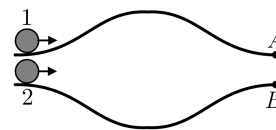




Решения задач для 8 класса

8.1. (2 балла) Два одинаковых коlobка катятся с одинаковыми скоростями по параллельным горизонтальным дорожкам. На пути первого коlobка — горка, на пути второго — ямка (см. рисунок). Высота горки и глубина ямки одинаковы. Оба коlobка преодолели препятствия и оказались в точках A и B соответственно.



[1] Сравните скорости коlobков в точках A и B :

A) $v_1 > v_2$,

B) $v_1 = v_2$,

C) $v_1 < v_2$.

[2] Сравните времена, затраченные коlobками на преодоления препятствий:

A) $t_1 > t_2$,

B) $t_1 = t_2$,

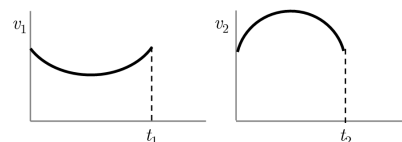
C) $t_1 < t_2$.

Проскальзывания при движении коlobков отсутствуют. В обоих вопросах в ответе укажите только **букву** правильного варианта. (С. А. Старовойтов)

Ответы: [1] B. [2] A.

Решение [1]. Скорость первого коlobка при движении по горке сначала уменьшается, затем увеличивается и в точке A становится равной начальной скорости. Скорость второго коlobка при движении по ямке сначала увеличивается, затем уменьшается и в точке B становится равной начальной скорости.

Из закона сохранения энергии понятно, что $v_1 = v_2$. Качественные зависимости скорости коlobков от времени при движении через преграды представлены на рисунках.



Решение [2]. Пути, пройденные коlobками одинаковы, значит, площади под кривыми одинаковы. Тогда $t_1 > t_2$.

Критерии. Каждый вопрос стоит 1 балл.

8.2. (3 балла) В три стеклянных стаканчика, осевые сечения которых представлены на рисунке, влили одинаковый объём воды так, что вода из стаканчиков не выливалась.



[3] Выберите из предложенных верный ответ для гидростатических давлений воды (p_1, p_2, p_3) на дно стаканчиков:

A) $p_1 = p_2 = p_3$,

B) $p_2 > p_1 > p_3$,

C) $p_3 > p_1 > p_2$.

[4] Выберите из предложенных верный ответ для величин сил давления (F_1, F_2, F_3) стаканчиков с водой на горизонтальную поверхность основания:

A) $F_1 = F_2 = F_3$,

B) $F_2 > F_1 > F_3$,

C) $F_3 > F_1 > F_2$.

Высота стаканчиков, диаметр основания и толщина стеклянных стенок одинаковы. Угол наклона боковых стенок больше 45° . В обоих вопросах в ответе укажите только **букву** правильного варианта. (С. А. Старовойтов)

Ответы: [3] C. [4] B.

Решение [3]. Гидростатическое давление $p = \rho gh$ зависит от высоты уровня жидкости, а она наибольшая в третьем стаканчике и наименьшая во втором.

Решение [4]. Для любого угла наклона площадь боковой поверхности у второго стакана больше, чем у первого и третьего. При указанных углах наклона стенок и малой величине отношения радиусов горлышка и основания у третьего стакана (как на рисунке) площадь боковой поверхности у третьего стакана меньше, чем у первого. Так как массы воды во всех стаканчиках одинаковы, то веса стаканчиков с водой будут больше для стаканчиков с большей массой боковых стенок. Таким образом, верным является ответ B.

Замечание. При малой высоте стаканов и, соответственно, большой величине отношения радиусов горлышка и основания у третьего стакана площадь боковой поверхности у третьего стакана больше, чем у первого. В этом случае было бы верным двойное неравенство $F_2 > F_3 > F_1$. Но такого неравенства в предложенных на выбор ответах нет. Поэтому, единственный возможный

вариант это ответ В.

Критерии. Вопрос [3] стоит 1 балл. Ответ «В» в вопросе [4] стоит 2 балла, ответ «А» стоит 1 балл.

8.3. (3 балла) Турист Николай Петрович опоздал на 5 минут к отплытию своего теплохода, отправившегося вниз по реке. На счастье хозяин быст-роходного катера согласился помочь Николаю Петровичу. Догнав теплоход и высадив незадачливого туриста, катер тут же отправился в обратный путь.



[5] Сколько времени прошло с момента отплытия катера до его возвращения? Ответ дайте в минутах.

Считайте, что скорость теплохода относительно воды в 3 раза больше скорости течения реки, а скорость катера — в 5 раз. (С. А. Старовойтов)

Ответ: 25 минут.

Решение. В момент, когда катер догонит теплоход, теплоход пройдёт расстояние вдоль течения реки:

$$S = S_0 + (v_T + v_P)t_1 = (v_T + v_P)(t_0 + t_1).$$

Такой же путь пройдёт и катер:

$$S = (v_K + v_P)t_1.$$

Здесь t_1 — время движения катера «туда», t_0 — время опоздания пассажира.

Приравняв пути и учитывая, что $v_K/v_P = 5$, $v_T/v_P = 3$, получим $t_1 = 2t_0$.

Путь катера обратно:

$$S = (v_K - v_P)t_2,$$

где t_2 — время движения катера обратно.

Приравняв пути катера туда и обратно, получим

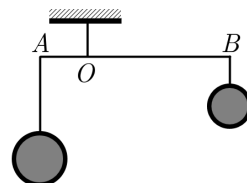
$$t_2 = 1,5t_1 = 3t_0.$$

Полное время движения катера туда и обратно

$$t = t_1 + t_2 = 5t_0 = 25 \text{ мин.}$$

8.4. (4 балла) Шарики, сделанные из разных материалов, уравновесили на рычаге. Объём шара слева в 1,25 раза больше объёма шара справа, а плечо AO в 2,5 раза меньше плеча OB .

[6] На сколько надо увеличить объём правого шара, чтоб при помещении всей системы в воду равновесие на нарушилось, если его плотность в два раза больше плотности воды? Ответ дайте в процентах, округлив до целых. (М. А. Кругина)



Ответ: 50%.

Решение. Условие равновесия в воздухе:

$$\rho_1 V_1 g l_1 = \rho_2 V_2 g l_2,$$

откуда находим

$$\rho_1 = 2\rho_2$$

(индекс «1» относится к левому шару, индекс «2» — к правому).

Условие равновесия в воде:

$$\rho_1 V_1 g l_1 - \rho_0 V_1 g l_1 = \rho_2 V_2^* g l_2 - \rho_0 V_2^* g l_2,$$

где ρ_0 — плотность воды, V_2^* — новый объём правого шара.

После нехитрых преобразований находим

$$V_2^* = 1,5V_2.$$

Следовательно, увеличение на 50%.

8.5. (2 балла) Мальчики (тройняшки) построили плот. Когда они забрались на плот все вместе, плот погрузился в воду полностью. А вот если кататься вдвоём, то плот погружается в воду на $\eta = 0,8$ своей толщины.

[7] Определите плотность дерева, из которого сделан плот. Ответ дайте в кг/м^3 , округлив до целых.



Замечание. Плотность воды — 1000 кг/м^3 , толщина пласта $h = 20 \text{ см}$.

(Т. В. Воробьева, С. А. Старовойтов)

Ответ: 400.

Решение. Запишем уравнения равновесия для 3 мальчиков и для 2 мальчиков:

$$\begin{cases} 3mg + Mg = \rho_0 g S h, \\ 2mg + Mg = \rho_0 g S \Delta h, \end{cases}$$

где m — масса каждого из мальчиков, M — масса пласта, S — площадь пласта, Δh — толщина части пласта, погруженной в воду, для случая 2 мальчиков. Вычтем из первого уравнения второе:

$$mg = \rho_0 g S (h - \Delta h),$$

и, подставив в первое, получим

$$Mg = \rho_0 g S (h - 3(h - \Delta h)).$$

Используя определение массы пласта через его плотность ρ , получим:

$$\rho = \rho_0 \left(1 - 3 \left(1 - \frac{\Delta h}{h} \right) \right) = \rho_0 (1 - 3(1 - \eta)) = 400 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

8.6. (3 балла) Открыв банку со сгущённой и съев половину, Славик подумал, что неплохо было бы сварить остаток. Опустив банку в кипящую воду, Славик заметил, что банка погрузилась в воду на $5/6$ своего объёма. Время шло, сгущёнка всё не темнела, и Славик съел ещё четверть банки. Теперь банка плавала, погрузившись наполовину.



[8] Сколько весила полная банка, если её объём равен 300 мл? Ответ дайте в килограммах с точностью до сотых.

Замечание. Считайте банку тонкостенной.

(Т. А. Андреева)

Ответ: 0,45.

Решение. Обозначим плотность сгущёнки — ρ_C , плотность воды — ρ_B , массу пустой банки — m , объём — V . Банка тонкостенная, значит внутренний и внешний объёмы практически одинаковы. С учётом того, что сначала было $1/2$ банки, а потом стало $1/4$, пишем закон Архимеда:

$$\begin{cases} mg + \frac{1}{2} \cdot \rho_C V g = \frac{5}{6} \cdot \rho_B V g, \\ mg + \frac{1}{4} \cdot \rho_C V g = \frac{1}{2} \cdot \rho_B V g. \end{cases}$$

Вычитаем из верхнего уравнения нижнее:

$$\frac{1}{4} \cdot \rho_C V g = \frac{1}{3} \cdot \rho_B V g.$$

Т.о., плотность сгущёнки равна

$$\rho_C = \frac{4}{3} \cdot \rho_B = 1330 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Из первого уравнения для закона Архимеда находим

$$m = \frac{5}{6} \cdot \rho_B V - \frac{1}{2} \cdot \rho_C V = \frac{1}{6} \cdot \rho_B V.$$

И масса полной банки равна

$$M = \rho_C V + \frac{1}{6} \cdot \rho_B V = 0,45 \text{ кг}.$$

Критерии. Округленный до десятых долей ответ «0,5» оценивается в 1 балл.

