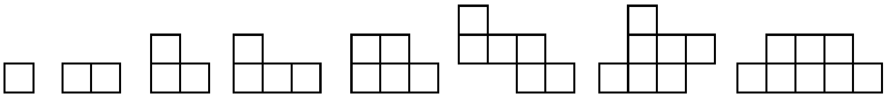
Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2021–2022 учебный год. Отборочный этап

Решения и критерии оценивания

Полностью верное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.

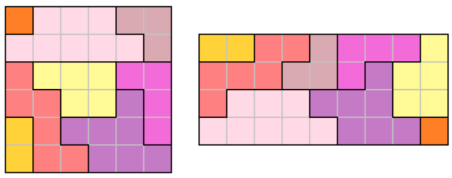
Задачи для 5 класса

1. Используя каждую из фигур по одному разу, составьте из них прямоугольник. Фигуры можно поворачивать и переворачивать.



(*А. В. Копчук*)

Решение. Два примера показаны на рисунке (есть и другие примеры).



Критерии. Есть хотя бы один пример — 7 баллов.

2. Учитель попросил Катю и Лену написать по кругу 4 натуральных числа, сумма которых равна 8, но никакие несколько (от 1 до 3) подряд идущих чисел не дают в сумме 4. Обе девочки выполнили задание. Могло ли оказаться, что Лена написала какое-то число, которое Катя не написала? (*С. П. Павлов*)

Ответ: Да, например, Лена написала $1, 2, 3, 2$, а Катя — $1, 1, 1, 5$.

Критерии. 7 баллов за верный пример. При ответе «нет» — 0 баллов независимо от продвижений.

3. У числа 1234 произведение цифр на 14 больше, чем сумма цифр (произведение цифр равно $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$, а сумма цифр равна $1 + 2 + 3 + 4 = 10$). Придумайте число, у которого произведение цифр на 2021 больше, чем сумма цифр. (*А. А. Теслер*)

Решение. Например, число, состоящее из 11 двоек и 5 единиц в любом порядке (сумма 27, произведение $2^{11} = 2048$).

4. Проверяющий олимпиады после тяжёлого трудового дня покидает рабочий кабинет, освещение в котором работает в нескольких режимах. Когда проверяющий вышел из комнаты, он плотно закрыл за собой дверь и встал у кнопки, которая переключает эти режимы (режимы переключаются по порядку от первого до последнего, после последнего идет выключение, а затем все заново). Но, к сожалению, проверяющий очень устал и забыл точное количество режимов, а помнит лишь, что их было не больше 5 (не считая выключенного состояния) и что сейчас включён первый режим. Помогите проверяющему выключить свет в кабинете, если он не может видеть, какой режим включён. (*А. Б. Владимиров*)

Решение. Например, он может щёлкнуть $\text{НОК}(1, 2, 3, 4, 5, 6) - 1 = 59$ раз. Впрочем, подходит любое (а не только наименьшее) общее кратное этих чисел минус 1.

Критерии. Достаточно привести любое подходящее количество раз (а не все возможные). 0 баллов за решение в предположении, что режимов ровно 5. Ход решения верный, но общее кратное вычислено неверно — снимается 2 балла. В ответе не вычтена единица — снимается 1 балл. Указано верное количество переключений (например, 59) без каких-либо пояснений, что это за число — 1 балл. Решение в предположении, что нужно найти НОК чисел 1, 2, 3, 4, 5, то есть не учтено, что выключенное состояние может оказаться шестым режимом — снимается 2 балла.

5. Четыре группы студентов (по 26 человек в каждой) решили отправиться в поездку на автобусах, а затраты распределить поровну. Транспортная компания предоставляет автобусы двух видов — на 30 пассажиров (по одной цене) и на 50 пассажиров (по более высокой цене). Сначала студенты решили заказать автобусы как можно дешевле, и вышло, что каждому нужно заплатить по 250 рублей. Потом выяснилось, что ни одна из групп не хочет оказаться разделённой между двумя автобусами, и с учётом этого каждому студенту пришлось бы заплатить по 300 рублей. В конце концов по одному студенту в каждой из групп отказались от поездки. Сколько теперь придётся заплатить каждому из студентов? (*Л. С. Корешкова*)

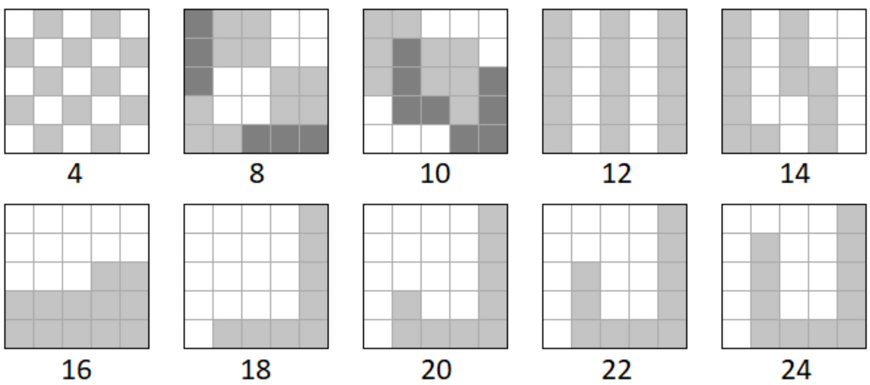
Решение. В первом случае (104 студента) самый дешёвый вариант либо $50+30+30$, либо $4 \cdot 30$. Но вариант $4 \cdot 30$ подходит и во втором случае, значит, он дороже. В первом случае потрачено 26000, во втором 31200, значит, автобус на 50 мест на 5200 рублей дешевле, чем два автобуса на 30 мест. В третьем случае самый дешёвый вариант $50 \cdot 2$, он стоит ещё на 5200 рублей дешевле первого, то есть 20800 рублей, или 208 на человека.

