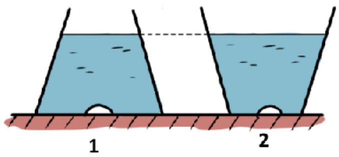
Международная физическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2021–2022 учебный год. Отборочный этап

Решения задач для 8 класса

8.1. (3 балла) Имеется два сосуда с равными массами воды, изображенные на рисунке. На дне сосудов имеются одинаковые небольшие пузырьки воздуха.



Ответьте на следующие вопросы, в каждом поставив один из знаков «>», «<», «=»:

[1] В каком из сосудов сила давления воды на дно больше: $F_1 \square F_2$?

[2] У какого сосуда сила давления на пол больше (массой сосуда пренебрегите): $F_1 \square F_2$?

[3] В сосуды долили одинаковое количество воды. Сравните размеры пузырьков воздуха в сосудах: $P_1 \square P_2$. (*И. В. Демидов, А. М. Минарский*)

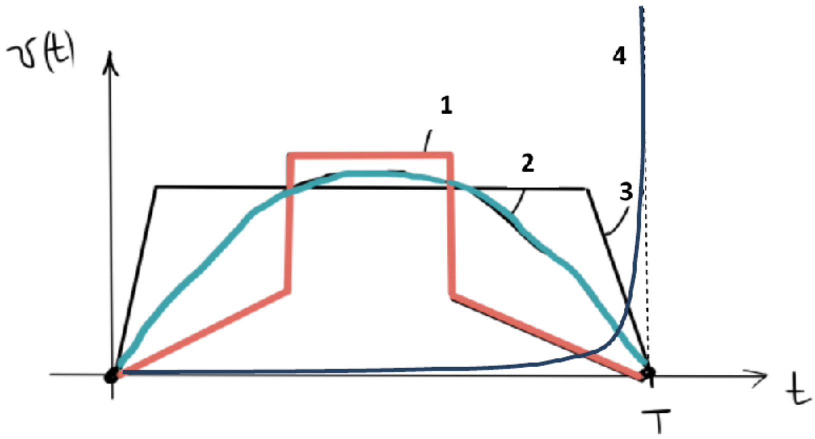
Ответы: [1] $F_1 > F_2$. **[2]** $F_1 = F_2$. **[3]** сожмётся больше в сосуде №1, то есть $P_1 < P_2$.

Решение [1]. Сила давления воды на дно больше в первом сосуде. Проще всего это увидеть так: уровень воды одинаков, следовательно давление на дно сосудов одинаковое, но у первого сосуда площадь дна больше.

Решение [2]. Сила давления сосудов на дно одинаково, так как в сосудах одинаковые массы воды. Тем самым и силы тяжести сосудов, а значит, и их веса, то есть силы, с которыми они давят на дно, одинаковы.

Решение [3]. При доливании одинакового количества воды, в первом сосуде уровень жидкости поднимется сильнее (так как площадь поверхности у жидкости сверху в первом сосуде меньше, чем во втором). Значит в первом сосуде давление воды возле дна увеличится сильнее. И тем самым пузырек в первом сосуде сожмется сильнее, и его размер станет меньше, чем во втором сосуде.

8.2. (2 балла) Даны графики скоростей тел от времени.



[4] Расставьте тела в порядке возрастания их средней скорости: $v_\square < v_\square < v_\square < v_\square$. В ответе напишите четырёхзначное число, расставив номера тел 1, 2, 3, 4 в нужном порядке. (*И. В. Демидов, А. М. Минарский*)

Ответ: 4123.

Решение. Средняя скорость равна отношению всего пройденного пути, к полному времени движения, то есть это площадь под графиком $v(t)$, деленная на одно и то же время T. У четвертого тела площадь под графиком наименьшая, у первого тела меньше, чем у второго, а у второго меньше, чем у третьего. (сравнивая графики последовательно, это можно понять без всяких специальных вычислений). Значит, для средних скоростей $v_4 < v_1 < v_2 < v_3$.