8.7. (2 балла) Три цилиндрических сообщающихся сосуда в виде буквы «Ш» наполнены растительным маслом плотностью 900 кг/м^3 и закрыты невесомыми тонкими поршнями. Сечение каждого из сосудов равно 60 см^2 . На поршень, закрывающий средний сосуд, кладут грузик массой 600 г.



[9] На какую высоту (по отношению к первоначальному уровню) поднимутся после этого поршни в крайних сосудах? Ответ дайте в миллиметрах, округлив до целых.

Замечание. Трением поршней о стенки сосудов пренебрегите.

(С. А. Старовойтов)

Ответ: 37.

Решение. Давление в среднем сосуде под поршнем равно $P_{\text{ср}} = mg/s$, где m — масса груза. В крайних поршнях на таком же уровне высоты давление $P_{\text{кр}} = \rho g(h + x)$, где h — расстояние, на которое опустится средний поршень, x — высота, на которую поднимутся крайние поршни. Из равенства давлений получим

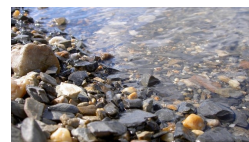
$$\frac{mg}{s} = \rho g(h + x).$$

Кроме того, жидкость, вытесненная из среднего сосуда, перетечёт в крайние. Следовательно, $h = 2x$. Подставляя в предыдущее равенство и выражая x , получим

$$x = \frac{m}{3\rho S} = 37 \text{ мм.}$$

Критерии. Неправильные ответы «36» и «74» оцениваются в 1 балл.

8.8. (4 балла) Мама привела малыша на берег реки. Солнце нагрело камни до 40°C , но вода в реке была холодной (18°C). Чтобы искупать малыша, мать набрала в ведро 5 л воды и стала греть её, опуская в ведро камни. Чтобы вода не выплёскивалась, она клала в ведро только один камень, ждала, пока температуры выровняются, вынимала камень и клала следующий.



[10] Какой будет температура воды, когда из неё достанут четвёртый камень?

[11] До какой температуры нагрелась бы вода, если все 4 камня можно было бы положить в ведро одновременно?

Оба ответа дайте в градусах Цельсия, округлив до целых (округляйте только окончательный результат). Масса каждого камня равна 2,8 кг, удельная теплоёмкость — $900 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{К}}$, удельная теплоёмкость воды — $4,2 \frac{\text{кДж}}{\text{кг}\cdot\text{К}}$.

(Т. А. Андреева)

Ответы: [10] 26°C . [11] 25°C .

Решение [10]. Определим температуру воды t_1 перед удалением первого камня:

$$\rho V c(t_1 - t_{\text{В}}) = m c_{\text{К}}(t_{\text{К}} - t_1) \Rightarrow t_1 = \frac{\rho V c t_{\text{В}} + m c_{\text{К}} t_{\text{К}}}{\rho V c + m c_{\text{К}}} = \frac{21 \cdot 18 + 100,8}{23,52} = 20,36^\circ\text{C},$$

где m — масса камня, V — объём воды, c — удельная теплоёмкость воды, $c_{\text{К}}$ — удельная теплоёмкость камня, $t_{\text{К}}$ — температура камня, ρ — плотность воды. Аналогично определим температуру воды перед удалением остальных камней:

$$2 \text{ камень: } \rho V c(t_2 - t_1) = m c_{\text{К}}(t_{\text{К}} - t_2) \Rightarrow t_2 = \frac{\rho V c t_1 + m c_{\text{К}} t_{\text{К}}}{\rho V c + m c_{\text{К}}} = \frac{21 \cdot 20,36 + 100,8}{23,52} = 22,46^\circ\text{C}.$$

$$3 \text{ камень: } \rho V c(t_3 - t_2) = m c_{\text{К}}(t_{\text{К}} - t_3) \Rightarrow t_3 = \frac{\rho V c t_2 + m c_{\text{К}} t_{\text{К}}}{\rho V c + m c_{\text{К}}} = \frac{21 \cdot 22,46 + 100,8}{23,52} = 24,34^\circ\text{C}.$$

$$4 \text{ камень: } \rho V c(t_4 - t_3) = m c_{\text{К}}(t_{\text{К}} - t_4) \Rightarrow t_4 = \frac{\rho V c t_3 + m c_{\text{К}} t_{\text{К}}}{\rho V c + m c_{\text{К}}} = \frac{21 \cdot 24,34 + 100,8}{23,52} \approx 26^\circ\text{C}.$$

Решение [11]. Определим температуру воды t_4^4 при опускании всех камней:

$$\rho V c(t_4^4 - t_{\text{В}}) = 4 m c_{\text{К}}(t_{\text{К}} - t_4^4) \Rightarrow t_4^4 = \frac{\rho V c t_{\text{В}} + 4 m c_{\text{К}} t_{\text{К}}}{\rho V c + 4 m c_{\text{К}}} = \frac{21 \cdot 18 + 4 \cdot 100,8}{31,08} \approx 25^\circ\text{C}.$$

Критерии. Правильный ответ на вопрос [10] стоит 3 балла, полученный в результате неправильных округлений ответ « 25°C » или « 27°C » оценивается в 1 балл. Вопрос [11] стоит 1 балл.

8.9. (3 балла) В котле паровоза вода с начальной температурой 20°C доводится до кипения, испаряется и в пароперегревателе нагревается до 300°C . Перегретый пар поступает в паровую машину, коэффициент полезного действия которой равен 30%.

[12] Чему равна мощность паровой машины, если расход воды равен $7,2 \text{ м}^3/\text{ч}$? Ответ дайте в МВт, округлив до целых.



Замечание. Удельная теплоёмкость воды — $4,2 \frac{\text{кДж}}{\text{кг}\cdot\text{К}}$, удельная теплота парообразования воды — $2,3 \text{ МДж/кг}$, средняя теплоёмкость водяного пара в диапазоне $100\text{--}300^\circ\text{C}$ равна $4,2 \frac{\text{кДж}}{\text{кг}\cdot\text{К}}$.

(Т. А. Андреева)

Ответ: 2.

Решение. По определению коэффициента полезного действия,

$$\eta = \frac{P_{\Pi}}{P_3}.$$

Вычислим «затраченную» мощность:

$$P_3 = \frac{Q_3}{t} = \frac{\rho V c(t_K - t_0) + \rho V r + \rho_{\Pi} V_{\Pi} c_{\Pi}(t_{\Pi} - t_K)}{t}.$$

Здесь c — удельная теплоёмкость воды, c_{Π} — удельная теплоёмкость пара, V — объём воды, ρ — плотность воды, t_K — температура кипения, t_{Π} — температура пара, V_{Π} — объём пара, ρ_{Π} — плотность пара.

Учитывая, что $V_{\Pi} \rho_{\Pi} = V \rho$, вычислим полезную мощность:

$$P_{\Pi} = \frac{\eta Q_3}{t} = \eta \rho \cdot \frac{V}{t} \cdot (c(t_K - t_0) + r + c_{\Pi}(t_{\Pi} - t_K)) = 2 \text{ МВт}.$$

Критерии. Округлённый до десятых долей ответ «2,1» оценивается в 2 балла.



Решения задач для 9 класса

9.1. (3 балла) Поезд, отправившийся с вокзала Кингс-Кросс, $1/8$ часть пути прошёл со скоростью $v_1 = 52$ км/ч. Средняя скорость поезда на всём пути оказалась равной $\langle v \rangle = 34$ км/ч.

[1] С какой постоянной скоростью поезд двигался на оставшейся части пути, если известно, что $1/10$ часть всего времени движения поезд стоял, пропуская экспресс из Хогвартса? Ответ дайте в км/ч, округлив до десятых. (Т. А. Андреева)

Ответ: 36,4.

Решение. Суммарное время пути складывается из времени движения со скоростью v_1 ожидания и движения со скоростью v_3 :

$$t = t_1 + \frac{t}{10} + t_3 = \frac{S}{8v_1} + \frac{t}{10} + \frac{7S}{8v_3} = \frac{10S}{72v_1} + \frac{70S}{72v_3}.$$

Из определения средней скорости:

$$\langle v \rangle = \frac{S}{t} = \frac{S}{\frac{10S}{72v_1} + \frac{70S}{72v_3}} = \frac{S}{\frac{S}{72} \cdot \left(\frac{10}{v_1} + \frac{70}{v_3} \right)} = \frac{72v_1v_3}{10v_3 + 70v_1},$$

$$v_3 = \frac{70\langle v \rangle v_1}{72v_1 - 10\langle v \rangle} = 36,4 \frac{\text{км}}{\text{ч}}.$$

Критерии. Ответ, округлённый до целых («36»), оценивается в 1 балл. Ответы с ошибкой в десятую долю, вызванной округлениями («36,3» и «36,5»), оцениваются в 2 балла. Правильный ответ, округлённый до сотых («36,36»), оценивается в полный балл.