Ответ: 208 рублей.

6. На клетчатой бумаге нарисован квадрат 5×5 (в нём всего 25 клеток). Дима, делая разрезы только по линиям, хочет разделить квадрат на несколько (более одной) фигурок, у каждой из которой периметр (вычисляется в клетках) равен P. При каких $P < 25$ Диме удастся это сделать? (*С. П. Павлов*)

Решение. Во-первых, периметр не может быть нечётным. Действительно, обойдём фигурку по периметру. Вертикальных линий чётное количество, поскольку при таком обходе мы поднимемся и спустимся одинаковое количество раз; аналогично и горизонтальных линий чётное количество.

Минимальный чётный периметр, 4, имеет клетка 1×1, поэтому $P = 4$ подходит. Периметр 6 бывает только у прямоугольника 2×1, но на такие прямоугольники квадрат не разбивается, поскольку число клеток (25) нечётно. Все чётные числа от 8 до 24 достижимы (см. рисунок).



Ответ: при $P = 4, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24$.

Критерии. 3 балла — за нахождение всех верных примеров (−1 балл за каждый потерянный верный ответ, в том чисел за неверный пример к верному ответу).

4 балла — за доказательство, что других ответов нет: 1 балл за доказательство того, что периметр 6 невозможен; 1 балл за упоминание и ещё 2 балла за доказательство того, что нечётные периметры невозможны.

Только верный перечень ответов без каких-либо пояснений — 1 балл.

7. Андрей задумал два различных натуральных числа. На одной из карточек он записал их сумму, а на другой — удвоенное меньшее число. После этого одну из карточек он дал Боре, а другую Вите.
Боря: Увы, я не знаю, какая у меня карточка.
Витя: Я тоже не знаю, какая у меня карточка.
Боря: Зато я теперь знаю.
У кого оказалась карточка с суммой? (*К. А. Кноп*)

Ответ: у Вити.

Решение. Ясно, что у обоих мальчиков чётные числа, иначе бы имеющий нечётное число сразу понимал, что у него **не** карточка с удвоенным числом. Также ясно, что ни у кого из них не 2, так как видящий 2 сразу понимает, что у него $2 \cdot 1$. Кроме того, у Вити не может быть 4, так как вариант суммы $1 + 3$ для него невозможен (в этом варианте Боря бы видел 2, а значит, знал бы, какая у него карточка) и остается только вариант $2 + 2$. Поэтому у Вити чётное число, не меньшее 6, а у Бори чётное, не меньшее 4.

В каких случаях Боря на втором высказывании может понять, какая у него карточка? Если у Бори на карточке написано $2N$, то он должен иметь возможность выбрать между вариантом $2 \cdot N$ и списком вариантов $K + (2N - K)$ при $K < N$. Выбрать он может только в том случае, когда предыдущее высказывание Вити исключает одну из этих возможностей. Но единственные варианты, которые можно исключить, это $1 + (2N - 1)$ и $2 + (2N - 2)$, потому что после слов Вити выяснилось, что у него не 2 и не 4. Так как этого достаточно для того, чтобы исключить все варианты с различными суммами, то $2N = 4$ или $2N = 6$; Боря понимает, что задуманы 2 или 3 и еще какое-то число, а ему досталась карточка с удвоенным наименьшим. Следовательно, карточка с суммой — у Вити.

Критерии. Сам ответ оценивается в 0 баллов. За замечание, что сумма должна быть чётной, даётся 1 балл. За нахождение какого-нибудь варианта исходных чисел, дающего нужные ответы ребят, даётся 2 балла. Полностью рассмотрен вариант с карточкой 4 у Бори — 3 балла. Полностью рассмотрен вариант с карточкой 6 у Бори — 3 балла.

Задачи для 6 класса

1. См. задачу 1 для 5 класса.

2. По кругу написаны 6 натуральных чисел, сумма которых равна 12. Катя заметила, что какие бы несколько (от 1 до 5) подряд идущих чисел ни взять, их сумма не равна 6. Чему может равняться максимальное из чисел? (Укажите все возможные варианты ответа на этот вопрос и объясните, почему эти варианты возможны, а все остальные — нет.)
(*С. П. Павлов*)

Решение. Возможные следующие ответы: 7 (711111), 5 (252111), 4 (143112), 3 (313131).

Остальные ответы невозможны:

— если одно из чисел больше 7, то остальные 5 хотя бы 1, и сумма больше 12;

— если одно из чисел равно 6, то сумма остальных равна 6;
— если максимальное число равно 2, то эти числа — обязательно шесть двоек, и три из них в сумме дают 6;
— равняться 1 максимальное число не может.

Ответ: 3, 4, 5 или 7.

Критерии. За верное рассмотрение каждого из следующих 7 случаев: 2, 3, 4, 5, 6, 7, > 7 даётся по 1 баллу. Например, все верные ответы с примерами, но без доказательств невозможности остальных вариантов дают 4 балла.
За верный перечень ответов без обоснований — 1 балл.