8.3. (3 балла) Экспедиция на Амальтею доставила к Земле образец породы этого спутника Юпитера; масса образца $M = 9$ кг. Пробные измерения показали, что средняя плотность образца равна $\rho = 1{,}5$ г/см^3. После этого от образца откололи кусок массой $m = 2$ кг для музея, а остальную часть отправили на дальнейшее изучение. Оказалось, что средняя плотность остатка равна $\rho_2 = 1{,}75$ г/см^3.

[5] Найдите среднюю плотность куска, отправленного в музей. Ответ дайте в г/см^3 с точностью до десятых.

[6] Оказалось, что порода, отправленная на дальнейшее изучение полностью состоит из вмороженного в лед плотности 0,9 г/см^3 железа (плотность 7,8 г/см^3). Найдите массу железа в граммах. Ответ дайте с точностью до грамма. (*А. М. Минарский*)

Ответы: **[5]** 1,0. **[6]** 3843.

Решение [5]. Для исследования оставили кусок массой $m_2 = M - m = 7000$ г и объемом

$$V_2 = \frac{m_2}{\rho_2} = \frac{7000}{1{,}75} = 4000 \text{ см}^3.$$

Общий объем образца

$$V = \frac{M}{\rho} = \frac{9000}{1{,}5} = 6000 \text{ см}^3,$$

поэтому объем куска в музее $V_1 = V - V_2 = 2000$ см^3, откуда

$$\rho_1 = \frac{m}{V_1} = \frac{2000}{2000} = 1{,}0\ \frac{\text{г}}{\text{см}^3}.$$

Решение [6]. Имеем для образца, оставленного для изучения:

$$m_\text{л} + m_\text{ж} = m_2 = 7000 \text{ г}, \quad \text{при этом} \quad V_\text{л} + V_\text{ж} = \frac{m_\text{л}}{\rho_\text{л}} + \frac{m_\text{ж}}{\rho_\text{ж}} = V_2 = 4000 \text{ см}^3,$$

или, если $m_\text{ж} = x$, $m_\text{л} = 7000 - x$, то

$$\frac{7000 - x}{0{,}9} + \frac{x}{7{,}8} = 4000$$

откуда, с точностью до грамма: $x = 3843$ г.

8.4. **(3 балла)** В жаркий летний день Пятачок отдыхал у себя на даче. Было очень жарко — термометр, установленный в домике, показывал 35°C! Поэтому Пятачок решил поесть мороженого. Он достал ведерко с 2 кг мороженого из морозилки, съел 350 г, объелся, и оставил ведерко с мороженым на столе. Через некоторое время, когда половина массы оставшегося мороженого растаяла, Пятачок спохватился и убрал всё обратно в морозилку.

[7] Через какое время мороженое в ведерке охладится до -10°C, если мощность отвода тепла в морозилке постоянна и равна 100 Дж/с? Ответ дайте в секундах с точностью до 1 секунды.

Замечание. Температура плавления мороженого равна 0°C и удельная теплота плавления мороженого — 300 кДж/кг; теплоемкость твердого мороженого равна 2000 $\frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot{}^\circ\text{C}}$, жидкого — 4000 $\frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot{}^\circ\text{C}}$. (*И. В. Демидов, А. М. Минарский*)

Ответ: 2805.

Решение. Масса несъеденного мороженного $m = 2000 - 350 = 1650$ г. Поскольку оно наполовину растаявшее, оно всё имеет температуру $T_0 = 0$°C.