9.2. (3 балла) Груз массой $M = 10$ кг поднимают, используя систему блоков, показанную на рисунке. К канату в течение 2 с прикладывали постоянную силу 50 Н, потом канат случайно отпустили и смогли поймать только спустя 4 с, после чего понадобилось ещё 5 с, чтобы, прикладывая ту же силу, всё-таки поднять груз на необходимую высоту.

[2] На какую высоту был поднят груз от его начального положения? Ответ дайте в метрах.

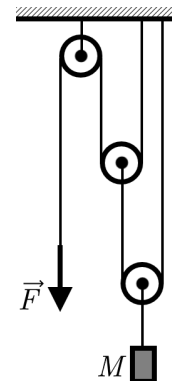
Замечание. Трением в блоках и сопротивлением воздуха пренебрегите, блоки считайте невесомыми, нити — лёгкими и нерастяжимыми, участки нитей, не лежащие на блоках — вертикальными. Ускорение свободного падения считайте равным 10 м/с^2 . (М. А. Крупина)

Ответ: 45.

Решение. Запишем уравнения движения тела и блоков, учитывая что их массы равны нулю и силы натяжения в каждой нити постоянны:

$$\begin{cases} Ma = T_1 - Mg, \\ T_1 = 2T_2, \\ T_2 = 2T_3, \\ T_3 = F \end{cases}$$

(здесь T_2 — сила натяжения в правой нити, T_3 — сила натяжения в левой нити). Преобразуем



и найдём ускорение:

$$Ma = 4F - Mg \Rightarrow a = 4 \cdot \frac{F}{M} - g = 4 \cdot \frac{50}{10} - 10 = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Определим высоту подъёма и скорость в конце первых двух секунд:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{at_1^2}{2} = \frac{10 \cdot 4}{2} = 20 \text{ м}, \\ v_1 = at_1 = 20 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \end{cases}$$

Определим высоту подъёма и скорость после следующих 4 секунд:

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + v_1 t_2 - \frac{gt_2^2}{2} = 20 + 20 \cdot 4 - \frac{10 \cdot 16}{2} = 20 \text{ м}, \\ v_2 = v_1 - gt_2 = 20 - 10 \cdot 4 = -20 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \end{cases}$$

Определим конечную высоту подъёма:

$$x_3 = x_2 + v_2 t_3 + \frac{at_3^2}{2} = 20 - 20 \cdot 5 + \frac{10 \cdot 25}{2} = 45 \text{ м}.$$

Критерии. Неверный ответ «44», вызванный ошибкой округления, оценивается в 2 балла.

9.3. (3 балла) Дети катаются на санках. Андрей тащит санки с Машей за верёвку под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту, а Петя толкает такие же санки с Дашей, направляя силу $F_2 = 140 \text{ Н}$ вниз под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту.

[3] Какую силу F_1 должен прикладывать Андрей, чтобы девочки двигались с одинаковым ускорением? Ответ дайте в Ньютонах, округлив до целых.

Масса Маши вместе с санками $m_1 = 40 \text{ кг}$, масса Даши вместе с санками $m_2 = 35 \text{ кг}$. Ускорение свободного падения считайте равным 10 м/с^2 . Коэффициент трения $\mu = 0,20$.

(М. А. Крупина, С. А. Старовойтов)

Ответ: 127.

Решение. Рассмотрим движение санок с Машей. Второй закон Ньютона в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси:

$$\begin{cases} F_1 \cos \alpha - F_{\text{тр}1} = m_1 a, \\ F_1 \sin \alpha + N_1 = m_1 g. \end{cases}$$

Кроме того, $F_{\text{тр}1} = \mu N_1$. Решая систему уравнений, получим

$$F_1 \cos \alpha - \mu m_1 g + \mu F_1 \sin \alpha = m_1 a. \quad (*)$$

Рассмотрим движение санок с Дашей:

$$\begin{cases} F_2 \cos \alpha - F_{\text{тр}2} = m_2 a, \\ F_2 \sin \alpha + N_2 = m_2 g, \\ F_{\text{тр}2} = \mu N_2. \end{cases}$$

Решая вторую систему, выразим ускорение:

$$a = \frac{F_2 \cos \alpha - \mu m_2 g - \mu F_2 \sin \alpha}{m_2}.$$

Подставим ускорение в формулу (*) и, после преобразований, получим

$$F_1 = F_2 \cdot \frac{m_1(\cos \alpha - \mu \sin \alpha)}{m_2(\cos \alpha + \mu \sin \alpha)} = 127 \text{ Н}.$$

Критерии. Неправильные ответы в диапазоне от 120 до 135 оцениваются в 1 балл; ответ «126» оценивается в 2 балла (жюри предполагает, что ошибки вызваны точностью вычислений тригонометрических функций).

9.4. (3 балла) Дед Мазай спасает 7 зайцев в весеннее половодье. Испуганные зайцы сидят на корме лодки, а дед Мазай стоит на носу. Длина лодки — 3,4 м, масса — 110 кг. Масса дедушки в тулупе — 90 кг.

Недалеко от берега лодка остановилась, Мазай и зайцы поменялись местами: дедушка оказался на корме, а зайцы на носу лодки. В результате лодка приблизилась к берегу на 1 м.



[4] Найдите среднюю массу зайца. Ответ дайте в килограммах, округлив до десятых.

(Т. А. Андреева)

Ответ: 3,4.

Решение. Центр масс системы «Лодка + Мазай + Зайцы» не смещается при передвижении Мазаия и зайцев по лодке. Найдём центр масс системы в обоих случаях относительно кормы лодки:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{M_{\text{Л}} \cdot \frac{l}{2} + M_{\text{М}}l}{M_{\text{Л}} + M_{\text{М}} + nm}, \\ x_2 = \frac{M_{\text{Л}} \cdot \frac{l}{2} + nml}{M_{\text{Л}} + M_{\text{М}} + nm}. \end{cases}$$

Здесь m — масса зайца, $M_{\text{Л}}$ — масса лодки, $M_{\text{М}}$ — масса Мазаия, l — длина лодки. Тогда смещение лодки равно

$$\Delta x = x_1 - x_2 = \frac{M_{\text{М}}l - nml}{M_{\text{Л}} + M_{\text{М}} + nm} \Rightarrow m = \frac{M_{\text{М}}l - \Delta x(M_{\text{М}} + M_{\text{Л}})}{n(l + \Delta x)} = 3,4 \text{ кг.}$$

Критерии. Ответы в диапазоне от 3 до 3,8 оцениваются в 1 балл; ответы в диапазоне 3,3 до 3,5 оцениваются в 2 балла (жюри предполагает, что ошибки вызваны точностью округлений).

9.5. (4 балла) Тонкостенный цилиндрический стакан, на $1/4$ наполненный кленовым сиропом, плавает в сосуде с водой, погрузившись до середины. Тот же стакан, но наполненный на $1/2$ водой, плавает в сосуде с сиропом, также погрузившись до середины.



[5] Какую часть стакана можно наполнить сиропом, чтобы он не утонул в воде?

[6] И какую часть стакана можно наполнить сиропом, чтобы он не утонул в сиропе?

Оба ответа дайте в виде десятичных дробей с округлением до тысячных.

(Т. А. Андреева)

Ответы: [5] 0,625. [6] 0,875.

Решение [5]. Выпишем условия равновесия для стакана массой m :

$$\text{для первого случая:} \quad mg + \frac{1}{4} \cdot \rho_s gV = \frac{1}{2} \cdot \rho gV, \quad (9.5.1)$$

$$\text{для второго случая:} \quad mg + \frac{1}{2} \cdot \rho gV = \frac{1}{2} \cdot \rho_s gV, \quad (9.5.2)$$

где V — объём стакана, g — ускорение свободного падения, ρ — плотность воды, ρ_s — плотность сиропа. Вычитая из первого уравнения второе, получаем

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} \cdot \rho_s gV &= \rho gV, \\ \rho_s &= \frac{4}{3} \cdot \rho, \end{aligned} \quad (9.5.3)$$

$$\rho_s = \frac{4}{3} \cdot \rho = 1333 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Подставляя (9.5.3) в (9.5.1) или (9.5.2), имеем

$$m = \frac{1}{6} \cdot \rho V = \frac{1}{8} \cdot \rho_s V.$$

Чтобы стакан с сиропом не утонул в воде, надо, чтобы

$$\begin{aligned}mg + x\rho_s gV &\leq \rho gV, \\ \frac{1}{6} \cdot \rho gV + x \cdot \frac{4}{3} \cdot \rho gV &\leq \rho gV, \\ x &\leq \frac{5}{8} = 0,625.\end{aligned}$$

Т.е. не более $5/8$ объёма стакана.

Решение [6]. Чтобы стакан с сиропом не утонул в сиропе, надо, чтобы

$$\begin{aligned}mg + x\rho_s gV &\leq \rho_s gV, \\ \frac{1}{8} \cdot \rho_s gV + x\rho_s gV &\leq \rho_s gV, \\ x &\leq \frac{7}{8} = 0,875.\end{aligned}$$

Т.е. не более $7/8$ объёма стакана.

Критерии. Оба вопроса стоят по 2 балла каждый. Ответы, округлённые до десятых или сотых (т.е. «0,6», «0,62» или «0,63» на вопрос [5] и «0,9», «0,87» и «0,88» на вопрос [6]), оцениваются в 1 балл.