3. См. задачу 3 для 5 класса.
4. В некотором месяце было пять понедельников, в следующем пять вторников, а в следующем — пять сред. В какой день недели начался год, в котором всё это было? (*А. А. Теслер*)

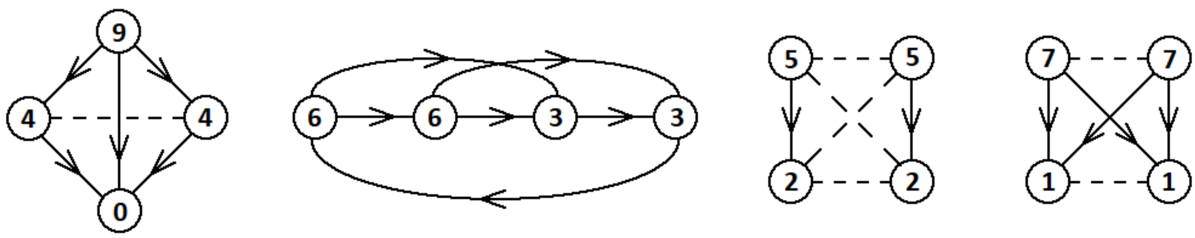
Решение. Заметим, что в двух подряд идущих месяцах каждый день недели встречается не более 9 раз (поскольку их суммарная длина меньше 9 недель). Значит, во втором месяце было 4 понедельника и 4 среды. Такое возможно, только если он начался во вторник (иначе перед каждым из пяти вторников в нём будет понедельник, и получится 5 понедельников) и закончился во вторник (иначе получится 5 сред). Значит, в среднем месяце 29 дней, то есть это високосный февраль. 1 февраля было вторником, значит, 1 января — субботой. Заметим, что такие годы действительно существуют (например, 2000, 2028, 2056).

Ответ: в субботу.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Ответ+пример — 2 балла (в качестве примера можно указать номер года без дополнительных комментариев, а можно написать, что подходят январь–март високосного года). Доказывать существование високосного года, начинающегося с субботы, не требуется.

5. См. задачу 5 для 5 класса.
6. В чемпионате по футболу участвуют 32 команды, разбитые на 8 групп по 4 команды. В каждой группе каждая команда играет с каждой из трёх остальных по одному разу. За выигрыш в матче даётся 3 очка, за поражение 0, за ничью 1 (то есть суммарно команда может заработать от 0 до 9 очков). Обязательно ли после окончания групповых игр найдутся 5 команд, у которых поровну очков? (*А. А. Теслер*)

Решение. Нет. Например, можно дважды повторить каждую из групп, показанных на рисунке. (В кружках указано количество набранных очков. Стрелки проведены от выигравших команд к проигравшим, а пунктирные линии — между командами, сыгравшими вничью.)



Критерии. При ответе «да» — 0 баллов независимо от наличия продвижений.

7. См. задачу 7 для 5 класса.

Задачи для 7 класса

1. См. задачу 6 для 5 класса.
2. См. задачу 4 для 5 класса.
3. Угол между часовой и минутной стрелками часов составляет 70°. Через сколько минут он в следующий раз станет равен 70°? Обе стрелки вращаются непрерывно. (*А. А. Теслер*)

   Решение. Заметим, что за 12 часов минутная стрелка проходит на 11 кругов больше часовой. Значит, угловая скорость минутной стрелки относительно часовой составляет $\dfrac{11}{12}$ кругов в час, или $\dfrac{11}{12} \cdot 360^\circ = 330^\circ$ в час.
   Если минутная стрелка отставала от часовой на 70°, то в следующий раз ей надо обгонять её на 70°, то есть пройти относительно неё 140°. Для этого потребуется $\dfrac{140}{330}$ часа, или $\frac{140}{330} \cdot 60 = 25\frac{5}{11}$ минут.
   Если же минутная стрелка опережала часовую на 70°, то в следующий раз она будет от неё отставать на 70°. Для этого ей надо пройти $360^\circ - 140^\circ = 220^\circ$, на это нужно $\dfrac{220}{330}$ часа, или 40 минут.

   Ответ: через 40 минут или через $25\frac{5}{11}$ минуты.

   Критерии. За каждый ответ без доказательства — 1 балл. За каждый ответ с верным доказательством — 3 балла. Второй ответ указан не точно, а округлённо — снимается 1 балл.

4. См. задачу 4 для 6 класса.
5. Типография определяет стоимость печати книги так: складывает стоимость обложки со стоимостью каждой из страниц, а результат округляет вверх до ближайшего целого числа рублей (то есть, например, если получилось 202 рубля 1 копейка, то это округляется до 203 рублей). Известно, что стоимость книги объёмом 104 страницы составляет 134 рубля, а книги объёмом 192 страницы — 181 рубль. Сколько стоит печать обложки, если она стоит целое число рублей, а стоимость одной страницы составляет целое число копеек? (*П. Д. Муленко*)

   Решение. До округления получалось, что первая книга стоит от 133,01 до 134 рублей, а вторая — от 180,01 до 181. Тогда разность их цен может составлять от $180{,}01 - 134 = 46{,}01$ до $181 - 133{,}01 = 47{,}99$. Эта разность в точности равна стоимости 88 страниц ($192 - 104 = 88$). Значит, одна страница стоит от $46{,}01/88 = 0{,}522\ldots$ до $47{,}99/88 = 0{,}545\ldots$ рублей. Поскольку страница стоит целое число копеек, то возможны лишь варианты 53 и 54 копейки.

   Если страница стоит 53 копейки, то страницы первой книги стоят $0{,}53 \cdot 104 = 55{,}12$ рублей, тогда обложка должна стоить 78 рублей. Страницы второй книги стоят $0{,}53 \cdot 192 = 101{,}76$, и обложка должна стоить 79 рублей — противоречие.
   Если страница стоит 54 копейки, то страницы первой книги стоят $0{,}54 \cdot 104 = 56{,}16$ рублей, тогда обложка должна стоить 77 рублей. Страницы второй книги стоят $0{,}54 \cdot 192 = 103{,}68$, и обложка вновь должна стоить 77 рублей — этот случай подходит.