На то, чтобы заморозить растаявшую половину, потребуется тепло

$$Q_1 = \lambda \cdot \frac{m}{2} = 300\ \frac{\text{Дж}}{\text{г}} \cdot 825 \text{ г} = 247500 \text{ Дж}.$$

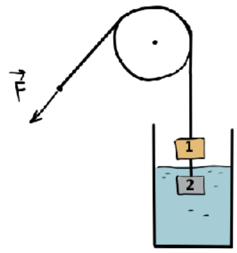
Для того, чтобы оно всё потом остыло до $T = -10°$C, потребуется

$$Q_2 = C_{\text{тв}} \cdot m \cdot (T_0 - T) = 2\ \frac{\text{Дж}}{\text{г} \cdot {}^\circ \text{C}} \cdot 1650 \cdot 10 = 33000 \text{ Дж}.$$

Всего потребуется отнять тепла: $Q = Q_1 + Q_2 = 280500$ Дж.
Время — это отнятое тепло, деленное на мощность:

$$t = \frac{Q}{P} = \frac{280500}{100} = 2805 \text{ с}.$$

8.5. **(3 балла)** В каком диапазоне может изменяться сила F, чтобы система, указанная на рисунке, находилась в равновесии? Верхний грузик сделан из пенопласта ($\rho_1 = 0{,}2$ г/см^3), а нижний — из стали ($\rho_2 = 7{,}8$ г/см^3), объемы грузиков равны $V_1 = 900$ см^3, $V_2 = 100$ см^3. Трение в оси блока отсутствует, нить невесома и нерастяжима.



[8] Укажите нижнюю границу диапазона: $F \geqslant \square$.

[9] Укажите верхнюю границу диапазона: $F \leqslant \square$.

Ответы дайте с точностью до 1 Н, ускорение силы тяжести считайте равным 10 Н/кг.

(*И. В. Демидов, А. М. Минарский*)

Ответы: 0 Н $\leqslant F \leqslant$ 9,6 Н.

Решение [9]. Максимальная сила определяется тем условием, что оба грузика не погружены в воду, то есть она равна

$$(M_1 + M_2)g = (\rho_1 \cdot V_1 + \rho_2 \cdot V_2) \cdot g = (900 \cdot 0{,}2 + 100 \cdot 7{,}8) \cdot 0{,}01\ \frac{\text{Н}}{\text{г}} = 9{,}6 \text{ Н}.$$

Решение [8]. При погружении грузиков, требуемая сила F будет уменьшаться. Для решения задачи можно отбросить нить между грузиками и просто их склеить. Для начала проверим, могут ли они погрузится полностью. Для этого сравним силу тяжести и максимальную силу Архимеда (когда погруженный объема равен $V = V_1 + V_2 = 1000$ см^3).
Сила Архимеда:

$$F_A = \rho_{\text{вода}} \cdot V \cdot g = 1000 \text{ г} \cdot 10\ \frac{\text{Н}}{\text{кг}} = 10 \text{ Н}.$$

Поэтому кубики не могут погрузится полностью, и будут плавать, если достаточно уменьшить F. Значит, минимальная F равна нулю.

8.6. **(3 балла)** Волшебнику нужно дать Ване магический отвар при температуре точно $T = 30°$C из фляжки емкостью 0,3 литра. К сожалению, Ваня еще маленький, он упрямится и не хочет пить, а фляжка с отваром остывает на 1 градус за 5 минут. Для того чтобы отвар не остывал, волшебник капает в стакан обыкновенную теплую воду с температурой 50°C. Масса одной капли — 0,2 г.

[10] Сколько капель в минуту нужно капать во фляжку, чтобы температура в ней поддерживалась 30°C (теплоемкость отвара совпадает с теплоемкостью обыкновенной воды)?

[11] На сколько нагреется за одну минуту отвар, если волшебник по ошибке начнет капать в 3 раза чаще (лишняя жидкость выливается из горлышка фляжки)? Ответ дайте с точностью до десятых градуса. (*А. М. Минарский*)

Ответы: **[10]** 15 **[11]** 0,4.

