадратной таблицы расположены мины. Для этого в каждой клетке, где нет мин, написано, в скольких соседних с ней (по стороне или углу) клетках мины есть. На первом уровне игра проходит на поле 5×5, причём игроку на долю секунды показывается решение. Женя успела заметить, что ровно в трёх клетках стоит число 8, но не запомнила, где именно. Сколько расстановок мин удовлетворяют этому условию? (*П. Д. Муленко*)

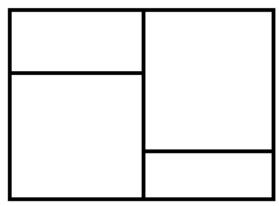
Решение. Заметим, что восьмёрки могут стоять только в центральном квадрате 3×3, причём две восьмёрки не могут стоять рядом. Есть только два принципиально разных способа их так расставить: либо в трёх углах этого квадрата, либо в двух углах и на стороне (но с учётом поворотов этих способов вчетверо больше). Для каждого из четырёх способов первого типа есть $2^4 - 1 = 15$ способов поставить мины на оставшиеся неопределёнными 4 клетки (один способ вычитается, поскольку там четыре восьмёрки, а не три — см. рисунок). Для каждого из четырёх способов второго типа есть $2^4 = 16$ способов поставить мины. Итого $4 \cdot 15 + 4 \cdot 16 = 124$ способа.



Ответ: 124 расстановки.

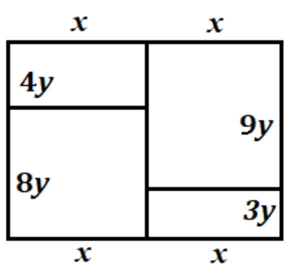
Критерии. За идею о том, что восьмёрки стоят только в центральном квадрате 3×3 — 2 балла.

5. В стекольной мастерской сделали необычное окно. Оно имеет форму прямоугольника, разделённого по вертикали на две равных части. В каждой половинке есть форточка: в левой — сверху, площадью в шестую часть от всего окна и периметром 92 сантиметра; в правой — снизу, площадью в восьмую часть всего окна и периметром 84 сантиметра. Чему равны периметры всего окна и остальных кусков стекла? (*Л. С. Корешкова*)

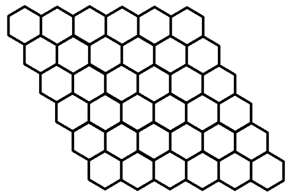


Ответ: 132, 124 и 216.

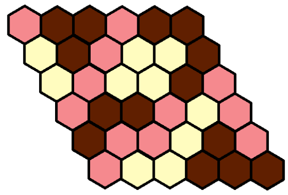
Решение. Обозначим верхнюю сторону за $2x$. Из отношения площадей форточек к общей площади окна находим, что высота форточек составляет $1/3$ и $1/4$ от общей высоты. В связи с этим удобно всю высоту окна обозначить за $12y$ (так как 12 делится на 3 и на 4). Тогда высоты форточек равны $3y$ и $4y$, то есть периметр одной форточки на $2y$ больше, чем другой. Получается, что $2y = 92 - 84 = 8$, откуда $y = 4$. Значит, высота меньшей форточки 12, а половина периметра $84 : 2 = 42$, поэтому её ширина равна 30 (то есть $x = 30$). Осталось посчитать периметры: $2(2x + 12y) = 216$, $2(x + 9y) = 132$, $2(x + 8y) = 124$.



6. Покажите, как разрезать эту фигуру по линиям на максимально возможное количество фигур, среди которых нет двух одинаковых. Докажите, что получилось действительно максимально возможное количество фигур. (Две фигуры считаются одинаковыми, если можно вырезать их из бумаги и наложить друг на друга так, чтобы они полностью совпали.) (*А. А. Теслер*)



Решение. Заметим, что фигур из одного и двух шестиугольников по одному виду, а из трёх — три вида, поэтому 5 фигур из не более чем трёх клеток вместе занимают 12 клеток. Остальные 24 клетки дают не более 6 фигур (поскольку в каждой фигуре хотя бы 4 клетки). Итого не более 11 фигур. (Понятно, что если не использовать часть фигур из 1–3 клеток, то это не увеличит суммарного количества фигур.) Пример для 11 фигур показан справа.



Критерии. Корректный пример для 11 фигур — 4 балла.
Верно найдено количество фигур из 1 и 2 клеток — 1 балл; из 3 клеток — ещё 1 балл.

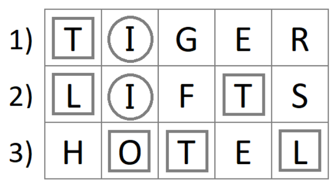
Задачи для 6 класса

1. На космическом корабле среди мирных космонавтов завелись один или два предателя, которые хотят избавиться от всех людей на корабле. Раз в день все собираются в одной комнате и голосуют, кого выгнать.
На очередное голосование пришли пятеро: Красный, Синий, Зелёный, Фиолетовый и Жёлтый. Каждый из них произнёс по два утверждения.
Красный: Синий — мирный. Жёлтый — предатель.
Синий: Я мирный. Фиолетовый — мирный.
Зелёный: Я мирный. Красный — предатель.
Фиолетовый: Красный — мирный. Зелёный — предатель.
Жёлтый: Зелёный — мирный. Фиолетовый — предатель.
Известно, что мирные космонавты всегда говорят правду, а предатели всегда врут. Объясните, кто же из них является предателем (или предателями) и почему. (*П. Д. Муленко*)

Решение. Если Красный предатель, то и Синий предатель, а значит, и Фиолетовый — итого предателей трое. Поэтому Красный мирный, значит, и Синий мирный (согласно словам Красного), и Фиолетовый тоже (он назвал Красного мирным, что верно). Зелёный солгал про Красного, а Жёлтый про Фиолетового, значит они и есть предатели.