9.6. (3 балла) Два спутника движутся по круговым орбитам в противоположных направлениях вокруг планеты Шелезяка с линейными скоростями $v_1 = 5$ км/с и $v_2 = 8$ км/с. Радиус планеты равен $R = 17,4$ тыс. км, ускорение свободного падения на её поверхности $g = 14$ м/с².



[7] Найдите интервал времени, через который спутники периодически сближаются друг с другом на минимальное расстояние. Результат выразите в часах, округлив до десятых.

(М. П. Коробков, Т. А. Андреева)

Ответ: 11,6.

Решение. Запишем соотношение между гравитационной силой и силой тяжести на поверхности планеты:

$$G \cdot \frac{mM}{R^2} = mg \Rightarrow gR^2 = GM.$$

Запишем уравнения движения спутников на орбитах:

$$\begin{aligned}G \cdot \frac{mM}{r_1^2} &= m \cdot \frac{v_1^2}{r_1} \Rightarrow r_1 = \frac{GM}{v_1^2} = \frac{gR^2}{v_1^2}, \\ G \cdot \frac{mM}{r_2^2} &= m \cdot \frac{v_2^2}{r_2} \Rightarrow r_2 = \frac{GM}{v_2^2} = \frac{gR^2}{v_2^2}.\end{aligned}$$

В момент наибольшего сближения (после предыдущего) спутники «на двоих» опишут угол 2π :

$$2\pi = \omega_1 t + \omega_2 t = \frac{v_1}{r_1} \cdot t + \frac{v_2}{r_2} \cdot t,$$

где ω_1 и ω_2 — угловые скорости спутников.

После подстановки и преобразований получим

$$t = \frac{2\pi g R^2}{v_1^3 + v_2^3} = 11,6 \text{ часа.}$$

Критерии. Ответ, округлённый до целого («12»), оценивается в 2 балла.

9.7. (4 балла) Рита и Маруся сварили 2 литра клюквенного морса. До прихода гостей оставалось совсем немного времени, а морс всё ещё был тёплым (40°C). Девочки хотели охладить его побыстрее с помощью 20 пластмассовых шариков со льдом (-20°C), но поспорили и разделили морс и шарики между собой поровну. Рита положила сразу все шарики в морс, а Маруся разлила морс в два одинаковых кувшина и положила шарики в один из них, подождала,



помешивая морс, пока температуры шариков и морса сравняются, и переложила их во второй кувшин. Когда температуры снова сравнялись, Маруся слила морс в один большой кувшин.

[8] Чей морс оказался в итоге холоднее? В ответе укажите **букву** Р, если у Риты, или М, если у Маруси.

[9] На сколько градусов морс оказался холоднее? Ответ округлите до целых.

Масса льда в одном шарике — 20 граммов.

Замечание. Удельная теплоёмкость воды (и морса) — $4,2 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{К}}$, удельная теплоёмкость льда — $2,0 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{К}}$, удельная теплота плавления льда — 340 кДж/кг . (Т. А. Андреева)

Ответы: [8] М. [9] 2.

Решение. Запишем уравнения теплового равновесия для манипуляций Риты:

$$\rho \cdot \frac{V}{2} \cdot c (t_1 - t_2^{\text{Рита}}) = \frac{N}{2} \cdot mc_{\text{л}}(0 - t_{\text{л}}) + \frac{N}{2} \cdot m\lambda + \frac{N}{2} \cdot mc (t_2^{\text{Рита}} - 0),$$

где c — удельная теплоёмкость воды, ρ — плотность воды, V — объём воды, m — масса шарика льда, N — количество шариков, $t_{\text{л}}$ — начальная температура льда, λ — удельная теплота плавления льда, t_1 — начальная температура морса, $c_{\text{л}}$ — удельная теплоёмкость льда.

Тогда

$$t_2^{\text{Рита}} = \frac{\rho V c t_1 - N m (c_{\text{л}}(0 - t_{\text{л}}) + \lambda)}{\rho V c + N m c} = \frac{184}{10,08} \approx 18^\circ\text{C}.$$

Аналогично напишем уравнения теплового равновесия для манипуляций Маруси. Для первого кувшина:

$$\rho \cdot \frac{V}{4} \cdot c (t_1 - t_2^1) = \frac{N}{2} \cdot mc_{\text{л}}(0 - t_{\text{л}}) + \frac{N}{2} \cdot m\lambda + \frac{N}{2} \cdot mc (t_2^1 - 0),$$
$$t_2^1 = \frac{\rho \cdot \frac{V}{2} \cdot c t_1 - N m (c_{\text{л}}(0 - t_{\text{л}}) + \lambda)}{\rho \cdot \frac{V}{2} \cdot c + N m c} = \frac{16}{5,88} = 2,72^\circ\text{C}.$$

Для второго кувшина:

$$\rho \cdot \frac{V}{4} \cdot c (t_1 - t_2^2) = \frac{N}{2} \cdot mc (t_2^2 - t_2^1) \Rightarrow t_2^2 = \frac{\rho \cdot \frac{V}{2} \cdot t_1 + N m t_2^1}{\rho \cdot \frac{V}{2} + N m} = \frac{41,09}{1,4} = 29,35^\circ\text{C}.$$

для третьего кувшина

$$\rho \cdot \frac{V}{4} \cdot c (t_2^2 - t_2^{\text{Маруся}}) = \rho \cdot \frac{V}{4} \cdot c (t_2^{\text{Маруся}} - t_2^1) \Rightarrow t_2^{\text{Маруся}} = \frac{t_2^1 + t_2^2}{2} \approx 16^\circ\text{C}.$$

Таким образом, у Маруси морс окажется холоднее на $18 - 16 = 2^\circ\text{C}$.

Критерии. Оба вопроса стоят по 2 балла каждый. Ответ на вопрос [9], округлённый не до целого (например, «2,1»), оценивается в полный балл.

9.8. (2 балла) В котле паровоза вода с начальной температурой 20°C доводится до кипения, испаряется и в пароперегревателе нагревается до 300°C . Перегретый пар поступает в паровую машину, коэффициент полезного действия которой равен 30%.

[10] Чему равна мощность паровой машины, если расход воды равен $7,2 \text{ м}^3/\text{ч}$? Ответ дайте в МВт, округлив до целых.

Замечание. Удельная теплоёмкость воды — $4,2 \frac{\text{кДж}}{\text{кг}\cdot\text{К}}$, удельная теплота парообразования воды — $2,3 \text{ МДж/кг}$, средняя теплоёмкость водяного пара в диапазоне $100\text{--}300^\circ\text{C}$ равна $4,2 \frac{\text{кДж}}{\text{кг}\cdot\text{К}}$. (Т. А. Андреева)

Ответ: 2.

Решение. По определению коэффициента полезного действия,

$$\eta = \frac{P_{\text{П}}}{P_3}.$$

Вычислим «затраченную» мощность:

$$P_3 = \frac{Q_3}{t} = \frac{\rho V c(t_K - t_0) + \rho V r + \rho_{\Pi} V_{\Pi} c_{\Pi}(t_{\Pi} - t_K)}{t}.$$

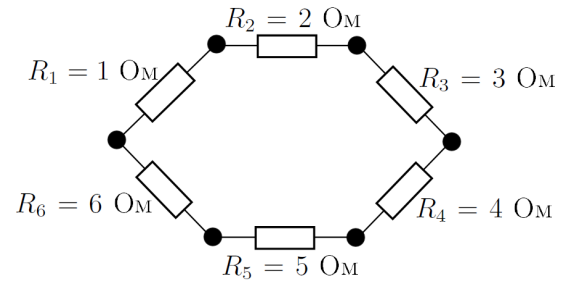
Здесь c — удельная теплоёмкость воды, c_{Π} — удельная теплоёмкость пара, V — объём воды, ρ — плотность воды, t_K — температура кипения, t_{Π} — температура пара, V_{Π} — объём пара, ρ_{Π} — плотность пара.

Учитывая, что $V_{\Pi}\rho_{\Pi} = V\rho$, вычислим полезную мощность:

$$P_{\Pi} = \frac{\eta Q_3}{t} = \eta \rho \cdot \frac{V}{t} \cdot (c(t_K - t_0) + r + c_{\Pi}(t_{\Pi} - t_K)) = 2 \text{ МВт}.$$

Критерии. Округлённый до десятых долей ответ «2,1» оценивается в 2 балла.

9.9. (3 балла) Шесть резисторов сопротивлениями $R_1 = 1 \text{ Ом}$, $R_2 = 2 \text{ Ом}$, $R_3 = 3 \text{ Ом}$, $R_4 = 4 \text{ Ом}$, $R_5 = 5 \text{ Ом}$ и $R_6 = 6 \text{ Ом}$ соединены последовательно и замкнуты кольцом. К двум контактам получившейся цепи (чёрные точки на рисунке) подключили источник постоянного напряжения так, что сопротивление цепи между этими контактами **максимально**. Напряжение источника $U = 36 \text{ В}$.



[11] Найдите мощность P_3 , выделяющуюся на резисторе R_3 . Ответ приведите в Вт, округлив до целых. (С. А. Старовойтов)

Ответ: 39.