Решение [10]. За время $t = 5$ мин фляжка теряет тепло

$$Q = c \cdot m \cdot \Delta T = 4200 \cdot 0{,}3 \cdot 1 = 1260 \text{ Дж},$$

то есть за одну минуту теряется тепло $Q_1 = Q/5 = 252$ Дж. Для поддержания постоянной температуры во фляжке это тепло должно компенсироваться горячими каплями (числом N)

при их остывании до 30°C:

$$Q_1 = N \cdot c \cdot m \cdot (T_0 - T) = N \cdot 4200 \cdot 0{,}0002 \cdot (50 - 30) = 16{,}8N,$$

откуда $N = 252/16{,}8 = 15$ капель.

Решение [11]. Если капель будет в 3 раза больше, они дадут в 3 раза больше тепла (при остывании до 30°C), то есть $3Q_1$; фляжка же получит избыточного тепла $3Q_1 - Q_1 = 2Q_1$ и нагреется на

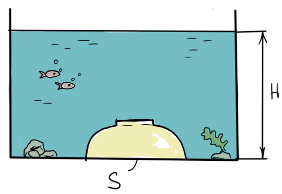
$$\Delta T_{\text{К}} = \frac{2Q_1}{c \cdot M} = \frac{2 \cdot 252}{4200 \cdot 0{,}3} = 0{,}4°\text{C}.$$

Замечание. Можно написать и точное уравнение теплового баланса, учитывающее остывание капель не до 30°C, а до неизвестной температуры $T_{\text{к}}$ и нагрев фляжки до этой же температуры, а также учесть изменение скорости теплопотери фляжки из-за того, что она немного нагреется, но это изменит ответ примерно на относительную ошибку

$$\frac{\Delta T_{\text{К}}}{T_0 - T} = \frac{0{,}4}{20} = 0{,}02,$$

и на точность до одной десятой в ответе $\Delta T_{\text{К}} = 0{,}4$ не влияет.

8.7. **(4 балла)** На дне аквариума лежит перевернутая чашка с очень тонкими стенками, объема $V = 300$ мл. Причем она лежит так, что под чашку вода не подтекает. Известно, что уровень воды в аквариуме $H = 50$ см, а площадь дна, которую покрывает чашка, равна $S = 70$ см^2. В чашке нет воздуха (вакуум), а атмосферное давление точно равно $P_0 =$ $= 100000$ Па. Считайте $g = 10$ Н/кг.



[12] Найдите силу, с которой вода прижимает чашку ко дну, ответ дайте с точностью до 1 Ньютона. (*И. В. Демидов, А. М. Минарский*)

Ответ: 732.

Решение. Представим сначала мысленно, что чашка закрыта снизу тонкой герметичной крышкой, и вода под эту крышку снизу подтекает. Тогда на эту крышку снизу вверх будет действовать сила давления воды

$$F_1 = P \cdot S = (P_0 + \rho \cdot g \cdot H) \cdot S.$$

Пусть сверху вниз на чашку действует прижимающая сила F_2. Тогда разность сил давления воды снизу и сверху, действующих на чашку, есть сила Архимеда: $F_1 - F_2 = F_A = \rho \cdot g \cdot V$, откуда

$$F_2 = F_1 - F_A = (P_0 + \rho \cdot g \cdot H) \cdot S - \rho \cdot g \cdot V =$$
$$= (100000 + 1000 \cdot 10 \cdot 0{,}5) \cdot 0{,}007 - 1000 \cdot 10 \cdot 0{,}0003 = 732 \text{ Н}.$$

Поскольку сила давления сверху на чашку не зависит от наличия или отсутствия снизу тонкой крышки, то получаем ответ: $F = F_2 = 732$ Н.

8.8. **(3 балла)** На Таинственном острове есть подземное озеро площади $S = 0{,}35$ км^2 и средней глубины $h = 20$ м, на дне которого лежит подводная лодка капитана Немо. Объем лодки $V_{\text{Л}} = 7000$ м^3. Когда лодка утонула, озеро было пресным, но каждый год из-за просачивания морской воды озеро становится всё более соленым. При этом уровень озера остается постоянным: с поверхности озера происходит медленное испарение. Известно, что плотность морской воды $\rho_{\text{М}} = 1035$ кг/м^3, а плотность лодки Немо $\rho_{\text{Л}} = 1020$ кг/м^3.