Ответ: Зелёный и Жёлтый.

2. В игре «Wordle» нужно за несколько попыток отгадать слово из 5 букв. В каждой попытке можно вводить пятибуквенное слово, и те его буквы, которые есть в загаданном слове, будут обведены одним из двух способов: в кружок, если стоят на своём месте, и в квадратик, если стоят не на своём месте. Известно, что все буквы в загаданном слове различны.



Паша сделал три попытки и получил результат, показанный справа. Сколько пятибуквенных последовательностей (не обязательно настоящих слов) удовлетворяют условиям? В английском алфавите 26 букв. (*П. Д. Муленко*)

Ответ: $2 \cdot 2 \cdot 16 = 64$.

Решение. Буква **I** вторая, **T** только в конце. Есть 2 варианта, куда поставить **L**, и для каждого из них — 2 варианта для **O**. (Итого уже 4 варианта: _ILOT, OIL_T, OI_LT, _IOLT.) Остаётся одна буква и 16 вариантов для неё (из 26 букв использовано 10).

Замечание. Единственное известное жюри осмысленное слово, удовлетворяющее условию, — PILOT.

Критерии. Верно указано расположение букв **I** и **T** — 1 балл. Верно найдено количество вариантов размещения букв **L** и **O** — ещё 2 балла. Верно найдено число ранее не использованных букв — 3 балла.

3. Люба и Андрей играют в такую игру. Люба называет натуральное число. После этого игроки по очереди (начиная с Андрея) либо увеличивают его на 7, если оно нечётно, либо делят пополам, если оно чётно. Тот, кто снова назовёт первоначальное число, выигрывает. Может ли Люба первым ходом назвать такое число, чтобы выиграть ровно на третьем своём ходу? (*Л. С. Корешкова*)

   Ответ: да. Например, Люба называет число 8, тогда игра идёт так: $8 \to 4 \to 2 \to 1 \to 8$.

4. Найдите наибольшее натуральное число, в котором все цифры различны, а при сложении всяких двух соседних цифр получается простое число. (*С. П. Павлов*)

   Ответ: 9856743021.

   Решение. Наибольшим будет 10-значное число (если такое существует), при написании которого на каждое месте поочерёдно, слева направо, поставлена наибольшая из цифр, которая ранее в записи не использовалась. Поэтому начало наибольшего числа будет таким: $9856743\ldots$. Последние три цифры — это перестановка из цифр 0, 1, 2. Таких перестановок 6: 210, 201, 120, 102, 021, 012. Из них, очевидно, подходит только 021.

5. Геральт, Весемир, Эскель, Ламберт, Лютик и Цирилла купили от 1 до 6 эликсиров (Геральт взял один, Весемир — два, и т.д. в порядке перечисления). Все эликсиры стоят одинаковое чётное число оренов, но двое из покупателей — хорошие друзья продавца, поэтому купили свои эликсиры вдвое дешевле. Всего продавец получил 100 тысяч оренов. Кто именно дружит с продавцом? (*Л. С. Корешкова*)

   Ответ: Ламберт и Цирилла.

   Решение. Пусть цена одного эликсира без скидки $2x$ оренов. Если бы эликсиры были куплены без скидки, то их стоимость составила бы $42x$ оренов. Если друзья торговца Геральт и Весемир, то со скидкой куплено наименьшее количество эликсиров (3), и суммарная стоимость всех эликсиров $39x$; если Лютик и Цирилла, то со скидкой куплено наибольшее количество эликсиров (11), и суммарная стоимость равна $31x$. Значит, суммарная стоимость всех эликсиров это kx, где $31 \leqslant k \leqslant 39$ и k — целое число. По условию $kx = 100\,000$, значит, $100\,000$ делится на k. Единственное подходящее число из найденного промежутка — 32. Всего был куплен 21 эликсир, значит, по скидке было куплено 10, значит друзья торговца — Ламберт и Цирилла.

   Критерии. Только ответ — 1 балл. Показано, что если это Ламберт и Цирилла, то условие выполняется (например, приведён пример стоимости зелья), но не доказано, что других вариантов нет — 3 балла.

6. См. задачу 6 для 5 класса.

Задачи для 7 класса

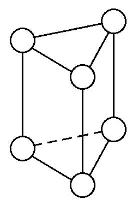
1. Существует ли число, имеющее ровно 8 натуральных делителей: $a < b < c < d < e < f < g < h$, такое что $a + b + c = d$ и $e + f + g = h$? (*М. В. Карлукова*)

   Ответ: Да, например 42 $(1 + 2 + 3 = 6; 7 + 14 + 21 = 42)$.

   Критерии. Только ответ — 0 баллов. Дан верный ответ и приведено подходящее число, но не показано, что оно удовлетворяет условию — 3 балла. Обратите внимание, что подходят и другие числа, например 54.

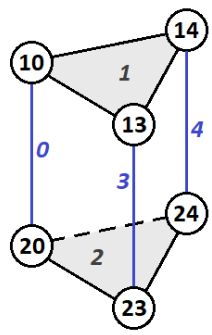
2. См. задачу 2 для 6 класса.