Решение. Между любой парой контактов имеем две параллельные ветви резисторов. Сопротивление такой схемы

$$R_{\text{общ}} = \frac{R_I R_{II}}{R_I + R_{II}}.$$

При любом подключении сумма сопротивлений обеих ветвей одинакова (21 Ом). Произведение максимально для случая $10 \cdot 11 = 110$. Поэтому сопротивление всей схемы максимально при подключении к такой паре контактов, когда в одной ветви стоят последовательно резисторы $1 \text{ Ом} + 2 \text{ Ом} + 3 \text{ Ом} + 4 \text{ Ом} = 10 \text{ Ом}$, а в другой ветви — резисторы $5 \text{ Ом} + 6 \text{ Ом} = 11 \text{ Ом}$.

Ток в первой ветви:

$$I_{1234} = \frac{U}{R_{1234}} = \frac{36}{10} = 3,6 \text{ А}.$$

Мощность, выделяющаяся на третьем резисторе:

$$P_3 = I_{1234}^2 R_3 = 3,6^2 \cdot 3 = 38,88 \approx 39 \text{ Вт}.$$

Критерии. Неокруглённый ответ (например, «38,88») оценивается в полный балл.



Решения задач для 10 класса

10.1. (3 балла) Из открывшихся первой и последней дверей прибывшего на станцию поезда вышли Шерлок Холмс и профессор Мориарти и направились навстречу друг другу с постоянной скоростью. После завершения посадки пассажиров поезд начал двигаться с постоянным ускорением 1 м/с^2 и через 12 с последний вагон проехал мимо профессора Мориарти, а ещё через 2 с — мимо Шерлока Холмса. Длина поезда и платформы равны 172 м.



- [1] На каком расстоянии друг от друга находились Шерлок Холмс и профессор Мориарти в момент, когда последний вагон поезда покинул станцию? Ответ дайте в метрах, округлив до целых. (Т. А. Андреева)

Ответ: 15.

Решение. Если τ — время стоянки поезда, L — длина поезда, а v — скорость Холмса и Мориарти, то уравнения, описывающие их встречу с последним вагоном, имеют вид:

$$\begin{cases} \frac{at_1^2}{2} = v(t_1 + \tau), \\ \frac{a(t_1 + t_2)^2}{2} = L - v(t_1 + t_2 + \tau). \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $v = 1 \text{ м/с}$ и $\tau = 60 \text{ с}$.

Время, за которое последний вагон поезда покинул станцию, равно

$$t_3 = \sqrt{\frac{2L}{a}} = 18,6 \text{ с}.$$

Расстояние к этому моменту между Холмсом и Мориарти равно $S = L - 2v(t_3 + \tau) \approx 15 \text{ м}$.

10.2. (2 балла) Клифф-дайвер прыгнул в воду с 29-метровой скалы. Когда он пролетел первые 10 м, с уступа скалы в воду упал зритель.

- [2] На какой высоте находится уступ, если спортсмен и зритель коснулись воды одновременно? Ответ дайте в метрах, округлив до целых.

Замечание. Клифф-дайвинг — это прыжки в воду с естественных вышек — например, скал. Считайте, что начальная скорость прыгуна равна нулю. Ускорение свободного падения считайте равным 10 м/с^2 . Сопротивлением воздуха пренебрегите. (Т. А. Андреева)

Ответ: 5.

Решение. Высота скалы $H_1 = gt_1^2/2$, где t_1 — время всего полёта дайвера:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2H_1}{g}} = 2,4 \text{ с}.$$

Первые 10 метров полёта дайвера $\Delta H = g\Delta t^2/2$, что произошло за время

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2\Delta H}{g}} = 1,4 \text{ с}.$$

Время падения зрителя $t_2 = t_1 - \Delta t = 1 \text{ с}$, тогда высота уступа

$$H_2 = \frac{gt_2^2}{2} = 5 \text{ м}.$$

10.3. (3 балла) Груз массой $M = 10$ кг поднимают, используя систему блоков, показанную на рисунке. К канату в течение 2 с прикладывали постоянную силу 50 Н, потом канат случайно отпустили и смогли поймать только спустя 4 с, после чего понадобилось ещё 5 с, чтобы, прикладывая ту же силу, всё-таки поднять груз на необходимую высоту.

[3] На какую высоту был поднят груз от его начального положения? Ответ дайте в метрах.

Замечание. Трением в блоках и сопротивлением воздуха пренебрегите, блоки считайте невесомыми, нити — лёгкими и нерастяжимыми, участки нитей, не лежащие на блоках — вертикальными. Ускорение свободного падения считайте равным 10 м/с^2 .
(М. А. Крупина)

Ответ: 45.

Решение. Запишем уравнения движения тела и блоков, учитывая что их массы равны нулю и силы натяжения в каждой нити постоянны:

$$\begin{cases} Ma = T_1 - Mg, \\ T_1 = 2T_2, \\ T_2 = 2T_3, \\ T_3 = F \end{cases}$$

(здесь T_2 — сила натяжения в правой нити, T_3 — сила натяжения в левой нити). Преобразуем и найдём ускорение:

$$Ma = 4F - Mg \Rightarrow a = 4 \cdot \frac{F}{M} - g = 4 \cdot \frac{50}{10} - 10 = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Определим высоту подъёма и скорость в конце первых двух секунд:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{at_1^2}{2} = \frac{10 \cdot 4}{2} = 20 \text{ м}, \\ v_1 = at_1 = 20 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \end{cases}$$

Определим высоту подъёма и скорость после следующих 4 секунд:

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + v_1 t_2 - \frac{gt_2^2}{2} = 20 + 20 \cdot 4 - \frac{10 \cdot 16}{2} = 20 \text{ м}, \\ v_2 = v_1 - gt_2 = 20 - 10 \cdot 4 = -20 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \end{cases}$$

Определим конечную высоту подъёма:

$$x_3 = x_2 + v_2 t_3 + \frac{at_3^2}{2} = 20 - 20 \cdot 5 + \frac{10 \cdot 25}{2} = 45 \text{ м}.$$

10.4. (2 балла) Дети катаются на санках. Андрей тащит санки с Машей за верёвку под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту, а Петя толкает такие же санки с Дашей, направляя силу $F_2 = 140$ Н вниз под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту.

[4] Какую силу F_1 должен прикладывать Андрей, чтобы девочки двигались с одинаковым ускорением? Ответ дайте в Ньютонах, округлив до целых.

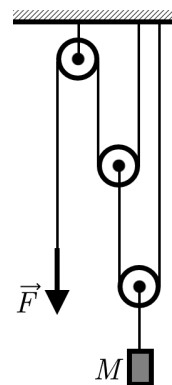
Масса Маши вместе с санками $m_1 = 40$ кг, масса Даши вместе с санками $m_2 = 35$ кг. Ускорение свободного падения считайте равным 10 м/с^2 . Коэффициент трения $\mu = 0,20$.

(М. А. Крупина, С. А. Старовойтов)

Ответ: 127.

Решение. Рассмотрим движение санок с Машей. Второй закон Ньютона в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси:

$$\begin{cases} F_1 \cos \alpha - F_{\text{тр}1} = m_1 a, \\ F_1 \sin \alpha + N_1 = m_1 g. \end{cases}$$



Кроме того, $F_{\text{тр}1} = \mu N_1$. Решая систему уравнений, получим

$$F_1 \cos \alpha - \mu m_1 g + \mu F_1 \sin \alpha = m_1 a. \quad (*)$$

Рассмотрим движение санок с Дашей:

$$\begin{cases} F_2 \cos \alpha - F_{\text{тр}2} = m_2 a, \\ F_1 \sin \alpha + m_1 g = N_2, \\ F_{\text{тр}2} = \mu N_2. \end{cases}$$

Решая вторую систему, выразим ускорение:

$$a = \frac{F_2 \cos \alpha - \mu m_2 g - \mu F_2 \sin \alpha}{m_2}.$$

Подставим ускорение в формулу (*) и, после преобразований, получим

$$F_1 = F_2 \cdot \frac{m_1(\cos \alpha - \mu \sin \alpha)}{m_2(\cos \alpha + \mu \sin \alpha)} = 127 \text{ Н.}$$

Критерии. Неправильные ответы в диапазоне от 124 до 130 оцениваются в 1 балл (жюри предполагает, что ошибки вызваны точностью вычислений тригонометрических функций).

10.5. (3 балла) Стекланный тонкостенный стакан плавает в сосуде с водой. В него медленно вливают сироп, пока стакан не погрузится в воду ровно до середины. Сиропом при этом оказывается заполнена четверть стакана. Второй такой же стакан, заполненный до половины водой, плавает в сиропе, погрузившись до середины.

[5] Какая часть второго стакана будет погружена в сироп, если в него вылить содержимое первого стакана? Ответ дайте в виде десятичной дроби с точностью до сотых.

(Т. А. Андреева)

Ответ: 0,75.

Решение. Запишем уравнение равновесия для 1 стакана:

$$mg + \rho g \cdot \frac{V}{4} = \rho_0 g \cdot \frac{V}{2}, \quad (10.5.1)$$

где m — масса пустого стакана, V — объём стакана, ρ — плотность сиропа, ρ_0 — плотность воды. Запишем уравнение равновесия для 2 стакана:

$$mg + \rho_0 g \cdot \frac{V}{2} = \rho g \cdot \frac{V}{2}. \quad (10.5.2)$$

Решая совместно (10.5.1) и (10.5.2), находим

$$m = \frac{\rho_0 V}{6}, \quad \rho = \frac{4}{3} \cdot \rho_0.$$

Выливаем сироп в стакан с водой:

$$mg + \rho_0 g \cdot \frac{V}{2} + \rho g \cdot \frac{V}{4} = \rho g x V,$$

где x — погружённая доля стакана. После подстановки массы и плотности, получаем $x = 3/4 = 0,75$.