   Ответ: 77 рублей.

   Критерии. 1 балл за ответ. 2 балла за ответ+пример. 3 балла за решение, в котором не учтено округление. Не доказано, что 53 не подходит — снимается 2 балла. Не вычислена стоимость самой обложки при полностью верном обосновании стоимости страницы — снимается 1 балл.

6. См. задачу 6 для 6 класса.
7. См. задачу 7 для 5 класса.

Задачи для 8 класса

1. У числа 1234 произведение цифр на 14 больше, чем сумма цифр (произведение цифр равно $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$, а сумма цифр равна $1 + 2 + 3 + 4 = 10$). А сколько разрядов содержит наименьшее натуральное число, у которого произведение цифр на 2021 *меньше*, чем сумма цифр? (*А. А. Теслер*)

   Решение. Построим пример, в котором одна из цифр числа равна нулю, тогда произведение цифр равно 0, а сумма 2021. Минимальное количество ненулевых цифр равно $[2021 : 9] + 1 = 225$ (224 девятки и одна пятёрка), то есть всего 226 цифр.

   Докажем, что меньше 226 цифр в числе быть не может. Если цифр 224 или менее, то их сумма не превосходит $224 \cdot 9 = 2016$ — слишком мало. Если цифр 225, то их сумма может быть от 2021 до 2025, причём для этого каждая цифра должна быть не меньше 5; но тогда произведение гораздо больше 4.

   Ответ: 226.

   Критерии. Рассмотрен только случай, когда одна из цифр равна 0, и для него верно найден ответ (иначе говоря, доказана невозможность 224 и возможность 226, но пропущен случай 225) — 3 балла. Только доказано, что 224 цифры быть не может — 1 балл. Только ответ (226), без каких-либо комментариев про минимальность — 1 балл.
   Ответ меньше верного на 1 или 2 при верных рассуждениях (что вызвано неверным округлением и/или неучётом цифры 0) — снимается 1 или 2 балла соответственно.

2. При каких натуральных n выражение $45^n + 988 \cdot 2^n$ делится на 2021? (*Л. С. Корешкова*)

   Решение. Заметим, что 2021 равно произведению простых чисел 43 и 47, то есть делимость на 2021 равносильна делимости на 43 и 47. Воспользуемся формулами
   $(a^n - b^n) = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$,
   $(a^n + b^n) = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \ldots - ab^{n-2} + b^{n-1})$ при нечётных n.

   Во-первых, $45^n + 988 \cdot 2^n = (45^n - 2^n) + 989 \cdot 2^n$ кратно 43, поскольку $45^n - 2^n$ и 989 делятся на 43.

   Во-вторых, $45^n + 988 \cdot 2^n = (45^n + 2^n) + 987 \cdot 2^n$. При нечётных n это кратно 47, поскольку $45^n + 2^n$ и 987 делятся на 47. При чётных n второе слагаемое кратно 47, а первое нет. Действительно, $45^{2k} + 2^{2k} \equiv (-2)^{2k} + 2^{2k} \equiv 2^{2k} + 2^{2k} \equiv 2^{2k+1} \not\equiv 0 \pmod{47}$.
   (Запись $a \equiv b \pmod{m}$ означает, что числа a и b имеют одинаковый остаток от деления на m. Мы использовали известное свойство: если $a \equiv b \pmod{m}$, то $a^n \equiv b^n \pmod{m}$.)

   Ответ: при всех нечётных n.

   Критерии. Разобран только случай нечётного n — 3 балла; только случай чётного n — 4 балла.

3. См. задачу 3 для 7 класса.

4. Переставляя цифры в трёхзначном числе, можно получить до 6 различных чисел. Какое наибольшее количество из них могут образовывать арифметическую прогрессию? (Арифметическая прогрессия — это последовательность, в которой каждое число больше предыдущего на одну и ту же величину, например: 57, 63, 69, 75.) (*В. П. Федотов*)

   Ответ: 3.

   Решение. Пример: 127, 172, 217 (есть и другие).

Докажем, что прогрессия из 4 чисел невозможна (тогда более длинная тем более). Пусть прогрессия содержит 4 числа, тогда все три цифры различны. Какие-то два из четырёх чисел имеют одинаковые средние цифры, так что разность между ними $\overline{xyz} - \overline{zyx} = 99|x - z|$ делится на 99. Эта разность равна разности прогрессии, умноженной на число от 1 до 3, то есть разность прогрессии делится на 11. Также какие-то два из чисел прогрессии ($\overline{abc}$ и $\overline{acb}$) имеют одинаковые старшие цифры, тогда разность между ними равна $9|b - c|$, а в то же время она должна делиться на 11, что невозможно, ведь разность между неравными цифрами не делится на 11.

Другое доказательство. Пусть прогрессия содержит 4 числа, тогда у двух из них совпадает последняя цифра. Разность между ними делится на 10, а значит, разность прогрессии делится на 5. На 10 она делиться не может (не существует четырёх чисел с одинаковой последней цифрой), значит, два числа кончаются цифрой a, а два — цифрой $b = a+5$. Тогда числа имеют вид $\overline{bca}$, $\overline{cba}$, $\overline{acb}$, $\overline{cab}$. Заметим, что $|\overline{cba} - \overline{cab}| < 100$, но $|\overline{bca} - \overline{acb}| > 400$ — противоречие (разности различаются не более чем втрое).

Критерии. 2 балла за пример, 5 за доказательство невозможности последовательностей длины 4. Доказательство невозможности, в котором разобраны не все возможные случаи, оценивается не более чем в 2 балла.