3. В каждой вершине треугольной призмы (см. рисунок) написали по двузначному числу, причём оказалось, что две вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда у чисел есть в записи одинаковая цифра. Какое минимальное значение может принимать самое большое из чисел? (Запись двузначного числа не может начинаться с нуля.) (*А. А. Теслер*)



   Решение. На каждом ребре напишем общую цифру двух чисел, стоящих в его концах. Рассмотрим пять множеств рёбер: три вертикальных ребра, рёбра верхнего основания и рёбра нижнего основания. Заметим, что на рёбрах разных множеств должны быть разные цифры, иначе были бы рёбра, которых на самом деле нет. Значит, нужно использовать хотя бы 5 различных цифр. Одна из этих цифр не меньше 4. Чисел, где встречается эта цифра, должно быть хотя бы два; но два минимальных числа с цифрой 4 — это 14 и 24 (а если эта цифра больше 4, то ещё больше). Итак, максимальное число не меньше 24.

   Пример с числом 24 существует (сверху: 10, 13, 14; снизу: 20, 23, 24).



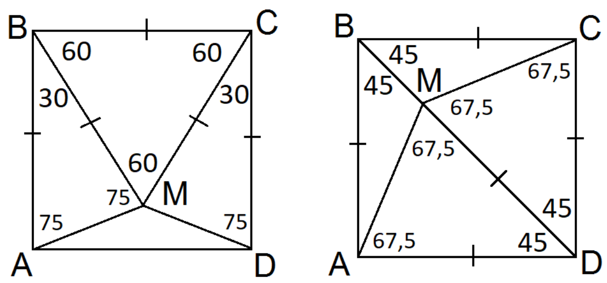
   Критерии. Только ответ — 1 балл. Оценка — 3 балла, пример — 3 балла.

4. См. задачу 5 для 6 класса.

5. Внутри квадрата $ABCD$ отмечена точка M. Может ли каждый угол каждого из треугольников MAB, MBC, MCD, MDA отличаться от прямого угла более чем на $10°$? (*А. А. Теслер*)

   Ответ: Да, вплоть до $22{,}5°$.

   Решение. На рисунке показаны примеры возможных решений. В первом случае M выбирается так, чтобы треугольник BCM был равносторонним; во втором — так, что точка M лежит на диагонали BD и $DM = DA$. Кстати, второй вариант даёт максимально возможное отклонение от прямого угла.



Критерии. Только ответ — 0 баллов.

6. Маша нарисовала на клетчатой бумаге по линиям сетки квадрат 8×8 клеток. В некоторых клетках она провела диагонали, соблюдая два правила:
• нельзя проводить две диагонали в одной клетке;
• нельзя проводить две диагонали с общим концом.
Какое наименьшее число пустых клеток могло остаться на Машином рисунке?
(*С. П. Павлов*)

Ответ: 28.

Решение. См. решение задачи 6 для 8 класса (при $n = 8$).

Задачи для 8 класса

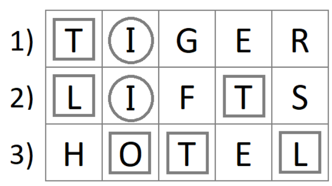
1. Ваня нарисовал чертёж карандаша, где резинку изобразил квадратом, тело карандаша — прямоугольником той же ширины, а кончик — равнобедренным треугольником, основание которого совпадает с одной из сторон прямоугольника. Периметр всей фигуры составил 96 мм, причём у квадрата и треугольника периметры равны, а у прямоугольника в два раза больше. Найдите площадь чертежа.
(*Л. С. Корешкова*)

Ответ: $(256 + 32\sqrt{2})$ мм^2.

Решение. Обозначим сторону квадрата за a. Тогда периметр квадрата и треугольника одинаковый по условию и равен $4a$. Периметр прямоугольника — $8a$. Отсюда можно сделать вывод, что вторая сторона прямоугольника $3a$, а треугольника — $\frac{3a}{2}$. Тогда периметр всей фигуры равен $3a + 6a + 2 \cdot \frac{3a}{2} = 96$ мм. Отсюда находим, что $a = 8$ мм.

Найдём высоту треугольника по теореме Пифагора: $h = \sqrt{\left(\frac{3}{2}a\right) - \left(\frac{1}{2}a\right)} = a\sqrt{2}$, откуда его площадь $\frac{1}{2} \cdot a \cdot a\sqrt{2} = 32\sqrt{2}$ мм^2.
Суммарная площадь фигуры (в мм^2): $S = 8 \cdot 8 + 8 \cdot 24 + 32\sqrt{2} = 256 + 32\sqrt{2}$.

Критерии. Баллы суммируются:
правильно найдена сторона квадрата — 3 балла,
площадь квадрата и прямоугольника верно выражена через сторону квадрата — 2 балла,
площадь треугольника верно выражена через сторону квадрата — 2 балла.



2. В игре «Wordle» нужно за несколько попыток отгадать слово из 5 букв. В каждой попытке можно вводить пятибуквенное слово, и те его буквы, которые есть в загаданном слове, будут обведены одним из двух способов: в кружок, если стоят на своём месте, и в квадратик, если стоят не на своём месте. Буквы в загаданном слове могут повторяться.

Паша сделал три попытки и получил результат, показанный справа. Сколько пятибуквенных последовательностей (не обязательно настоящих слов) удовлетворяют условиям? В английском алфавите 26 букв. (*П. Д. Муленко*)

Ответ: $16 \cdot 4 + 7 = 71$.