Критерии. Неверный ответ «0,73», полученный в результате неправильных округлений, стоит 1 балл.

10.6. (3 балла) Два спутника движутся по круговым орбитам в противоположных направлениях вокруг планеты Шелезяка с линейными скоростями $v_1 = 5$ км/с и $v_2 = 8$ км/с. Радиус планеты равен $R = 17,4$ тыс. км, ускорение свободного падения на её поверхности $g = 14$ м/с².



[6] Найдите интервал времени, через который спутники периодически сближаются друг с другом на минимальное расстояние. Результат выразите в часах, округлив до десятых.

(М. П. Коробков, Т. А. Андреева)

Ответ: 11,6.

Решение. Запишем соотношение между гравитационной силой и силой тяжести на поверхности

планеты:

$$G \cdot \frac{mM}{R^2} = mg \Rightarrow gR^2 = GM.$$

Запишем уравнения движения спутников на орбитах:

$$G \cdot \frac{mM}{r_1^2} = m \cdot \frac{v_1^2}{r_1} \Rightarrow r_1 = \frac{GM}{v_1^2} = \frac{gR^2}{v_1^2},$$

$$G \cdot \frac{mM}{r_2^2} = m \cdot \frac{v_2^2}{r_2} \Rightarrow r_2 = \frac{GM}{v_2^2} = \frac{gR^2}{v_2^2}.$$

В момент наибольшего сближения (после предыдущего) спутники «на двоих» опишут угол 2π :

$$2\pi = \omega_1 t + \omega_2 t = \frac{v_1}{r_1} \cdot t + \frac{v_2}{r_2} \cdot t,$$

где ω_1 и ω_2 — угловые скорости спутников.

После подстановки и преобразований получим

$$t = \frac{2\pi g R^2}{v_1^3 + v_2^3} = 11,6 \text{ часа.}$$

10.7. (3 балла) На рисунке приведён цикл, проводимый с одноатомным идеальным газом. Известно, что КПД цикла Карно, проводимого в том же диапазоне температур, равен 64%, а при изобарном расширении объём газа увеличивается в 2 раза.

[7] Определите КПД цикла. Ответ приведите в процентах с точностью до десятых.

(С. А. Старовойтов)

Ответ: 4,8.

Решение. Из формулы для КПД цикла Карно определим отношение температур:

$$\eta_K = 1 - \frac{T_1}{T_3} \Rightarrow 1 - \eta_K = \frac{T_1}{T_3} = 0,36,$$

где T_1 и T_3 — температуры в точках 1 и 3.

Полезная работа, полученная в цикле, равна площади внутри цикла, то есть площади треугольника:

$$A_{\text{ц}} = \frac{1}{2} \cdot V_1(P_2 - P_1) = \frac{\nu R}{2} \left(\frac{T_3}{2} - T_1 \right).$$

Здесь учтены уравнения состояния в точках 1 и 3 и отношения объёмов в этих точках.

Вычислим работу при изобарном процессе:

$$A_{23} = P_2(V_3 - V_1) = P_2 V_1 = \frac{1}{2} \cdot P_3 V_3 = \frac{1}{2} \cdot \nu R T_3.$$

Здесь учтены уравнение состояния в точке 3 и отношения объёмов в точках 1 и 3.

Вычислим суммарное изменение внутренней энергии одноатомного газа в изохорном и изобарном процессах:

$$\Delta U_{13} = \frac{3}{2} \cdot \nu R(T_3 - T_1).$$

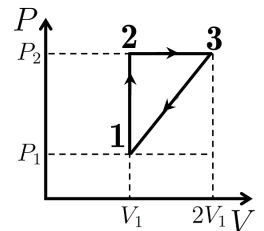
Определим суммарное количество теплоты, подведённое в изохорном и изобарном процессах:

$$Q_H = A_{23} + \Delta U_{13} = \frac{1}{2} \cdot \nu R(4T_3 - 3T_1),$$

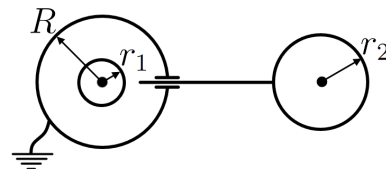
и вычислим искомый КПД:

$$\eta = \frac{A_{\text{ц}}}{Q_H} = \frac{\frac{\nu R}{2} \left(\frac{T_3}{2} - T_1 \right)}{\frac{\nu R}{2} (4T_3 - 3T_1)} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{T_1}{T_3}}{4 - 3 \cdot \frac{T_1}{T_3}} = \frac{0,5 - 0,36}{4 - 1,08} = 0,048.$$

Критерии. Неверный ответ «4,7», полученный в результате неправильных округлений, стоит 1 балл.



10.8. (4 балла) Двум металлическим шарам радиусами $r_1 = 10$ см и $r_2 = 20$ см сообщили заряды $q_1 = 0,6$ мкКл и $q_2 = 1,5$ мкКл, а потом соединили их тонким проводом. После этого шар радиусом r_1 помещают внутрь металлической сферы радиусом $R = 3r_1$, и эту сферу заземляют.



[8] Какой заряд пройдёт по соединительному проводу при заземлении сферы? Ответ дайте в мкКл, округлив до десятых.

Замечание. Расстояние между центрами шаров много больше их радиусов. (М. А. Крупина)

Ответ: 0,2.

Решение. После соединения шаров сумма электрических зарядов не изменится:

$$q_1 + q_2 = q'_1 + q'_2. \quad (*)$$

Потенциалы соединённых шаров равны:

$$\frac{kq'_1}{r_1} = \frac{kq'_2}{r_2} \Rightarrow q'_1 = q'_2 \cdot \frac{r_1}{r_2}.$$

Учитывая равенство сумм (*), получим величины зарядов после соединения:

$$q_1 + q_2 = q'_2 \cdot \left(\frac{r_1}{r_2} + 1 \right) = q'_2 \cdot \frac{r_1 + r_2}{r_2} \Rightarrow \begin{cases} q'_2 = (q_1 + q_2) \cdot \frac{r_2}{r_1 + r_2}, \\ q'_1 = (q_1 + q_2) \cdot \frac{r_1}{r_1 + r_2}. \end{cases}$$

После заземления поверхность сферы является поверхностью нулевого потенциала:

$$\frac{kQ}{3r_1} + \frac{kq''_1}{3r_1} = 0 \Rightarrow q''_1 = -Q.$$

Чтобы ток не тёк по проводу, потенциал системы из сферы и первого шара и потенциал второго шара должны быть равны:

$$\frac{kq''_1}{r_1} + \frac{kQ}{3r_1} = \varphi' = \frac{kq''_2}{r_2}.$$

Решая, получим новую связь между зарядами шаров:

$$\frac{kq''_1}{r_1} - \frac{kq''_1}{3r_1} = \frac{kq''_2}{r_2} \Rightarrow q''_2 = \frac{2}{3} \cdot q''_1 \cdot \frac{r_2}{r_1}.$$

Так как сумма зарядов не изменилась (по аналогии с (*)), получим конечное значение заряда первого шара:

$$q_1 + q_2 = q''_1 + q''_2 = q''_1 \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{r_2}{r_1} \right) \Rightarrow q''_1 = \frac{q_1 + q_2}{1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{r_2}{r_1}}.$$

Вычислим изменение заряда первого шара, равное заряду, который пройдёт по соединительному проводу:

$$\begin{aligned} \Delta q = |q'_1 - q''_1| &= \left| \frac{q_1 + q_2}{r_1 + r_2} \cdot r_1 - \frac{q_1 + q_2}{3r_1 + 2r_2} \cdot 3r_1 \right| = r_1(q_1 + q_2) \left| \frac{1}{r_1 + r_2} - \frac{3}{3r_1 + 2r_2} \right| = \\ &= \frac{r_1 r_2 (q_1 + q_2)}{(r_1 + r_2)(3r_1 + 2r_2)} = \frac{0,1 \cdot 0,2 \cdot 2,1 \cdot 10^{-6}}{0,3 \cdot 0,7} = 0,2 \text{ мкКл.} \end{aligned}$$

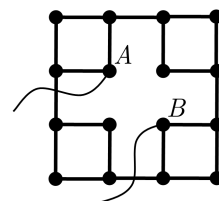
10.9. (3 балла) Электрическая цепь состоит из одинаковых проводников сопротивлением $R = 10$ Ом, образующих сетку (см. рисунок). К узлам A и B подключён омметр.

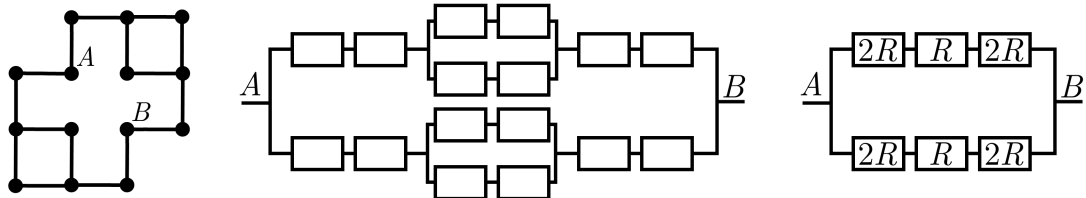
[9] Определите его показания. Ответ дайте в Омах с точностью до целых.

(М. П. Коробков, Т. А. Андреева)

Ответ: 25.