[13] Сколько кубометров морской воды должно просочиться в озеро, чтобы лодка всплыла?

Ответ дайте с точностью до 1 м^3. (*А. М. Минарский*)

Ответ: 3996000.

Решение. Пусть в озеро просочился объем V_1 морской воды. Значит, поскольку уровень озера не изменился, испарилось столько же пресной (соль практически не испаряется). Плотность пресной воды $\rho = 1000$ кг/м^3, поэтому озеро стало тяжелее на разность массы соленой и пресной воды:

$$m = \rho_\text{М} \cdot V_1 - \rho \cdot V_1 = (\rho_\text{М} - \rho) \cdot V_1. \qquad (*)$$

К моменту, когда подлодка всплывет, плотность озера станет равной плотности лодки:

$$\rho_\text{Л} \cdot V = \rho \cdot V + m,$$

где V — объем воды озера. С учетом места, занимаемого лодкой:

$$V = S \cdot h - V_\text{Л},$$

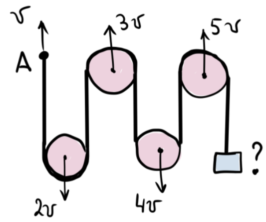
поэтому уравнение $(\rho_\text{Л} - \rho) \cdot V = m$ с учетом $(*)$ дает

$$(\rho_\text{Л} - \rho) \cdot (S \cdot h - V_\text{Л}) = (\rho_\text{М} - \rho) \cdot V_1.$$

Подставляя числа:

$$20 \cdot (350000 \cdot 20 - 7000) = 35 \cdot V_1 \quad \Rightarrow \quad V_1 = 3996000 \text{ м}^3.$$

8.9. **(3 балла)** На рисунке представлена мгновенная фотография системы из подвижных блоков. При этом оказалось, что точка A имеет скорость $v = 1$ см/с, а скорости блоков равны $2v$, $3v$, $4v$ и $5v$ соответственно. Нить нерастяжима.



[14] Куда в этот момент времени будет смещаться грузик? В ответе напишите «U», если вверх, и «D», если вниз.

[15] Найдите, чему в этот момент времени равна скорость грузика. Ответ дайте с точностью до 1 см/с. (*И. В. Демидов*)

Ответы: **[14]** U. **[15]** 29.

Решение [14]. Расстояния между точкой A и 1-м блоком, 1-м блоком и 2-м, 2-м и 3-м, 3-м и 4-м — увеличиваются, а длина всей нитки постоянна. Значит, чтобы компенсировать рост этих расстояний, расстояние между 4-м блоком и грузиком должно уменьшаться, а значит, грузик будет двигаться вверх.

Решение [15]. Рассмотрим очень маленький интервал времени Δt, и посмотрим, как сместятся отдельные части системы. Точка A сместится вверх на $v\Delta t$, самый левый блок — вниз на $2v\Delta t$, и так далее.

Это означает, что точка A стремится удлинить самый левый участок нити на $v\Delta t$, а блок — на $2v\Delta t$, то есть суммарно на $3v\Delta t$. Аналогично для следующего участка нити получим удлинение $3v\Delta t + 2v\Delta t$ и так далее.

Итого нить должна удлиниться на

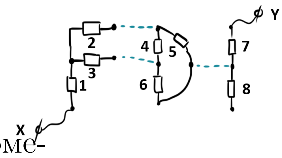
$$(v + 4v + 6v + 8v + 10v)\Delta t - u\Delta t.$$

Но полное удлинение равно нулю, значит $u = 29v$, или 29 см/с.

Международная физическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2021–2022 учебный год. Отборочный этап

Решения задач для 9 класса

9.1. (3 балла) Имеется три буквы, сделанные из одинаковых светодиодов: «F», «D» и «I». Паша решил собрать эти буквы в одну цепь так, как показано на рисунке пунктирными линиями. Далее он подключил эту цепь к сети 220 В.