5. Отметим на шахматной доске центры всех клеток (центры белых клеток — белыми точками, центры чёрных — чёрными). Сколько существует равнобедренных прямоугольных треугольников, все вершины которых — отмеченные точки одного цвета?

(*Л. С. Корешкова*)

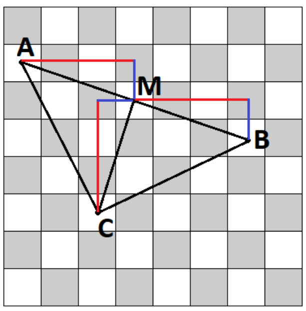
Решение. Приведём решение, не требующее перебора вариантов, хотя и не самое простое.

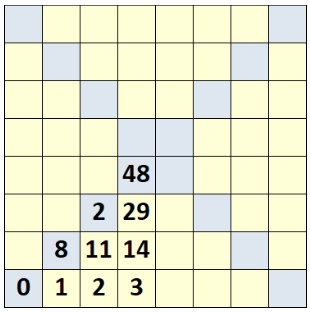
Лемма. Такие треугольники — это в точности равнобедренные прямоугольные треугольники, у которых середина гипотенузы и все вершины являются центрами клеток.

Доказательство леммы. Пусть дан треугольник ABC, где M — середина гипотенузы AB. Будем обозначать координаты точки A через x_A и y_A, и аналогично для остальных точек. Считаем, что координаты центров клеток принимают значения от 0 до 7. Обозначим $|x_A - x_M| = m$, $|y_A - y_M| = n$. Тогда $|x_B - x_M| = |y_C - y_M| = m$, $|y_B - y_M| = |x_C - x_M| = n$, поскольку отрезки AM и CM равны и перпендикулярны (см. рисунок).

1. Пусть у треугольника все вершины и середина гипотенузы являются центрами клеток. Заметим, что M и A одного цвета тогда и только тогда, когда $|x_A - x_M| + |y_A - y_M|$ чётно, то есть $m + n$ чётно. То же верно и для пар M и B, M и C. Это значит, что точки A, B, C все одного цвета (либо того же, что M, либо противоположного).

2. Пусть у треугольника все вершины одного цвета. Совпадение цветов A и B означает, что $2g + 2h$ чётно, то есть $g + h$ — целое. Теперь рассмотрим отрезок AC: его проекции на оси (при $m \geqslant n$) равны $g - h$ и $g + h$, откуда получается, что $(g - h) + (g + h)$ чётное, то есть g целое. Заключаем, что и h целое. Значит, M — центр клетки. ***Лемма доказана.***





Теперь будем считать треугольники, описанные в лемме. Для каждой возможной середины гипотенузы (x, y) найдём явную формулу для количества треугольников. Из соображений симметрии можно считать, что $0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 3$.

Если $(x+a, y+b)$ — вершина с прямым углом, то оставшиеся вершины имеют координаты $(x-b, y+a)$ и $(x+b, y-a)$. Надо найти количество целочисленных пар (a, b) таких, что все эти три точки имеют координаты от 0 до 7. Получаем 6 двойных неравенств (по одному на каждую координату каждой точки), из которых с учётом условия $0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 3$ остаются только $-x \leqslant b \leqslant x$ и $-x \leqslant a \leqslant y$. Так что всего есть $(2x+1)(x+y+1)-1$ треугольников, вариант $a = b = 0$ мы исключаем.

Суммируя эти количества по всем клеткам (см. рисунок справа), получаем
$8 \cdot (1 + 2 + 3 + 11 + 14 + 29) + 4 \cdot (0 + 8 + 24 + 48) = 800$.

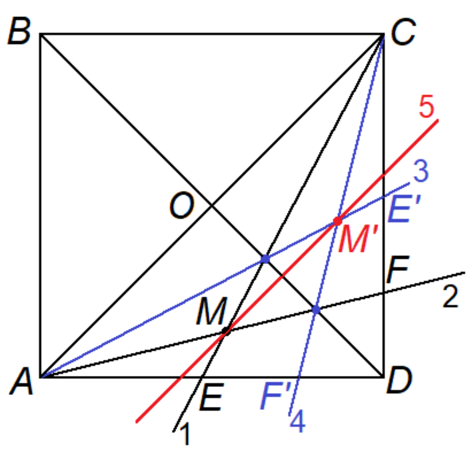
Критерии. Во всех переборных решениях: каждый пропущенный случай — штраф в 1 балл. Если в переборе нет логики, то за решение даётся 0 баллов.

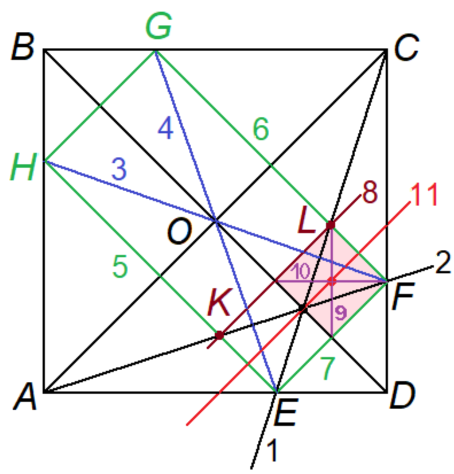
6. На плоскости нарисован квадрат $ABCD$ и точка M внутри него. Придумайте, как с помощью одной линейки, проведя не более 20 линий, провести через M прямую, параллельную диагонали AC. (На линейке нет делений, на ней нельзя ничего отмечать — можно только проводить прямую через две данные точки.) (*А. А. Теслер*)

Решение. Проведём сначала диагонали квадрата. Будем сразу считать, что M не лежит на AC (иначе исходная прямая — сама AC).