Решение. Построим последовательность эквивалентных схем:





В итоге получим $R_{\text{общ}} = 2,5R = 25 \text{ Ом}$.



Решения задач для 11 класса

11.1. (3 балла) Из открывшихся первой и последней дверей прибывшего на станцию поезда вышли Шерлок Холмс и профессор Мориарти и направились навстречу друг другу с постоянной скоростью. После завершения посадки пассажиров поезд начал двигаться с постоянным ускорением 1 м/с^2 и через 12 с последний вагон проехал мимо профессора Мориарти, а ещё через 2 с — мимо Шерлока Холмса. Длина поезда и платформы равны 172 м .



[1] На каком расстоянии друг от друга находились Шерлок Холмс и профессор Мориарти в момент, когда последний вагон поезда покинул станцию? Ответ дайте в метрах, округлив до целых.
(Т. А. Андреева)

Ответ: 15.

Решение. Если τ — время стоянки поезда, L — длина поезда, а v — скорость Холмса и Мориарти, то уравнения, описывающие их встречу с последним вагоном, имеют вид:

$$\begin{cases} \frac{at_1^2}{2} = v(t_1 + \tau), \\ \frac{a(t_1 + t_2)^2}{2} = L - v(t_1 + t_2 + \tau). \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $v = 1 \text{ м/с}$ и $\tau = 60 \text{ с}$.

Время, за которое последний вагон поезда покинул станцию, равно

$$t_3 = \sqrt{\frac{2L}{a}} = 18,6 \text{ с}.$$

Расстояние к этому моменту между Холмсом и Мориарти равно $S = L - 2v(t_3 + \tau) \approx 15 \text{ м}$.

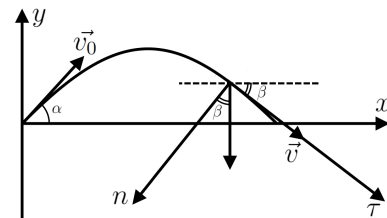
11.2. (3 балла) Спортсмен-толкатель ядра, стоя на горизонтальной поверхности, толкнул ядро со скоростью 12 м/с под углом 30° к горизонту.

[2] Чему будет равен радиус кривизны траектории ядра через 1 с после броска? Ответ приведите в метрах с точностью до десятых.

Замечание. Ускорение свободного падения считайте равным 10 м/с^2 . Сопротивлением воздуха пренебрегите.
(М. А. Крупина)

Ответ: 13,3.

Решение. Рассмотрим точку траектории, в которой тело находится в момент времени $t = 1 \text{ с}$ (см. рис.). Скорость направлена по касательной к траектории. Центр кривизны находится на перпендикуляре к вектору скорости. Угол между перпендикуляром и вертикалью (направление вектора $\vec{g}$) обозначим β .



В любой точке криволинейной траектории мы можем записать выражение для центростремительного ускорения как при движении по окружности с радиусом, равным мгновенному радиусу кривизны R :

$$a_n = \frac{v^2}{R} \Rightarrow R = \frac{v^2}{a_n}. \quad (*)$$

Спроектируем вектор $\vec{g}$ на нормаль к траектории:

$$a_n = g \cos \beta.$$

Из рисунка видно, что

$$\cos \beta = \frac{v_x}{v}.$$

Запишем проекции скорости тела, брошенного под углом к горизонту:

$$v_x = v_0 \cos \alpha, \quad v_y = v_0 \sin \alpha - gt.$$

Тогда для любого момента времени модуль скорости будет равен

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 \cos^2 \alpha + (v_0 \sin \alpha - gt)^2} = \sqrt{v_0^2 - 2gtv_0 \sin \alpha + g^2 t^2}.$$

Подставим в (*) и преобразуем, используя выражение для горизонтальной составляющей скорости в рассматриваемой точке и её сохранение в процессе движения:

$$R = \frac{v^2}{g \cos \beta} = \frac{v^2 \cdot v}{gv_x} = \frac{v^3}{gv_0 \cos \alpha} = \frac{(v_0^2 - 2gtv_0 \sin \alpha + g^2 t^2)^{3/2}}{gv_0 \cos \alpha} =$$

$$= \frac{\left(144 - 2 \cdot 12 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 1 + 100\right)^{3/2}}{10 \cdot 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = 13,3 \text{ м.}$$

Критерии. Неверный ответ «13,2», полученный в результате неправильных округлений, стоит 1 балл.

11.3. (2 балла) На краях открытой сцены на расстоянии 6 м установлены две акустические системы. Из-за ошибки звукооператора они «загудели». Зритель, находившийся напротив центра сцены на расстоянии 20 м от неё, обнаружил, что если он смещается из своего начального положения влево или вправо на 2 м, то громкость звука оказывается наименьшей.



[3] На какой частоте «гудели» акустические системы? Ответ приведите в Гц с точностью до целых.

Скорость звука в воздухе была равна 345 м/с.

(Т. А. Андреева)

Ответ: 292.

Решение. В соответствии с рисунком определим расстояния от акустических систем до зрителя в смещённом положении:

$$S_1 = \sqrt{L^2 + \left(\frac{d}{2} - x\right)^2}, \quad S_2 = \sqrt{L^2 + \left(\frac{d}{2} + x\right)^2}.$$

Условие интерференционного минимума:

$$\Delta S = \frac{\lambda}{2} = \frac{v}{2f}.$$

Тогда

$$f = \frac{v}{2\Delta S} = \frac{v}{2 \left(\sqrt{L^2 + \left(\frac{d}{2} + x\right)^2} - \sqrt{L^2 + \left(\frac{d}{2} - x\right)^2} \right)} = 292 \text{ Гц.}$$

Критерии. Неверные ответы в диапазоне от 288 до 294 оцениваются в 1 балл (жюри предполагает, что ошибки вызваны точностью вычислений).

11.4. (3 балла) На рисунке приведён цикл, проводимый с одноатомным идеальным газом. Известно, что КПД цикла Карно, проводимого в том же диапазоне температур, равен 64%, в изохорном процессе давление газа уменьшается в 2 раза.

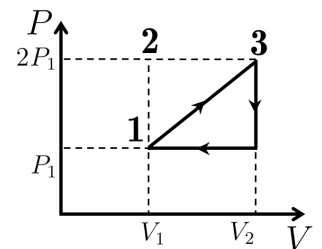
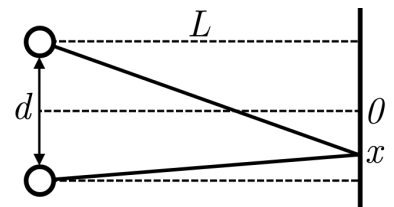
[4] Определите КПД цикла. Ответ приведите в процентах с точностью до десятых.

(С. А. Старовойтов)

Ответ: 6,0.

Решение. Из формулы для КПД цикла Карно определим отношение температур:

$$\eta_K = 1 - \frac{T_1}{T_2} \Rightarrow 1 - \eta_K = \frac{T_1}{T_2} = 0,36,$$



где T_1 и T_2 — температуры в точках 1 и 2.

Полезная работа, полученная в цикле, равна площади внутри цикла, то есть площади треугольника:

$$A_{\text{ц}} = \frac{1}{2} \cdot P_1(V_2 - V_1) = \frac{\nu R}{2} \left(\frac{T_2}{2} - T_1 \right).$$

Здесь учтены уравнения состояния в точках 1 и 2 и отношение давлений в этих точках.

Вычислим работу в процессе $1 \rightarrow 2$ как площадь трапеции и используем уравнения состояния в точках 1 и 2:

$$A_{12} = \frac{1}{2} \cdot 3P_1(V_2 - V_1) = \frac{3}{2} \cdot \nu R \left(\frac{T_2}{2} - T_1 \right).$$

Вычислим изменение внутренней энергии в процессе $1 \rightarrow 2$:

$$\Delta U_{12} = \frac{3}{2} \cdot \nu R(T_2 - T_1).$$

Определим суммарное количество теплоты, подведённое в процессе $1 \rightarrow 2$:

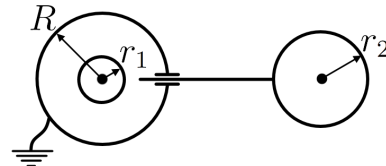
$$Q_{\text{н}} = A_{12} + \Delta U_{12} = \frac{3}{2} \cdot \nu R \left(\frac{3}{2} \cdot T_2 - 2T_1 \right),$$

и вычислим искомый КПД:

$$\eta = \frac{A_{\text{ц}}}{Q_{\text{н}}} = \frac{\frac{\nu R}{2} \left(\frac{T_2}{2} - T_1 \right)}{\frac{3}{2} \cdot \nu R \left(\frac{3}{2} \cdot T_2 - 2T_1 \right)} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{T_1}{T_2}}{3 \left(\frac{3}{2} - \frac{2T_1}{T_2} \right)} = \frac{0,5 - 0,36}{4,5 - 2,16} = 0,060.$$

Критерии. Неверный ответ «5,9», полученный в результате неправильных округлений, стоит 1 балл.

11.5. (4 балла) Двум металлическим шарам радиусами $r_1 = 10$ см и $r_2 = 20$ см сообщили заряды $q_1 = 0,6$ мкКл и $q_2 = 1,5$ мкКл, а потом соединили их тонким проводом. После этого шар радиусом r_1 помещают внутрь металлической сферы радиусом $R = 3r_1$, и эту сферу заземляют.



[5] Какой заряд пройдёт по соединительному проводу при заземлении сферы? Ответ дайте в мкКл, округлив до десятых.