Решение. Буква **I** вторая, **T** только в конце. Есть два варианта, куда поставить **L**, и для каждого из них — два варианта для **O**. Итого уже 4 варианта: _ILOT, OIL_T, OI_LT, _IOLT. Остаётся последняя буква, на которую есть 19 вариантов (или одна из 16 букв, которые не встречались, или вторые **I**, **O** или **L**). Вариантов, где на последнее место ставится новая буква, всего $16 \cdot 4 = 64$. Вариантов с повтором букв 7 (их приходится перечислять вручную, чтобы не назвать ни один из них дважды): IILOT, OILOT, OILIT, OILLT, OIILT, OIOLT, IIOLT.

Замечание. Единственное известное жюри осмысленное слово, удовлетворяющее условию, — PILOT.

Критерии. Верно указано расположение букв **I** и **T** — 1 балл.

Если решение опирается на факт, что букв на последнее оставшееся место может быть 20, а не 19 — штраф в 3 балла.

3. Клетки таблицы 7×7 пронумеровали по порядку числами от 1 до 49 (в первой строке — от 1 до 7 слева направо, во второй — от 8 до 14 и т. д.). После этого из неё вырезали несколько непересекающихся квадратов 2×2, а все оставшиеся числа сложили. Чему может равняться остаток от деления полученной суммы на 4? (Найдите все возможные значения этого остатка и докажите, что других нет.) (*А. А. Теслер*)

Решение. Рассмотрим произвольный вырезаемый квадрат 2×2. Если наименьшее число обозначить a, то остальные числа будут $a+1$, $a+7$ и $a+8$. Значит, их сумма — $4a+16$, то есть кратна 4. Значит, вырезание квадратов не влияет на остаток от деления на 4, поэтому достаточно узнать, чему он равнялся изначально. Сумма чисел от 1 до 49 равна $\frac{49 \cdot 50}{2} = 49 \cdot 25$. 25 и 49 дают остаток 1 от деления на 4, значит, и их произведение даёт остаток $1 \cdot 1 = 1$.

Ответ: 1.

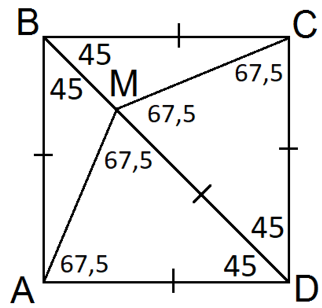
Критерии. Правильно найдена сумма всех чисел — 1 балл.

Доказано, что сумма в квадрате делится на 4, и больше выводов нет — 3 балла.

4. Внутри квадрата $ABCD$ отмечена точка M. Для каждого из углов каждого из треугольников MAB, MBC, MCD, MDA найдено его отличие от прямого угла (неотрицательное; например, для угла 70° отличие составляет 20°, а для угла 130° оно равно 40°). Какое максимальное значение может принимать минимальное из этих отличий? (*А. А. Теслер*)

Ответ: $22{,}5^\circ$.

Решение. Заметим, что среди этих треугольников хотя бы два соседних будут остроугольными (если M лежит ближе всего к стороне BC, то ADM всегда остроугольный, а также один из ABM и CDM будет остроугольным). Не умаляя общности, пусть ADM и BCM остроугольные. Тогда $\angle BAM + \angle AMB + \angle BCM + \angle BMC = 270^\circ = 4(90^\circ - 22{,}5^\circ)$, то есть минимальное отличие не больше $22{,}5^\circ$. В качестве примера можно взять точку $M \in BD$ такую, что $\angle DCM = 67{,}5^\circ$ (см. рисунок).



Критерии. За оценку даётся 5 баллов (из них 3 балла стоит тот факт, что будет два остроугольных треугольника), за пример 2 балла. За оценку в случае, когда M лежит на диагонали, баллы не даются.

5. Назовём число *примечательным*, если всего его цифры не больше 6 и оно является точным квадратом. Назовём число *замечательным*, если оно примечательное и, кроме того, остаётся примечательным, если все его цифры одновременно увеличить на 1. Найдите все замечательные числа. (*Л. С. Корешкова*)

Ответ: $0 \to 1$, $25 \to 36$, $2025 \to 3136$, $13225 \to 24336$.

Решение. К сожалению, из условия пропало ограничение о том, что число должно быть четырёхзначным. В общем виде у жюри нет решения этой задачи. Выше перечислены все известные на данный момент ответы.

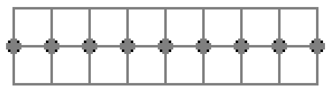
Критерии. За каждый найденный ответ баллы распределяются следующим образом: $0 \to 1$ (1 балл), $25 \to 36$ (1 балл), $2025 \to 3136$ (2 балла), $13225 \to 24336$ (3 балла).

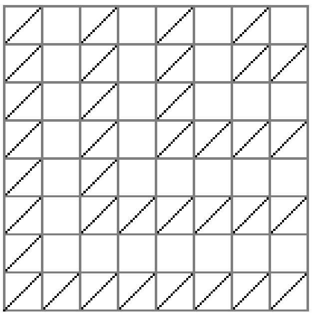
6. Маша нарисовала на клетчатой бумаге по линиям сетки квадрат $n \times n$ клеток, где n — чётное число. В некоторых клетках она провела диагонали, соблюдая два правила:
- нельзя проводить две диагонали в одной клетке;
- нельзя проводить две диагонали с общим концом.

Какое наименьшее число пустых клеток могло остаться на Машином рисунке? (*С. П. Павлов*)

Ответ: $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Решение.