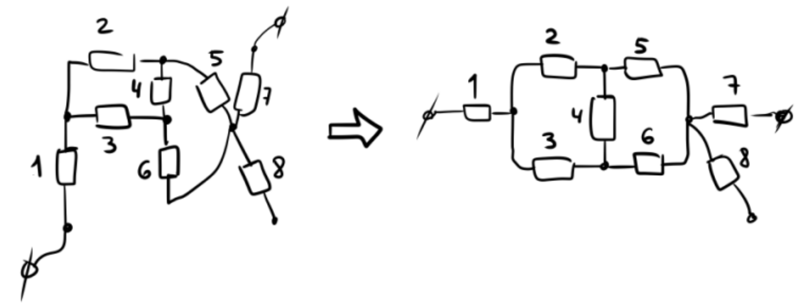


[1] Какие диоды не будут гореть? В ответе напишите число, написав номера диодов в порядке возрастания без пробелов и других разделителей.

[2] Найдите сопротивление цепи между контактами X и Y. Сопротивление каждого диода равно 1 кОм, сопротивлением соединительных проводов пренебрегите. Ответ дайте с точностью до 1 кОм. (*И. В. Демидов, А. М. Минарский*)

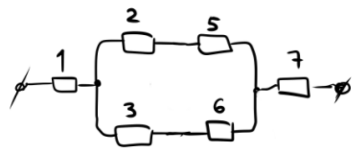
Ответы: **[1]** 48. **[2]** 3.

Решение [1]. Соединим точки в схеме. Нетрудно видеть, что мы имеем схему мост:



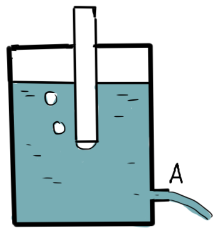
Причем этот мост сбалансирован (т.к. $R_2/R_3 = R_5/R_6$). Значит, по диодам 2 и 5 и диодам 3 и 6 течет одинаковый ток, на диоде 2 и диоде 3 одинаковое напряжение и поэтому между контактами диода 4 нет напряжения и ток по нему не течет, поэтому он не будет гореть, как и диод 8, имеющий не подключенный контакт.

Решение [2]. Так как ток через 4-й и 8-й диоды не течет, их можно отбросить (см. рис.)



В результате несложного расчета получим общее сопротивление $3R = 3$ кОм.

9.2. (3 балла) В закрытый сосуд с водой погрузили трубку, как показано на рисунке.



[3] Как будет изменяться скорость истечения жидкости из отверстия A, когда его откроют? В ответе укажите *латинскую* букву, соответствующую верному ответу:

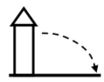
A) будет постепенно уменьшаться,
B) будет постепенно увеличиваться,
C) будет приблизительно оставаться постоянной,
D) вода не будет вытекать,
E) сначала будет увеличиваться, потом уменьшаться,
F) сначала будет уменьшаться, потом увеличиваться,
G) сначала будет уменьшаться, потом останется приблизительно постоянной,
H) сначала будет приблизительно постоянной, потом будет уменьшаться,
I) сначала будет приблизительно постоянной, потом вода перестанет вытекать,
J) сначала будет уменьшаться, потом вода перестанет вытекать.

Замечание. Вне сосуда давление равно 1 атм. (*И. В. Демидов*)

Ответ: H.

Решение. Изначально трубка будет частично заполнена водой по закону сообщающихся сосудов. Когда отверстие открывают, уровень жидкости начинает уменьшаться. Но если в трубке над водой всегда атмосферное давление, то в сосуде давление над водой будет уменьшаться. Поэтому воздух в трубке начнет вытеснять жидкость в сосуд, пока вся она не заполнится воздухом (это происходит довольно быстро). Затем этот воздух будет поступать в сосуд, чтобы компенсировать дальнейшее падение давления в сосуде. Таким образом, давление на нижнем уровне конца трубки будет постоянно, и равно атмосферному. Значит в вблизи отверстия давление тоже будет постоянно, пока уровень жидкости находится выше нижнего конца трубки. Поэтому вода будет вытекать из отверстия с постоянной скоростью. Как только уровень воды опустится ниже нижнего конца трубки, скорость вытекания жидкости начнет уменьшаться. Когда уровень воды достигнет отверстия, скорость истечения обратится в нуль.

