Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2021–2022 учебный год. Заключительный этап

Задачи для 5 класса

Пользоваться справочной литературой, интернетом, калькуляторами и подобными средствами запрещено.
Пожалуйста, не подписывайте работу своим именем и фамилией, а укажите свой код участника.
Не публикуйте и не обсуждайте задачи в интернете до 30 марта 2022 года.

---

1. Дедушка дал Пете несколько карточек и попросил составить из них равенство. У Пети получилось вот что:

   8 1 – 7 5 = 0 6

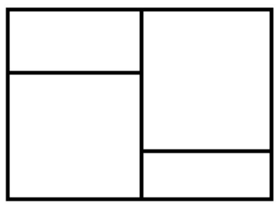
   «Мне не очень нравится твоё равенство, — сказал дедушка, — ведь в нём число 6 записано как 06, а так писать не принято». Придумайте, как Пете из всех карточек сложить верное равенство, которое понравится дедушке. (*А. А. Теслер*)

2. На космическом корабле среди мирных космонавтов завелись два предателя, которые хотят избавиться от всех людей на корабле. Раз в день все собираются в одной комнате и голосуют, кого выгнать.
   В первый день Красный, Зелёный, Чёрный и Фиолетовый выбрали Жёлтого, Синий и Голубой — Зелёного, Жёлтый — Красного, Розовый — Фиолетового. По итогам голосования Жёлтого космонавта выгнали с корабля.
   Во второй день Красный и Чёрный выбрали Голубого, Синий, Зелёный, Розовый и Фиолетовый — Чёрного, Голубой — Фиолетового. В результате Чёрный космонавт был выгнан.
   В третий день Красный, Голубой и Зелёный выбрали Фиолетового, Синий — Красного, Розовый и Фиолетовый — Синего.
   Вычислите предателей, если голосуют они одинаково. Объясните, почему предатели — именно они, а не кто-нибудь другой. (*П. Д. Муленко*)

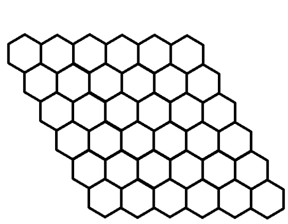
3. Однажды Геральта укусила виверна. Лекарь велел ему принимать лекарство в течение 180 дней по графику «2 через 1»: два дня приёма перемежаются одним днём отдыха. Геральт начал принимать лекарство в понедельник. Сколько раз он будет его принимать по понедельникам и вторникам подряд? (*Л. С. Корешкова*)

4. Женя играет в игру «Сапёр», в которой необходимо установить, в каких клетках квадратной таблицы расположены мины. Для этого в каждой клетке, где нет мин, написано, в скольких соседних с ней (по стороне или углу) клетках мины есть. На первом уровне игра проходит на поле 5×5, причём игроку на долю секунды показывается решение. Женя успела заметить, что ровно в трёх клетках стоит число 8, но не запомнила, где именно. Сколько расстановок мин удовлетворяют этому условию? (*П. Д. Муленко*)

5. В стекольной мастерской сделали необычное окно. Оно имеет форму прямоугольника, разделённого по вертикали на две равных части. В каждой половинке есть форточка: в левой — сверху, площадью в шестую часть от всего окна и периметром 92 сантиметра; в правой — снизу, площадью в восьмую часть всего окна и периметром 84 сантиметра. Чему равны периметры всего окна и остальных кусков стекла? (*Л. С. Корешкова*)

6. Покажите, как разрезать эту фигуру по линиям на максимально возможное количество фигур, среди которых нет двух одинаковых. Докажите, что получилось действительно максимально возможное количество фигур. (Две фигуры считаются одинаковыми, если можно вырезать их из бумаги и наложить друг на друга так, чтобы они полностью совпали.) (*А. А. Теслер*)

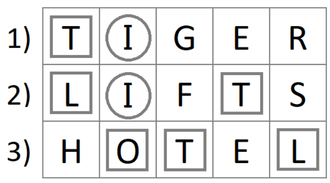
Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2021–2022 учебный год. Заключительный этап

Задачи для 6 класса

Пользоваться справочной литературой, интернетом, калькуляторами и подобными средствами запрещено.
Пожалуйста, не подписывайте работу своим именем и фамилией, а укажите свой код участника.
Не публикуйте и не обсуждайте задачи в интернете до 30 марта 2022 года.