Оценка. Разобьём квадрат $n \times n$ на $n/2$ горизонтальных прямоугольников $2 \times n$. Докажем, что в каждом из них Маша может провести не более $n+1$ отрезка, соблюдая условие задачи. Для каждого такого прямоугольника отметим все узлы сетки, лежащие на средней линии (см. рисунок сверху для $n = 8$). В каждом прямоугольнике таких точек $n+1$. Очевидно, любой Машин отрезок задействует не менее одной отмеченной точки. Значит, Маша в каждом таком прямоугольнике сможет провести не более $n+1$ отрезков. Таким образом, во всём квадрате $n \times n$ она проведёт не более $(n+1)\cdot n/2$ отрезков. Тогда количество пустых клеток не меньше $n^2 - \dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Пример. На рисунке снизу показан пример для $n = 8$ (при других чётных n примеры аналогичны). Посчитаем количество клеток с диагоналями ($A = 3+7+11+\ldots+(2n-1)$) и пустых клеток ($B = 1+5+9+\ldots+(2n-3)$) для этого примера. Заметим, что в каждой из этих сумм по $n/2$ слагаемых, и каждое из них во второй сумме на 2 меньше, чем в первой, то есть $B = A - n$. В то же время $A + B = n^2$. Отсюда находим $A = \dfrac{n^2+n}{2}$, $B = \dfrac{n^2-n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Критерии. За оценку и пример даётся по 3 балла. Обратите внимание, что невозможность добавления отрезка к приведённому примеру не доказывает, что нельзя провести большее количество отрезков.

Задачи для 9 класса

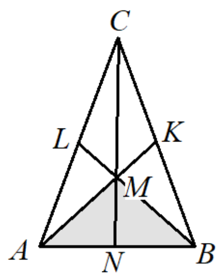
1. См. задачу 2 для 8 класса.

2. Какова максимально возможная площадь треугольника, две медианы которого равны m?

   (*А. А. Теслер*)

   Ответ: $\frac{2}{3}m^2$.

   Решение.
   Пусть в треугольнике ABC медианы AK и BL равны m и пересекаются в точке M. Как известно, $AM = BM = \frac{2m}{3}$. Значит,

   $$S_{ABM} = \tfrac{1}{2}AM^2 \cdot BM \cdot \sin\angle AMB = \tfrac{2}{9}m^2 \sin\angle AMB \leqslant \tfrac{2}{9}m^2,$$

   причём максимум достигается, если угол между медианами прямой. В то же время $S_{ABM} = \frac{1}{3}S_{ABC}$ (основание AB у этих треугольников общее, а отношение высот равно 1:3, поскольку медиана CN делится точкой M в отношении $2:1$). Значит, $S_{ABC} \leqslant \frac{2}{3}m^2$.
   Равенство достигается для прямого угла между медианами. Такое возможно: достаточно построить два перпендикулярных отрезка AK и BL длины m, которые оба делятся точкой пересечения в отношении $2:1$, и достроить картинку до $\triangle ABC$ (получится то, что надо, поскольку сторона AB и точки на двух других сторонах задают треугольник однозначно).

   Критерии. Оценка — 5 баллов, пример — 2 балла.

3. Решите систему в целых числах:

   $$\begin{cases} (y^2+6)(x-1) = y(x^2+1), \\ (x^2+6)(y-1) = x(y^2+1). \end{cases}$$

   (*Л. С. Корешкова*)

   Ответ: $(2,2); (2,3); (3,2); (3,3)$.

   Решение. После переноса всех слагаемых в левую часть разность этих уравнений имеет вид $(y-x)(2xy-x-y-7) = 0$. Если $x = y$, то оба исходных уравнения сводятся к $(x-2)(x-3) = 0$. Иначе пусть $2xy = x+y+7$. Сумма исходных уравнений имеет вид $5(x+y) = (x+y)^2 - 2xy + 12$. Подставляя выражение для $2xy$, получим квадратное уравнение на $s = x+y$:

   $$s^2 - 6s + 5 = 0.$$

   Отсюда $s = 5$ и $xy = 6$ (то есть $\{x,y\} = \{2,3\}$) или $s = 1$ и $xy = 3$ (а таких x, y не существует, даже не обязательно целых).

   Критерии. Если разность разложена на множители, то даётся 2 балла. Каждый потерянный ответ — штраф 1 балл.

4. Пусть $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$ — все натуральные делители числа x. Назовём число x *n-четверным*, если $k = 4n$ и $a_1 + a_2 + a_3 = a_4, a_5 + a_6 + a_7 = a_8, \ldots, a_{k-3} + a_{k-2} + a_{k-1} = a_k$. Докажите, что такое число существует для любого натурального n.

   (*М. В. Карлукова, П. Д. Муленко*)

   Решение. Заметим, что для $n = 1$ подходит число $6 = 1+2+3$. Покажем теперь, что для произвольного n подходит число $6p^{n-1}$ (где p — произвольное простое число, большее

6). Действительно, вот его делители:

$1, 2, 3, 6; \quad p, 2p, 3p, 6p; \quad p^2, 2p^2, 3p^2, 6p^2; \quad \ldots; \quad p^n, 2p^n, 3p^n, 6p^n.$

В каждой четвёрке последнее число равно сумме трёх предыдущих. Осталось заметить, что $6p^\alpha < p^{\alpha+1}$, значит, числа выше действительно перечислены в порядке возрастания.

Критерии. Написан факт про число 6 без дальнейших верных продвижений — 2 балла.