Научимся для начала отражать произвольную точку S, лежащую (например) на стороне AD, относительно BD. Пусть CS пересекает BD в точке T, тогда AT пересекает CD в точке S', симметричной S.

Теперь проведём через M прямые CE и AF, где E и F лежат на сторонах квадрата (см. первый рисунок). Отразим точки E и F относительно диагонали BD, как описано выше, получим точки E' и F'. Тогда прямые AE' и CF' пересекаются в точке M', симметричной M относительно BD.

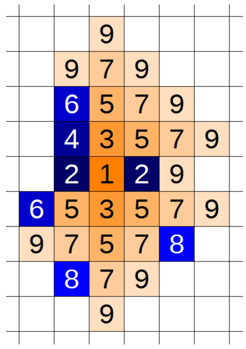




Отдельно надо рассмотреть случай, когда M лежит на BD (см. второй рисунок) — тогда M и M' совпадают, так что предыдущий алгоритм не подходит. Не умаляя общности, пусть M является внутренней точкой отрезка OD (где O — точка пересечения диагоналей квадрата). Проведём через M прямые CE и AF, как мы это делали в предыдущем случае. Пусть прямые EO и FO пересекают стороны квадрата в точках G и H соответственно, тогда $EFGH$ — прямоугольник (поскольку его вершины симметричны друг другу относительно диагоналей квадрата, то стороны параллельны этим диагоналям, а значит, перпендикулярны между собой). Пусть теперь $EH \cap AF = K$, $FG \cap CE = L$, тогда K и L симметричны относительно BD, значит, $KLFE$ — прямоугольник. Диагональ BD делит его на два равных прямоугольника. Найдём точку пересечения диагоналей одного из них и обозначим за M', тогда прямая MM' содержит среднюю линию прямоугольника $KLFE$, то есть параллельна AC.

Критерии. Построение выполнено для всех точек M, кроме лежащих на BD — 4 балла.
Не упомянут случай $M \in AC$ — баллы не снимаются.
Приведено верное построение, но доказательство верности полностью отсутствует — не более 3 баллов.

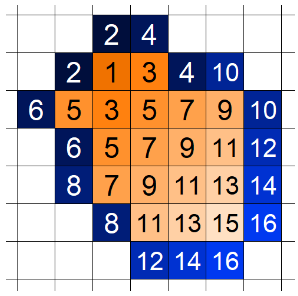
7. В городе, представляющем собой бесконечную клетчатую плоскость, есть n пожарных. Однажды в одной из клеток города возникает пожар. В следующую минуту каждый пожарный может (но не обязан) защитить какую-нибудь одну ещё не горящую клетку, соседнюю с горящей. Ещё через минуту пожар распространяется на все клетки, соседние с горящими, кроме защищённых. Далее пожарные и пожар действуют по очереди. При каком минимальном n пожарные смогут локализовать пожар, то есть сделать так, чтобы он перестал распространяться?



(На рисунке показано, как могут развиваться события при $n = 2$; нечётные числа соответствуют распространению пожара, чётные — действиям пожарных.)

(*Л. С. Корешкова*)

Решение. Сначала докажем, что одного пожарного недостаточно. Пусть огонь начал распространяться из клетки с координатами $(0, 0)$. По индукции легко проверить, что после n ходов пожарного огонь сможет захватить хотя бы одну клетку на n-й диагонали из клеток $(n, 0), \ldots, (0, n)$: пожарный к этому моменту мог защитить не больше одной клетки на n-й диагонали, а у уже горящей клетки на предыдущей диагонали есть два соседа на n-й.
Двух пожарных достаточно, см. рисунок.

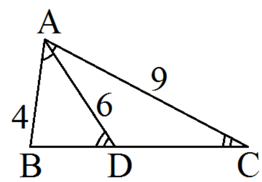


Критерии. Только пример — 3 балла, только оценка — 3 балла.

Задачи для 9 класса

1. Марине приснился треугольник со сторонами 9 и 4 и биссектрисой, выходящей из угла, образованного этими сторонами, длиной 6. Сможет ли Марина воплотить сон в реальность? (*Л. С. Корешкова*)

Решение. Пусть AD — биссектриса треугольника ABC. Поскольку $\angle BAD = \angle DAC$ и $4 : 6 = 6 : 9$, то треугольники BAD и DAC подобны, и $\angle ADB = \angle ACD$. Но тогда прямые AD и AC должны быть параллельны, что неверно.



Ответ: нет.

2. См. задачу 2 для 8 класса.

3. См. задачу 3 для 7 класса.

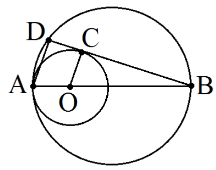
4. См. задачу 4 для 8 класса.
5. Назовём числовое множество X периодичным (с периодом $T > 0$), если для всякого $a \in X$ числа $a + T$ и $a - T$ также лежат в X. Периодично ли множество всех целых чисел, содержащих в записи цифру 5? (*А. А. Теслер*)

   Ответ: Нет.

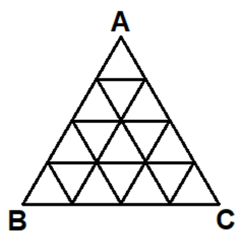
   Решение. Пусть оно периодично с периодом T. Тогда рассмотрим такое n, что $T < 10^n$. Существует такое число A в промежутке от $5 \cdot 10^n$ до $6 \cdot 10^n - 1$, что $A + T = 6 \cdot 10^n$. Противоречие.
6. См. задачу 6 для 8 класса.
7. См. задачу 7 для 8 класса.