---

1. На космическом корабле среди мирных космонавтов завелись один или два предателя, которые хотят избавиться от всех людей на корабле. Раз в день все собираются в одной комнате и голосуют, кого выгнать.
   На очередное голосование пришли пятеро: Красный, Синий, Зелёный, Фиолетовый и Жёлтый. Каждый из них произнёс по два утверждения.
   Красный: Синий — мирный. Жёлтый — предатель.
   Синий: Я мирный. Фиолетовый — мирный.
   Зелёный: Я мирный. Красный — предатель.
   Фиолетовый: Красный — мирный. Зелёный — предатель.
   Жёлтый: Зелёный — мирный. Фиолетовый — предатель.
   Известно, что мирные космонавты всегда говорят правду, а предатели всегда врут. Объясните, кто же из них является предателем (или предателями) и почему. (*П. Д. Муленко*)

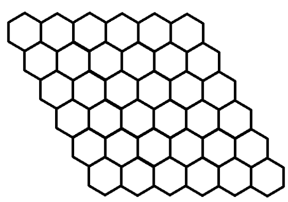
2. В игре «Wordle» нужно за несколько попыток отгадать слово из 5 букв. В каждой попытке можно вводить пятибуквенное слово, и те его буквы, которые есть в загаданном слове, будут обведены одним из двух способов: в кружок, если стоят на своём месте, и в квадратик, если стоят не на своём месте. Известно, что все буквы в загаданном слове различны.
   

   Паша сделал три попытки и получил результат, показанный справа. Сколько пятибуквенных последовательностей (не обязательно настоящих слов) удовлетворяют условиям? В английском алфавите 26 букв. (*П. Д. Муленко*)

3. Люба и Андрей играют в такую игру. Люба называет натуральное число. После этого игроки по очереди (начиная с Андрея) либо увеличивают его на 7, если оно нечётно, либо делят пополам, если оно чётно. Тот, кто снова назовёт первоначальное число, выигрывает. Может ли Люба первым ходом назвать такое число, чтобы выиграть ровно на третьем своём ходу? (*Л. С. Корешкова*)

4. Найдите наибольшее натуральное число, в котором все цифры различны, а при сложении всяких двух соседних цифр получается простое число. (*С. П. Павлов*)

5. Геральт, Весемир, Эскель, Ламберт, Лютик и Цирилла купили от 1 до 6 эликсиров (Геральт взял один, Весемир — два, и т.д. в порядке перечисления). Все эликсиры стоят одинаковое чётное число оренов, но двое из покупателей — хорошие друзья продавца, поэтому купили свои эликсиры вдвое дешевле. Всего продавец получил 100 тысяч оренов. Кто именно дружит с продавцом? (*Л. С. Корешкова*)

6. Покажите, как разрезать эту фигуру по линиям на максимально возможное количество фигур, среди которых нет двух одинаковых. Докажите, что получилось действительно максимально возможное количество фигур. (Две фигуры считаются одинаковыми, если можно вырезать их из бумаги и наложить друг на друга так, чтобы они полностью совпали.) (*А. А. Теслер*)
   

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2021–2022 учебный год. Заключительный этап

Задачи для 7 класса

Пользоваться справочной литературой, интернетом, калькуляторами и подобными средствами запрещено.
Пожалуйста, не подписывайте работу своим именем и фамилией, а укажите свой код участника.
Не публикуйте и не обсуждайте задачи в интернете до 30 марта 2022 года.

---

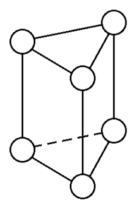
1. Существует ли число, имеющее ровно 8 натуральных делителей: $a < b < c < d < e < f < g < h$, такое что $a + b + c = d$ и $e + f + g = h$? (*М. В. Карлукова*)

2. В игре «Wordle» нужно за несколько попыток отгадать слово из 5 букв. В каждой попытке можно вводить пятибуквенное слово, и те его буквы, которые есть в загаданном слове, будут обведены одним из двух способов: в кружок, если стоят на своём месте, и в квадратик, если стоят не на своём месте. Известно, что все буквы в загаданном слове различны.

1)	$\boxed{\text{T}}$	I	G	E	R
2)	$\boxed{\text{L}}$	I	F	$\boxed{\text{T}}$	S
3)	H	$\boxed{\text{O}}$	$\boxed{\text{T}}$	E	$\boxed{\text{L}}$

Паша сделал три попытки и получил результат, показанный справа. Сколько пятибуквенных последовательностей (не обязательно настоящих слов) удовлетворяют условиям? В английском алфавите 26 букв. (*П. Д. Муленко*)

3. В каждой вершине треугольной призмы (см. рисунок) написали по двузначному числу, причём оказалось, что две вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда у чисел есть в записи одинаковая цифра. Какое минимальное значение может принимать самое большое из чисел? (Запись двузначного числа не может начинаться с нуля.) (*А. А. Теслер*)