5. Двое играют в карточную игру. У каждого есть колода из 30 карт. Каждая карта красная, зелёная или синяя. По правилам красная карта сильнее зелёной, зелёная сильнее синей, а синяя сильнее красной. Карты одного цвета равны. Колода каждого игрока перед началом партии перемешивается и кладётся перед ним рубашкой вверх. После этого оба открывают по верхней карте своей колоды. Если карты разного цвета, то выигрывает тот, чья карта сильнее. Если карты одинаковые, то они уходят в сброс, а игроки открывают ещё по одной карте — и так до тех пор, пока карты не окажутся различными. Если же обе колоды кончились, а победитель не выявлен, объявляется ничья.
Известно, что у первого игрока в колоде по 10 карт каждого цвета. Второй игрок имеет право выбрать одну из двух колод: такую же, как у первого, или состоящую только из синих карт. Какая из этих колод даст второму игроку бóльшую вероятность выигрыша? (*Е. С. Голикова*)

Ответ: Вторая, состоящая полностью из синих карт.

Решение. В первом случае вероятность выигрыша у первого и у второго одинакова, поскольку у них одинаковый набор карт, но есть ненулевая вероятность ничьей; значит, вероятность выигрыша меньше $1/2$. Во втором случае на первом ходу вероятности выигрыша и проигрыша одинаковы; если же произошла ничья, то на втором ходу вероятности выигрыша и проигрыша одинаковы; и так далее, но в конце концов ничьей не будет, поэтому вероятность выигрыша $1/2$. (Другой способ найти вероятность победы для второй колоды изложен в решении задачи 5 для 10 класса.)

Критерии. Правильная оценка вероятности выигрыша колоды стоит 3 балла для каждой колоды.

6. Клетки кубической таблицы $7 \times 7 \times 7$ (то есть маленькие кубики) пронумеровали по порядку числами от 1 до 343. (Сначала нумеруются клетки верхнего слоя: в первой строке слева направо от 1 до 7, в следующей от 8 до 14, и так далее до 49. Далее в таком же порядке нумеруются клетки второго слоя и т. д.) После этого из таблицы удалили несколько непересекающихся кубов $2 \times 2 \times 2$, а все оставшиеся числа сложили. Чему может равняться остаток от деления полученной суммы на 8? (*А. А. Теслер*)

Решение. Рассмотрим произвольный вырезаемый куб $2 \times 2 \times 2$. Если наименьшее число обозначить a, то остальные числа будут $a+1$, $a+7$, $a+8$, $a+49$, $a+49+1$, $a+49+7$, $a+49+8$. Значит, их сумма — $8a + 4 \times 1 + 4 \times 7 + 4 \times 49 = 8a + 4 \times 57$, то есть имеет остаток 4 от деления на 8. Значит, вырезание кубиков либо сохраняет суммарный остаток от деления на 8, либо изменяет его на 4. Осталось узнать, чему этот остаток равнялся изначально. Сумма чисел от 1 до 343 равна их среднему арифметическому ($\frac{1+343}{2} = 172$) на их количество 343. 172 делится на 4, но не на 8, а 343 нечётно, поэтому исходный остаток равен 4.

Ответ: 0 или 4.

Критерии. За нахождение остатка суммы всех чисел даётся 3 балла, и ещё 4 балла даётся за нахождение остатка для произвольного куба $2 \times 2 \times 2$.
Потерян один ответ из двух — штраф в два балла.

Задачи для 10 класса

1. В десятичной записи числа N все цифры различны и не равны нулю. Если выписать все числа, получаемые из N перестановкой цифр (в том числе само число N), и найти всевозможные разности этих чисел, то все разности окажутся различными. (Например, число $N = 123$ не удовлетворяет этому условию, так как $132 - 123 = 321 - 312$.) Найдите самое большое такое N. (*А. А. Теслер*)

   Ответ: 986.

   Решение. Четырёхзначные числа не подходят: для числа $\overline{ABCD}$ разности $\overline{ABCD} - \overline{ABDC}$ и $\overline{BACD} - \overline{BADC}$ совпадают (если число длиннее, то начальные цифры можно везде оставить одинаковыми). Изучим трёхзначные числа, начиная с наибольших. Число 987 не подходит ($987 - 978 = 798 - 789$). Число 986 подходит, так как все 15 разностей различны:

$$
\begin{array}{lllll}
986 - 968 = 18, & & & & \\
986 - 896 = 90, & 968 - 896 = 72, & & & \\
986 - 869 = 117, & 968 - 869 = 99, & 896 - 869 = 27, & & \\
986 - 698 = 288, & 968 - 698 = 270, & 896 - 698 = 198, & 869 - 698 = 171, & \\
986 - 689 = 297, & 968 - 689 = 279, & 896 - 689 = 207, & 869 - 689 = 180, & 698 - 689 = 9.
\end{array}
$$

   Критерии. Оценка — 5 баллов, пример — 2 балла.

2. См. задачу 4 для 8 класса.

3. Пусть $a_1 + \ldots + a_m = n$, где $a_1, \ldots, a_m$ — натуральные числа. Докажите, что $n!$ делится на произведение $a_1! \cdot a_2! \cdot \ldots \cdot a_m!$ (*О. А. Пяйве*)

   Решение. *Способ 1.* Заметим, что $\dfrac{n!}{a_1! \cdot a_2! \cdot \ldots \cdot a_m!}$ — это количество способов разбить n объектов на m пронумерованных групп, при котором в первую группу попадёт m_1 объектов, ..., в m-ю группу a_m объектов. Значит, это целое число.

   Способ 2. Докажем это утверждение индукцией по m. База: для $m = 1$ оно, очевидно, справедливо. Переход: заметим, что $\dfrac{n!}{a_m!(a_1 + \ldots + a_{m-1})!} = C_n^{a_m}$ — целое число, значит, если поделить $n!$ на $a_m!$, то результат кратен факториалу суммы остальных слагаемых. Тогда он делится на произведение остальных факториалов по индукционному предположению.