Задачи для 10 класса

1. См. задачу 4 для 6 класса.
2. Две окружности касаются внутренним образом в точке A. AB — диаметр большей окружности, точка O — центр меньшей. Хорда BD большей окружности касается меньшей в точке C. Докажите, что $BO \cdot CD = OA \cdot BC$. (*Е. С. Голикова*)

   Решение. Заметим, что $O \in AB$. Угол ADB прямой, поскольку опирается на диаметр, OCB прямой по свойству касательной, значит, $AD || OC$. По теореме о пропорциональных отрезках, $AO : OB = DC : CB$.
3. См. задачу 7 для 5 класса.
4. Дана треугольная сетка, показанная на рисунке. Юный робототехник Петя посадил в точку A робота-улитку. Чтобы пройти по одному ребру сетки, улитке нужен час. На каждой развилке улитка с равной вероятностью выбирает любое из направлений (в том числе то, откуда только что пришла), а между развилками не разворачивается. Петя ушёл и вернулся ровно через 4 часа. Что более вероятно: что он увидит улитку на стороне BC или в вершине A? (*Л. С. Корешкова, А. А. Теслер*)

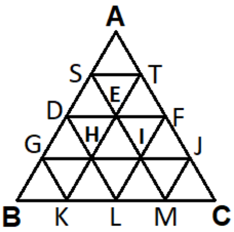
   Ответ: В вершине вероятность больше.

   Решение. Вероятности попасть во все вершины после 1, 2, 3, 4 часа имеют вид

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & & & \\
 & & & 1/2 & & 1/2 & & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & \\
0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1/4 & & & & \\
 & & & 1/8 & & 1/8 & & & \\
 & & 1/8 & & 1/4 & & 1/8 & & \\
 & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & \\
0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \frac{1}{16} & & & & \\
 & & & \frac{11}{48} & & \frac{11}{48} & & & \\
 & & \frac{7}{96} & & \frac{1}{8} & & \frac{7}{96} & & \\
 & \frac{1}{32} & & \frac{7}{96} & & \frac{7}{96} & & \frac{1}{32} & \\
0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \frac{11}{96} & & & & \\
 & & & \frac{49}{384} & & \frac{49}{384} & & & \\
 & & \frac{113}{1152} & & \frac{101}{576} & & \frac{113}{1152} & & \\
 & \frac{35}{1152} & & \frac{17}{288} & & \frac{17}{288} & & \frac{35}{1152} & \\
\frac{1}{128} & & \frac{23}{1152} & & \frac{7}{288} & & \frac{23}{1152} & & \frac{1}{128}
\end{array}$$

Получаем $11/96$ для вершины и суммарно $23/288$ для стороны.



Другой способ решения. На самом деле не обязательно считать вероятности для всех вершин.
Чтобы попасть на сторону, улитке надо все 4 раза спускаться вниз.

После первого хода вероятность попасть в вершины S и T составляет по $1/2$.
После второго хода вероятность попасть в D равна $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$, в F тоже, в E: $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot 2=\frac{1}{4}$.
После третьего хода: в G — $\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{32}$, в J тоже, в каждую из вершин H и I — по $\frac{1}{32}+\frac{1}{24}=\frac{7}{96}$.
После четвёртого: вероятность уйти вниз, если выходить из G или J — $\frac{1}{2}$, если из H и I — $\frac{1}{3}$. Итого $\left(\frac{1}{32}\cdot 12+\frac{7}{96}\cdot\frac{1}{3}\right)\cdot 2=\frac{23}{288}$.

Чтобы попасть в вершину, улитка должна пройти по пути одного из следующих видов.
а) $ASASA$ или $ASATA$ или $ATASA$ или $ATATA$: вероятность $\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\right)\cdot 4=\frac{1}{16}$.
б) $ASTSA$ или $ATSTA$: вероятность $\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\right)\cdot 2=\frac{1}{64}$.
в) $ASDSA$ или $ATFTA$: вероятность $\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\right)\cdot 2=\frac{1}{64}$.
г) $ASESA$ или $ASETA$ или $ATESA$ или $ATETA$: вероятность $\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}\right)\cdot 4=\frac{1}{48}$.
Итого $\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{64}+\frac{1}{48}=\frac{22}{192}=\frac{11}{96}$.

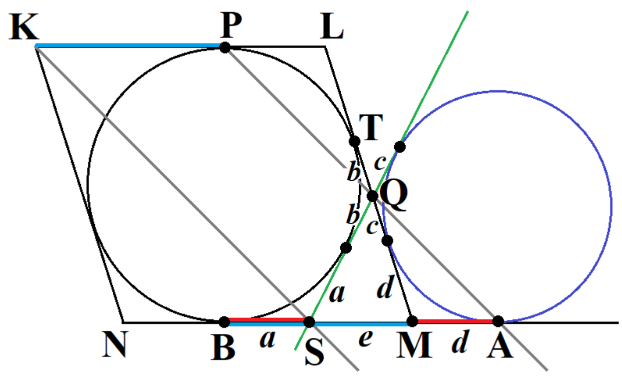
Критерии. Только ответ («в вершине более вероятно») не оценивается. Если в решении улитка выбирает направления по другим правилам, чем в условии, то ставится 0 баллов. Полный балл ставится уже за правильно найденные вероятности оказаться в вершине и на стороне (даже если участник забыл указать, какая из них больше).

5. См. задачу 7 для 8 класса.

6. В ромб $KLMN$ вписана окружность, которая касается стороны LK в точке P. Через точки P и K проведены параллельные прямые до пересечения со сторонами LM и MN в точках Q и R соответственно. Докажите, что окружность касается QR.