4. Геральт, Весемир, Эскель, Ламберт, Лютик и Цирилла купили от 1 до 6 эликсиров (Геральт взял один, Весемир — два, и т.д. в порядке перечисления). Все эликсиры стоят одинаковое чётное число оренов, но двое из покупателей — хорошие друзья продавца, поэтому купили свои эликсиры вдвое дешевле. Всего продавец получил 100 тысяч оренов. Кто именно дружит с продавцом? (*Л. С. Корешкова*)

5. Внутри квадрата $ABCD$ отмечена точка M. Может ли каждый угол каждого из треугольников MAB, MBC, MCD, MDA отличаться от прямого угла более чем на 10°? (*А. А. Теслер*)

6. Маша нарисовала на клетчатой бумаге по линиям сетки квадрат 8×8 клеток. В некоторых клетках она провела диагонали, соблюдая два правила:
   - нельзя проводить две диагонали в одной клетке;
   - нельзя проводить две диагонали с общим концом.

   Какое наименьшее число пустых клеток могло остаться на Машином рисунке? (*С. П. Павлов*)

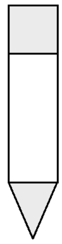
Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2021–2022 учебный год. Заключительный этап

Задачи для 8 класса

Пользоваться справочной литературой, интернетом, калькуляторами и подобными средствами запрещено.
Пожалуйста, не подписывайте работу своим именем и фамилией, а укажите свой код участника.
Не публикуйте и не обсуждайте задачи в интернете до 30 марта 2022 года.

---

1. Ваня нарисовал чертёж карандаша, где резинку изобразил квадратом, тело карандаша — прямоугольником той же ширины, а кончик — равнобедренным треугольником, основание которого совпадает с одной из сторон прямоугольника. Периметр всей фигуры составил 96 мм, причём у квадрата и треугольника периметры равны, а у прямоугольника в два раза больше. Найдите площадь чертежа.
(*Л. С. Корешкова*)



2. В игре «Wordle» нужно за несколько попыток отгадать слово из 5 букв. В каждой попытке можно вводить пятибуквенное слово, и те его буквы, которые есть в загаданном слове, будут обведены одним из двух способов: в кружок, если стоят на своём месте, и в квадратик, если стоят не на своём месте. Буквы в загаданном слове могут повторяться.

1)	$\boxed{T}$	I	G	E	R
2)	$\boxed{L}$	I	F	$\boxed{T}$	S
3)	H	$\boxed{O}$	$\boxed{T}$	E	$\boxed{L}$

Паша сделал три попытки и получил результат, показанный справа. Сколько пятибуквенных последовательностей (не обязательно настоящих слов) удовлетворяют условиям? В английском алфавите 26 букв. (*П. Д. Муленко*)

3. Клетки таблицы 7×7 пронумеровали по порядку числами от 1 до 49 (в первой строке — от 1 до 7 слева направо, во второй — от 8 до 14 и т. д.). После этого из неё вырезали несколько непересекающихся квадратов 2×2, а все оставшиеся числа сложили. Чему может равняться остаток от деления полученной суммы на 4? (Найдите все возможные значения этого остатка и докажите, что других нет.) (*А. А. Теслер*)

4. Внутри квадрата $ABCD$ отмечена точка M. Для каждого из углов каждого из треугольников MAB, MBC, MCD, MDA найдено его отличие от прямого угла (неотрицательное; например, для угла 70° отличие составляет 20°, а для угла 130° оно равно 40°). Какое максимальное значение может принимать минимальное из этих отличий? (*А. А. Теслер*)

5. Назовём число *примечательным*, если всего его цифры не больше 6 и оно является точным квадратом. Назовём число *замечательным*, если оно примечательное и, кроме того, остаётся примечательным, если все его цифры одновременно увеличить на 1. Найдите все замечательные числа. (*Л. С. Корешкова*)

6. Маша нарисовала на клетчатой бумаге по линиям сетки квадрат $n \times n$ клеток, где n — чётное число. В некоторых клетках она провела диагонали, соблюдая два правила:
• нельзя проводить две диагонали в одной клетке;
• нельзя проводить две диагонали с общим концом.
Какое наименьшее число пустых клеток могло остаться на Машином рисунке?
(*С. П. Павлов*)

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2021–2022 учебный год. Заключительный этап

Задачи для 9 класса

Пользоваться справочной литературой, интернетом, калькуляторами и подобными средствами запрещено.
Пожалуйста, не подписывайте работу своим именем и фамилией, а укажите свой код участника.
Не публикуйте и не обсуждайте задачи в интернете до 30 марта 2022 года.