   Способ 3. Воспользуемся утверждением о том, что произведение k подряд идущих чисел делится на $k!$. Заметим, что $n!$ можно представить в виде произведения a_1 подряд идущих чисел на a_2 следующих чисел ... на a_m последних чисел. Поэтому $n!$ делится на произведение факториалов.

4. Даны три различных положительных числа a, b, c, причём $(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a) > 0$. Докажите, что

$$\frac{(a^2 + b^2 - c^2)^2}{4b^2} > \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{4} - \frac{c^2}{2}.$$

   (*А. Б. Владимиров*)

   Решение. Избавимся от знаменателей, раскроем скобки и перенесём всё в левую часть. Получится $a^4 - 2a^2c^2 + c^4 > 0$, что очевидно верно для любых различных положительных a и c.

5. Двое играют в карточную игру. У каждого есть колода из 30 карт. Каждая карта красная, зелёная или синяя. По правилам красная карта сильнее зелёной, зелёная сильнее синей, а синяя сильнее красной. Карты одного цвета равны. Колода каждого игрока перед началом партии перемешивается и кладётся перед ним рубашкой вверх. После этого оба открывают по верхней карте своей колоды. Если карты разного цвета, то выигрывает тот, чья карта сильнее. Если карты одинаковые, то они уходят в сброс, а игроки открывают ещё по одной карте — и так до тех пор, пока карты не окажутся различными. Если же обе колоды кончились, а победитель не выявлен, объявляется ничья.
Известно, что у первого игрока в колоде по 10 карт каждого цвета. Второй игрок имеет право выбрать одну из трёх колод:
а) такую же, как у первого;
б) состоящую только из синих карт;
в) состоящую из 15 синих и 15 зелёных карт.
Какая из этих колод даст второму игроку бо́льшую вероятность выигрыша?
(*Е. С. Голикова*)

Ответ: Вторая или третья (вероятности для них одинаковы и больше, чем для первой).

Решение. При выборе первой колоды вероятность меньше $1/2$, так как возможна ничья, а вероятности выиграть и проиграть совпадают в силу симметрии (то есть равноправности) игроков.

При выборе второй колоды ничья невозможна. Если же заменить в колоде первого все красные на зелёные и наоборот, то партии, выигрышные для второго, превратятся в проигрышные, и наоборот, то есть вероятность выигрыша перейдёт в вероятность проигрыша; а в то же время при такой замене колода первого игрока в целом не изменилась (и второго тоже), а значит, вероятность выигрыша не изменилась. Значит, она равна вероятности проигрыша, то есть $1/2$.

Такое же рассуждение верно и для третьей колоды (только здесь надо в колодах обоих игроков заменить все синие на зелёные и наоборот), то есть и для неё вероятность выигрыша равна $1/2$.

6. На координатной плоскости нарисованы 2022 параболы, заданные уравнениями $f_i(x) = x^2 + b_i x$ $(1 \leqslant i \leqslant 2022)$. Существует ли такая точка M и такая прямая l, что сумма расстояний от вершин всех парабол до точки M равна сумме расстояний от вершин всех парабол до прямой l?
(*А. Б. Владимиров*)

Ответ: существует.

Решение. Вершины парабол имеют координаты $(-b_i/2, -b_i^2/4)$. Они сами лежат на параболе $y = -x^2$, так что они равноудалены от фокуса $(0, -1/4)$ этой параболы и её директрисы $y = 1/4$.

Замечание. Если Вам неизвестно указанное свойство параболы, то в данном случае можно проверить равенство расстояний непосредственно. Действительно, квадрат расстояния до фокуса равен $\left(\frac{b_i}{2}\right)^2 + \left(\frac{b_i^2 - 1}{4}\right)^2$, а квадрат расстояния до директрисы — $\left(\frac{b_i^2 + 1}{4}\right)^2$, что то же самое.

Критерии. Если указано, что парабола — это геометрическое место точек, равноудалённых от фокуса и директрисы, то даётся 2 балла. За нахождение координат вершин парабол также даётся 2 балла.

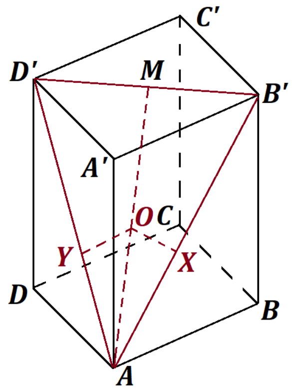
Задачи для 11 класса

1. См. задачу 3 для 10 класса.

2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA'B'C'D'$ отметили середину O медианы AM треугольника $AB'D'$. Оказалось, что эта точка удалена от прямых AB', AD' и от грани $ABCD$ на расстояние 1. Найдите объём параллелепипеда. (*П. Д. Муленко*)

   Ответ: $8 + 8\sqrt{5}$.

   Решение. Пусть X и Y — это основания перпендикуляров, опущенных из O на AB' и AD'. Точка O на медиане AM равноудалена от сторон треугольника $AB'D'$, поэтому она лежит также на биссектрисе; значит, медиана является биссектрисой, поэтому $AB' = AD'$. Обозначим длины отрезков $AB = AD$ и AA' через x и z. Тогда $AB' = AD' = \sqrt{x^2+z^2}$, $B'M = D'M = \dfrac{\sqrt{2x^2}}{2}$, $AO = \dfrac{\sqrt{2x^2+4z^2}}{4}$.