Замечание. Расстояние между центрами шаров много больше их радиусов. (М. А. Крупина)

Ответ: 0,2.

Решение. После соединения шаров сумма электрических зарядов не изменится:

$$q_1 + q_2 = q'_1 + q'_2. \quad (*)$$

Потенциалы соединённых шаров равны:

$$\frac{kq'_1}{r_1} = \frac{kq'_2}{r_2} \Rightarrow q'_1 = q'_2 \cdot \frac{r_1}{r_2}.$$

Учитывая равенство сумм (*), получим величины зарядов после соединения:

$$q_1 + q_2 = q'_2 \cdot \left(\frac{r_1}{r_2} + 1 \right) = q'_2 \cdot \frac{r_1 + r_2}{r_2} \Rightarrow \begin{cases} q'_2 = (q_1 + q_2) \cdot \frac{r_2}{r_1 + r_2}, \\ q'_1 = (q_1 + q_2) \cdot \frac{r_1}{r_1 + r_2}. \end{cases}$$

После заземления поверхность сферы является поверхностью нулевого потенциала:

$$\frac{kQ}{3r_1} + \frac{kq''_1}{3r_1} = 0 \Rightarrow q''_1 = -Q.$$

Чтобы ток не тёк по проводу, потенциал системы из сферы и первого шара и потенциал второго шара должны быть равны:

$$\frac{kq''_1}{r_1} + \frac{kQ}{3r_1} = \varphi' = \frac{kq''_2}{r_2}.$$

Решая, получим новую связь между зарядами шаров:

$$\frac{kq_1''}{r_1} - \frac{kq_1''}{3r_1} = \frac{kq_2''}{r_2} \Rightarrow q_2'' = \frac{2}{3} \cdot q_1'' \cdot \frac{r_2}{r_1}.$$

Так как сумма зарядов не изменилась (по аналогии с (*)), получим конечное значение заряда первого шара:

$$q_1 + q_2 = q_1'' + q_2'' = q_1'' \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{r_2}{r_1}\right) \Rightarrow q_1'' = \frac{q_1 + q_2}{1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{r_2}{r_1}}.$$

Вычислим изменение заряда первого шара, равное заряду, который пройдёт по соединительному проводу:

$$\begin{aligned} \Delta q = |q_1' - q_1''| &= \left| \frac{q_1 + q_2}{r_1 + r_2} \cdot r_1 - \frac{q_1 + q_2}{3r_1 + 2r_2} \cdot 3r_1 \right| = r_1(q_1 + q_2) \left| \frac{1}{r_1 + r_2} - \frac{3}{3r_1 + 2r_2} \right| = \\ &= \frac{r_1 r_2 (q_1 + q_2)}{(r_1 + r_2)(3r_1 + 2r_2)} = \frac{0,1 \cdot 0,2 \cdot 2,1 \cdot 10^{-6}}{0,3 \cdot 0,7} = 0,2 \text{ мкКл.} \end{aligned}$$

11.6. (3 балла) Раздобыв на захваченном корабле бочонок дицианоурата калия, Джек Воробей решил изготовить несколько сотен фальшивых золотых монет из давно лежащих в заброшенном сундуке медяков какой-то древней забытой страны. Он тщательно измерил монеты — все они имели диаметр 22 мм и толщину 1,5 мм. В качестве источника тока для гальванического покрытия монет золотом Джек взял 11 гигантских электрических скатов, каждый из которых мог давать ток 50 мА в течение 2 часов.



[6] Сколько монет удалось позолотить Джеку, если слой наносимого им золота имел толщину 4,5 мкм? Ответ дайте в виде целого числа.

Замечание. Электрохимический эквивалент золота в этом процессе равен 2,04 мг/Кл, плотность золота — 19,3 г/см³. (Фольклор)

Ответ: 108.

Решение. Полная масса покрытия равна произведению электрохимического эквивалента золота на величину перенесённого электрического заряда Q :

$$m = kQ.$$

Величина перенесённого электрического заряда равна произведению количества скатов (источников тока) на силу тока и время работы каждого источника:

$$Q = nIt.$$

Иначе массу можно выразить в виде произведения количества монет на плотность золота на объём слоя, наносимого на каждую монету:

$$m = N\rho\Delta V.$$

Объём слоя можно записать так:

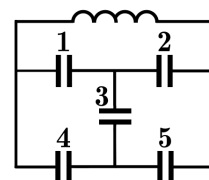
$$\Delta V = \frac{\pi(d+2x)^2}{4} \cdot (h+2x) - \frac{\pi d^2}{4} \cdot h \approx \pi d h x + \frac{\pi d^2 x}{2} = \frac{\pi d x}{2} \cdot (d+2h),$$

где ΔV — объём слоя золота, d — диаметр монеты, h — толщина монеты, x — толщина слоя золота. Тогда количество монет равно

$$N = \frac{2nkIt}{\rho\pi dx(d+2h)} = 108.$$

Критерии. Ответы «107» и «109», полученные в результате неправильных округлений, стоят 1 балл.

11.7. (4 балла) Катушка с числом витков $N = 1000$ и диаметром $d = 1$ см помещена в однородное магнитное поле, параллельное её оси. Индукция поля равномерно возрастает со скоростью $B_0 = 0,01$ Тл/с. Концы катушки замкнуты на батарею из пяти одинаковых конденсаторов общей ёмкостью $C = 1$ мкФ.



[7] Найдите заряд Q_5 на пятом конденсаторе. Ответ дайте в нКл с точностью до сотых.
(В. В. Кузьмичев, С. А. Старовойтов)

Ответ: 0,39.

Решение. Из закона электро-магнитной индукции:

$$|\varepsilon_i| = \frac{\Delta B}{\Delta t} \cdot SN = B_0 \cdot \frac{\pi d^2}{4} \cdot N,$$

где S — площадь поперечного сечения катушки.

Из симметрии системы конденсаторов понятно, что третий конденсатор не заряжен, тогда общая ёмкость

$$C = \frac{C_0}{2} + \frac{C_0}{2} = C_0,$$

где C_0 — ёмкость одного конденсатора.

Напряжения в каждой из параллельных ветвей с двумя конденсаторами одинаковые и равны величине ЭДС. При последовательном соединении двух одинаковых конденсаторов напряжение разделяется между ними поровну. Поэтому заряд на пятом конденсаторе:

$$Q_5 = C_0 U_5 = C \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \frac{CB_0 \pi d^2 N}{8} = 0,39 \text{ нКл.}$$

11.8. (3 балла) α -частица, летевшая со скоростью $V_x = 2 \cdot 10^5$ м/с вдоль оси OX , попадает в область пространства, где присутствуют однородные электрическое и магнитное поля, причём и напряжённость электрического поля, и индукция магнитного поля направлены вдоль оси OY . $E = 1000$ В/м, $B = 0,5$ Тл.

[8] Во сколько раз изменится величина скорости частицы, когда она сделает $N = 20$ оборотов вокруг оси OY ? Ответ дайте в виде числа с точностью до десятых.

(С. А. Старовойтов)

Ответ: 1,6.

Решение. Движение частицы будет происходить по винтовой линии с увеличивающимся шагом, ось спирали — вдоль OY . Величина проекции скорости на плоскость, перпендикулярную OY , сохраняется и равна V_x .

Движение вдоль оси y — равноускоренное, так как напряжённость электрического поля постоянна:

$$V_y = a_y t = \frac{qE}{m} t.$$

Полное время движения равно N периодам вращения в постоянном магнитном поле:

$$t = NT = N \frac{2\pi m}{qB} \Rightarrow V_y = \frac{2\pi NE}{B}.$$

Введём коэффициент увеличения скорости n :

$$V = nV_x = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} \Rightarrow n = \sqrt{\frac{(2\pi NE)^2}{(V_x B)^2} + 1} = 1,6.$$

Критерии. Неверный ответ «1,7», полученный в результате неправильных округлений, стоит 1 балл.

11.9. (3 балла) Плоский тонкий предмет был расположен параллельно плоскости тонкой рассеивающей линзы с фокусным расстоянием 10 см. Линзу заменили на собирающую с таким же фокусным расстоянием.

[9] Куда нужно переместить предмет вдоль главной оптической оси так, чтобы размер его изображения не изменился? В ответе укажите один **знак**: «+», если передвинуть к линзе, или «−», если от линзы.

[10] На какое расстояние нужно передвинуть предмет вдоль главной оптической оси так, чтобы размер его изображения не изменился? Ответ дайте в сантиметрах с точностью до целых.

(С. А. Старовойтов)

Ответы: [9] —. [10] 20.

Решение. Для обоих случаев запишем уравнение тонкой линзы.

В первом случае изображение — мнимое уменьшенное прямое:

$$-\frac{1}{F} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1}.$$

Преобразуем, используя для обозначения увеличения линзы букву Γ :

$$d_1 = \left(\frac{1 - \Gamma}{\Gamma} \right) \cdot F.$$

Во втором случае изображение — действительное уменьшенное перевёрнутое:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_2} \quad \Rightarrow \quad d_2 = \left(\frac{\Gamma + 1}{\Gamma} \right) \cdot F.$$

Увеличения в обоих случаях одинаковые, но с разными знаками. Поэтому

$$\Delta d = d_2 - d_1 = 2F = 20 \text{ см},$$

предмет нужно отодвинуть от линзы.

Критерии. Вопрос [9] стоит 1 балл. Вопрос [10] стоит 2 балла.