---

1. В игре «Wordle» нужно за несколько попыток отгадать слово из 5 букв. В каждой попытке можно вводить пятибуквенное слово, и те его буквы, которые есть в загаданном слове, будут обведены одним из двух способов: в кружок, если стоят на своём месте, и в квадратик, если стоят не на своём месте. Буквы в загаданном слове могут повторяться.

1)	$\boxed{\text{T}}$	I	G	E	R
2)	$\boxed{\text{L}}$	I	F	$\boxed{\text{T}}$	S
3)	H	$\boxed{\text{O}}$	$\boxed{\text{T}}$	E	$\boxed{\text{L}}$

Паша сделал три попытки и получил результат, показанный справа. Сколько пятибуквенных последовательностей (не обязательно настоящих слов) удовлетворяют условиям? В английском алфавите 26 букв. (*П. Д. Муленко*)

2. Какова максимально возможная площадь треугольника, две медианы которого равны m? (*А. А. Теслер*)

3. Решите систему в целых числах:

$$\begin{cases} (y^2+6)(x-1) = y(x^2+1), \\ (x^2+6)(y-1) = x(y^2+1). \end{cases}$$

(*Л. С. Корешкова*)

4. Пусть $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$ — все натуральные делители числа x. Назовём число x *n-четверным*, если $k = 4n$ и $a_1+a_2+a_3 = a_4, a_5+a_6+a_7 = a_8, \ldots, a_{k-3}+a_{k-2}+a_{k-1} = a_k$. Докажите, что такое число существует для любого натурального n. (*М. В. Карлукова, П. Д. Муленко*)

5. Двое играют в карточную игру. У каждого есть колода из 30 карт. Каждая карта красная, зелёная или синяя. По правилам красная карта сильнее зелёной, зелёная сильнее синей, а синяя сильнее красной. Карты одного цвета равны. Колода каждого игрока перед началом партии перемешивается и кладётся перед ним рубашкой вверх. После этого оба открывают по верхней карте своей колоды. Если карты разного цвета, то выигрывает тот, чья карта сильнее. Если карты одинаковые, то они уходят в сброс, а игроки открывают ещё по одной карте — и так до тех пор, пока карты не окажутся различными. Если же обе колоды кончились, а победитель не выявлен, объявляется ничья.
Известно, что у первого игрока в колоде по 10 карт каждого цвета. Второй игрок имеет право выбрать одну из двух колод: такую же, как у первого, или состоящую только из синих карт. Какая из этих колод даст второму игроку бо́льшую вероятность выигрыша? (*Е. С. Голикова*)

6. Клетки кубической таблицы $7 \times 7 \times 7$ (то есть маленькие кубики) пронумеровали по порядку числами от 1 до 343. (Сначала нумеруются клетки верхнего слоя: в первой строке слева направо от 1 до 7, в следующей от 8 до 14, и так далее до 49. Далее в таком же порядке нумеруются клетки второго слоя и т. д.) После этого из таблицы удалили несколько непересекающихся кубов $2 \times 2 \times 2$, а все оставшиеся числа сложили. Чему может равняться остаток от деления полученной суммы на 8? (*А. А. Теслер*)

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2021–2022 учебный год. Заключительный этап

Задачи для 10 класса

Пользоваться справочной литературой, интернетом, калькуляторами и подобными средствами запрещено.
Пожалуйста, не подписывайте работу своим именем и фамилией, а укажите свой код участника.
Не публикуйте и не обсуждайте задачи в интернете до 30 марта 2022 года.

---

1. В десятичной записи числа N все цифры различны и не равны нулю. Если выписать все числа, получаемые из N перестановкой цифр (в том числе само число N), и найти всевозможные разности этих чисел, то все разности окажутся различными. (Например, число $N = 123$ не удовлетворяет этому условию, так как $132 - 123 = 321 - 312$.) Найдите самое большое такое N. (*А. А. Теслер*)

2. Внутри квадрата $ABCD$ отмечена точка M. Для каждого из углов каждого из треугольников MAB, MBC, MCD, MDA найдено его отличие от прямого угла (неотрицательное; например, для угла 70° отличие составляет 20°, а для угла 130° оно равно 40°). Какое максимальное значение может принимать минимальное из этих отличий? (*А. А. Теслер*)

3. Пусть $a_1 + ... + a_m = n$, где $a_1, \ldots, a_m$ — натуральные числа. Докажите, что $n!$ делится на произведение $a_1! \cdot a_2! \cdot \ldots \cdot a_m!$ (*О. А. Пяйве*)