   Также $OX = OY = \dfrac{B'M \cdot AO}{AB'} = \dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{x^2(x^2+2z^2)}{x^2+z^2}}$.
   По условию, $OX = z/2 = 1$, откуда легко получается $z = 2$ и $x^2(x^2+8) = 16(x^2+4)$, то есть $x = \sqrt{4+4\sqrt{5}}$. Объём равен $x^2 z = 8 + 8\sqrt{5}$.

   Критерии. За доказательство $AB' = AD'$ даётся 2 балла.

3. См. задачу 3 для 9 класса.

4. См. задачу 6 для 8 класса.

5. Двое играют в карточную игру. У каждого есть колода из 30 карт. Каждая карта красная, зелёная или синяя. По правилам красная карта сильнее зелёной, зелёная сильнее синей, а синяя сильнее красной. Карты одного цвета равны. Колода каждого игрока перед началом партии перемешивается и кладётся перед ним рубашкой вверх. После этого оба открывают по верхней карте своей колоды. Если карты разного цвета, то выигрывает тот, чья карта сильнее. Если карты одинаковые, то они уходят в сброс, а игроки открывают ещё по одной карте — и так до тех пор, пока карты не окажутся различными. Если же обе колоды кончились, а победитель не выявлен, объявляется ничья.
   Известно, что у первого игрока в колоде по 10 карт каждого цвета. Второй игрок имеет право взять любую колоду из 30 карт. Может ли он подобрать колоду так, чтобы вероятность его выигрыша была больше 1/2? (*Е. С. Голикова*)

   Ответ: да.

   Решение. Рассмотрим колоду, в которой одна синяя карта, а все остальные красного цвета. Найдём в этом случае вероятность выигрыша второго игрока. Пусть $u(r, g, b)$ — вероятность выигрыша, когда у первого игрока r красных карт, g зелёных, b синих, а у второго одна синяя и все остальные красные (при условии $r + g + b > 0$). Также пусть $v(r, g, b)$ — вероятность выигрыша, когда у второго игрока все карты красные.

   Легко видеть, что $v(r, g, b) = \dfrac{g \cdot 1 + r \cdot v(r-1, g, b)}{r+g+b}$ при $r + g + b > 0$ (если у первого выпала зелёная, то второй выиграл, если синяя, то проиграл, если красная, то игроки потратили по одной красной карте и продолжили игру). Ясно также, что $v(0, 0, 0) = 0$ (в этом случае будет ничья). Отсюда по индукции получаем, что $v(r, g, b) = \dfrac{g}{g+b}$ при $g + b > 0$ и $v(r, 0, 0) = 0$.

Аналогично $u(r,g,b) = \dfrac{g(r+g+b-1) + r\,(1 + (r+g+b-1)u(r-1,g,b)) + bv(r,g,b-1))}{(r+g+b)^2}$.

(Здесь мы рассматриваем всевозможные пары ходов: одна из $r+g+b$ карт первого и одна из такого же количества карт второго. Если у первого выпала зелёная, то второй выиграет во всех случаях, кроме одного; если красная, то второй либо выкладывает синюю и побеждает, либо выкладывает красную и попадает в аналогичную игру с меньшим числом карт; если у первого синяя, то второй имеет шанс на выигрыш, только если выложит синюю и попадёт в новую игру со всеми красными). Кроме этого, $u(1,0,0) = 1$, $u(0,1,0) = u(0,0,1) = 0$.

Легко проверить (догадаться сложнее — можно, например, угадать формулу, вручную посчитав вероятности для малых r, g, b), что эти равенства задают формулу

$$u(r,g,b) = \left(\frac{r\cdot(g+1)}{g+b+1} + \frac{g\cdot b}{g+b-1} + \frac{g\cdot(g-1)}{g+b}\right)\cdot\frac{1}{r+g+b}$$

при $g+b>1$. Тогда $u(n,n,n) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6n(4n^2-1)} > \dfrac{1}{2}$ при всех $n>0$, в том числе и при $n=10$.

Возможен также следующий подход к доказательству того, что колода с одной синей и остальными красными картами выигрывает с вероятностью более 1/2. Заметим, что колода второго, состоящая только из красных карт, выигрывала бы с вероятностью 1/2 (см. решение задачи 5 для 10 класса). Посмотрим, как меняется вероятность выигрыша второго игрока при замене единственной синей карты на красную. Те партии, в которых синяя карта второго игрока не участвовала, никак не изменятся. Те партии, где она участвовала, можно разбить на три группы (в каждой партии может происходить несколько «разменов» красных карт, пока не появится синяя карта второго игрока):

(1) где она была против красной — такие партии кончались выигрышем второго, а теперь стали продолжаться до тех пор, пока не сыграет зелёная или синяя, что равновероятно;

(2) где она была против зелёной — такие партии кончались выигрышем первого, а стали кончаться выигрышем второго;

(3) где она была против синей — такие партии продолжались далее до тех пор, пока не сыграет карта первого игрока, отличная от красной (поскольку синих осталось 9, а зелёных 10, то они кончались выигрышем второго в $\frac{10}{19}$ случаев), а стали кончаться выигрышем первого.

Чтобы понять, увеличилась или уменьшилась вероятность победы второго игрока в результате замены, надо найти вероятность каждого из типов (1)–(3). Это нетрудно сделать для каждой возможной длины партии из комбинаторных соображений (а эта длина не больше 11), но для нахождения ответа понадобится вычислить (или оценить) суммы, что довольно громоздко.

6. См. задачу 6 для 9 класса.