(*Л. С. Корешкова*)

Решение. Обозначим точку касания окружности со стороной LM через T. Поскольку $LP=LT$ и $LK=LM$, то $PT||KM$. Значит, Q лежит на отрезке TM (если бы Q лежала на LT, то R лежала бы на LM).



Проведём из точки Q вторую касательную к окружности, она пересечёт сторону MN в некой точке S. Докажем, что $KS||PQ$ (тогда получится, что S совпадает с R, то есть QR — касательная к окружности).

Рассмотрим вневписанную окружность треугольника QSM (см. рисунок). Пусть A — точка касания с продолжением NM. Q — центр гомотетии окружностей, поскольку это точка пересечения общих касательных; значит, $Q\in AP$.

Докажем, что $SA=KP$ (тогда получим, что $KPAS$ — параллелограмм). Действительно, $KP=BM$ по свойствам ромба (эти отрезки симметричны относительно его центра), а $BS=MA$ по свойствам вписанных окружностей (см. рисунок: отрезки касательных к одной окружности из одной точки равны, поэтому $a+b+c=e+d$, $e+a=d+c+b$; складывая эти равенства, получаем $2a=2d$).

7. Произведение трёх положительных чисел x, y и z равно 1. Какое наименьшее значение принимает выражение $\dfrac{(x+y)(y+z)(z+x)}{x+y+z-1}$? *(А. Р. Араб)*

Решение. Заметим, что это выражение равно 4 при $x = y = z = 1$. Остаётся доказать неравенство $(x+y)(y+z)(z+x) \geqslant 4(x+y+z-1)$. Не умаляя общности, $z \leqslant \min(x, y)$, тогда $x + y \geqslant 2$. Подставим $\dfrac{1}{xy}$ вместо z и избавимся от знаменателей, получим

$$(x+y)(x^2y+1)(xy^2+1) \geqslant 4xy(x^2y + xy^2 + 1 - xy).$$

Поскольку неравенство симметрично относительно x и y, то можно сделать замену $s = x + y$, $p = xy$, получится квадратичное неравенство на s:

$$s^2p + s(p^3 - 4p^2 + 1) + 4p^2 - 4p \geqslant 0.$$

Положительность x и y равносильна тому, что $s > 0$ и $0 < p \leqslant \dfrac{s^2}{4}$ (также у нас $s \geqslant 2$). Так как коэффициент при s^2 положителен, то остаётся проверить, что неравенство выполнено при $s = 2$ и что $-\dfrac{p^3 - 4p^2 + 1}{2p} \leqslant 2$. Но при $s = 2$ (и $0 < p \leqslant 1$) неравенство очевидно:

$$2p^3 - 4p^2 + 2 \geqslant 2(\sqrt{p^3} - 1)^2 \geqslant 0.$$

А оставшееся неравенство следует из $p^3 - 4p^2 + 4p + 1 = p(p-2)^2 + 1 \geqslant 0$ при $p > 0$.

Критерии. Проверки неравенства в частных случаях (например, при $x = y = z = 1$) не оцениваются.

Задачи для 11 класса

1. См. задачу 4 для 6 класса.

2. На далёкой планете X стоят телескопы: телескоп A — на Северном полюсе, телескопы B и C — на экваторе, причём расстояние между B и C (по поверхности планеты) вдвое меньше, чем между A и C. Каждый телескоп видит ровно половину неба (ту, которая не закрыта планетой). Какова вероятность, что в данный момент во все три телескопа видно наше Солнце? *(О. А. Пяйве)*

   Ответ: 3/16.

   Решение. Пусть O — центр планеты, тогда $\angle BOC = 45^\circ$. Ясно, что телескопы B и C вместе наблюдают ровно 3/8 неба, так что все три видят только 3/16.

   Критерии. За нахождение $\angle BOC$ даётся 2 балла. Если телескоп A не учтён, то не больше 5 баллов.

3. См. задачу 4 для 8 класса.

4. См. задачу 7 для 8 класса.

5. Докажите, что существует натуральное число, которое можно представить в виде суммы квадратов двух натуральных чисел не менее чем 2021 способом. (*О. А. Пяйве*)

   Решение. Как известно, существует бесконечно много примитивных пифагоровых троек, то есть таких троек взаимно простых натуральных чисел (a, b, c), что $a^2 + b^2 = c^2$. Например, пусть a — произвольное нечётное число, $b = \dfrac{a^2-1}{2}$, $c = \dfrac{a^2+1}{2}$, тогда НОД$(b, c) = 1$ и $c^2 - b^2 = (c-b)(c+b) = 1 \cdot a^2 = a^2$.

   Возьмём 2021 такую тройку $(a_1, b_1, c_1), \ldots, (a_{2021}, b_{2021}, c_{2021})$. Пусть теперь $C = c_1 \cdot \ldots \cdot c_{2021}$, $k_i = \dfrac{C}{c_i}$. Тогда тройки $(k_1a_1, k_1b_1, k_1c_1) \ldots, (k_{2021}a_{2021}, k_{2021}b_{2021}, k_{2021}c_{2021})$ также являются пифагоровыми, то есть в каждой из них квадрат третьего числа («гипотенузы») равен сумме квадратов первых двух чисел («катетов»). Заметим, что «гипотенуза» во всех этих тройках совпадает. Докажем, что сами тройки различны: если какие-то две тройки совпадают, значит, до домножения на k_i они были пропорциональны, но тогда хотя бы одна из них — не примитивная.

   Критерии. Если решение в целом верное, но не доказано или не полностью доказано, что получающиеся разложения различны, то снимается 1–2 балла.

6. См. задачу 6 для 10 класса.

7. См. задачу 7 для 10 класса.