4. Даны три различных положительных числа a, b, c, причём $(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a) > 0$. Докажите, что
$$\frac{(a^2+b^2-c^2)^2}{4b^2} > \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{4} - \frac{c^2}{2}.$$
(*А. Б. Владимиров*)

5. Двое играют в карточную игру. У каждого есть колода из 30 карт. Каждая карта красная, зелёная или синяя. По правилам красная карта сильнее зелёной, зелёная сильнее синей, а синяя сильнее красной. Карты одного цвета равны. Колода каждого игрока перед началом партии перемешивается и кладётся перед ним рубашкой вверх. После этого оба открывают по верхней карте своей колоды. Если карты разного цвета, то выигрывает тот, чья карта сильнее. Если карты одинаковые, то они уходят в сброс, а игроки открывают ещё по одной карте — и так до тех пор, пока карты не окажутся различными. Если же обе колоды кончились, а победитель не выявлен, объявляется ничья.
Известно, что у первого игрока в колоде по 10 карт каждого цвета. Второй игрок имеет право выбрать одну из трёх колод:
а) такую же, как у первого;
б) состоящую только из синих карт;
в) состоящую из 15 синих и 15 зелёных карт.
Какая из этих колод даст второму игроку бóльшую вероятность выигрыша?
(*Е. С. Голикова*)

6. На координатной плоскости нарисованы 2022 параболы, заданные уравнениями $f_i(x) = x^2 + b_i x$ $(1 \leqslant i \leqslant 2022)$. Существует ли такая точка M и такая прямая l, что сумма расстояний от вершин всех парабол до точки M равна сумме расстояний от вершин всех парабол до прямой l? (*А. Б. Владимиров*)

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2021–2022 учебный год. Заключительный этап

Задачи для 11 класса

Пользоваться справочной литературой, интернетом, калькуляторами и подобными средствами запрещено.
Пожалуйста, не подписывайте работу своим именем и фамилией, а укажите свой код участника.
Не публикуйте и не обсуждайте задачи в интернете до 30 марта 2022 года.

---

1. Пусть $a_1 + \ldots + a_m = n$, где $a_1, \ldots, a_m$ — натуральные числа. Докажите, что $n!$ делится на произведение $a_1! \cdot a_2! \cdot \ldots \cdot a_m!$ (*О. А. Пяйве*)

2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA'B'C'D'$ отметили середину O медианы AM треугольника $AB'D'$. Оказалось, что эта точка удалена от прямых AB', AD' и от грани $ABCD$ на расстояние 1. Найдите объём параллелепипеда. (*П. Д. Муленко*)

3. Решите систему в целых числах:
$$\begin{cases}(y^2+6)(x-1) = y(x^2+1),\\(x^2+6)(y-1) = x(y^2+1).\end{cases}$$
(*Л. С. Корешкова*)

4. Маша нарисовала на клетчатой бумаге по линиям сетки квадрат $n \times n$ клеток, где n — чётное число. В некоторых клетках она провела диагонали, соблюдая два правила:
   - нельзя проводить две диагонали в одной клетке;
   - нельзя проводить две диагонали с общим концом.

   Какое наименьшее число пустых клеток могло остаться на Машином рисунке? (*С. П. Павлов*)

5. Двое играют в карточную игру. У каждого есть колода из 30 карт. Каждая карта красная, зелёная или синяя. По правилам красная карта сильнее зелёной, зелёная сильнее синей, а синяя сильнее красной. Карты одного цвета равны. Колода каждого игрока перед началом партии перемешивается и кладётся перед ним рубашкой вверх. После этого оба открывают по верхней карте своей колоды. Если карты разного цвета, то выигрывает тот, чья карта сильнее. Если карты одинаковые, то они уходят в сброс, а игроки открывают ещё по одной карте — и так до тех пор, пока карты не окажутся различными. Если же обе колоды кончились, а победитель не выявлен, объявляется ничья.
   Известно, что у первого игрока в колоде по 10 карт каждого цвета. Второй игрок имеет право взять любую колоду из 30 карт. Может ли он подобрать колоду так, чтобы вероятность его выигрыша была больше 1/2? (*Е. С. Голикова*)

6. Клетки кубической таблицы $7 \times 7 \times 7$ (то есть маленькие кубики) пронумеровали по порядку числами от 1 до 343. (Сначала нумеруются клетки верхнего слоя: в первой строке слева направо от 1 до 7, в следующей от 8 до 14, и так далее до 49. Далее в таком же порядке нумеруются клетки второго слоя и т. д.) После этого из таблицы удалили несколько непересекающихся кубов $2 \times 2 \times 2$, а все оставшиеся числа сложили. Чему может равняться остаток от деления полученной суммы на 8? (*А. А. Теслер*)