9.3. (3 балла) Незакрепленная пушка массой $M = 600$ кг выстрелила горизонтально ядром массой $m = 15$ кг из бойницы в башне замка на высоте $H = 45$ м над землей. Ядро попало в цель на расстоянии $L = 600$ м от башни.



[4] Какая примерно масса пороха должна была сгореть при выстреле, если кпд выстрела (отношение работы пороховых газов к полной теплоте сгорания пороха) равно 5%? Ответ дайте с точностью до грамма.

Замечание. Удельную теплоту сгорания пороха считайте равной 10^4 Дж/г, ускорение силы тяжести $g = 10$ м/с^2. (*А. М. Минарский*)

Ответ: 615.

Решение. Поскольку ядро не имело начальной вертикальной скорости, то его уравнение движения по вертикали:

$$y = H - \frac{g \cdot t^2}{2},$$

и в момент падения $y = 0$, поэтому

$$\frac{g \cdot t^2}{2} = H = 45 \text{ м} \quad \Rightarrow \quad t = 3 \text{ с}.$$

Движение по горизонтали: $x = V_x \cdot t$, откуда за весь полет

$$L = V_x \cdot t \quad \Rightarrow \quad V_x = V_1 = \frac{L}{t} = \frac{600}{3} = 200 \ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Закон сохранения горизонтального импульса в системе пушка-ядро:

$$mV_1 + MV_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_2 = -\frac{mV_1}{M} = 5 \ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

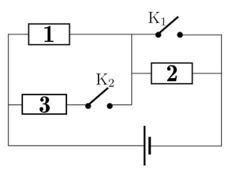
Наконец, прирост механической энергии определяется работой газов при выстреле:

$$A = \frac{mV_1^2}{2} + \frac{MV_2^2}{2} = \frac{15 \cdot 200^2}{2} + \frac{600 \cdot 5^2}{2} = 307500 \text{ Дж}.$$

КПД выстрела: $\eta = A/Q$, откуда $Q = q \cdot m_\Pi = A/\eta$, подставляя:

$$10000 m_\Pi = \frac{307500}{0{,}05} \quad \Rightarrow \quad m_\Pi = 615 \text{ г}.$$

9.4. (3 балла) Есть 2 ключа, 3 одинаковых резистора, и идеальные (не имеющие внутреннего сопротивления) источник и провода, из которых собрали схему (см. рис). Сначала все ключи были разомкнуты.



[5] Куда (влево или вправо) в целом текли электроны в резисторе 1? В ответе напишите «L», если влево, или «R», если вправо.

[6] Увеличится или уменьшится и во сколько раз средняя скорость электронов в резисторе 1, если ключ K_1 замкнуть? В ответе напишите число со знаком «+», если увеличится, или со знаком «−», если уменьшится.

[7] Какие из ключей надо замкнуть, чтобы мощность в цепи стала максимальной (в ответе укажите нужную *латинскую* букву):

A) никакие, B) только K_1, C) только K_2, D) оба ключа?

[8] Во сколько раз максимальная мощность будет отличаться от первоначальной? Ответ, если нужно, округлите до целого. (*А. М. Минарский*)

Ответы: **[5]** L. **[6]** +2. **[7]** D. **[8]** 4.

Решение [5]. Принято считать, что направление тока от «+» к «−» источника, но электроны отрицательно заряжены и отталкиваются от «−» и притягиваются к «+», то есть движутся в обратном направлении. Значит, на схеме электроны текут влево.

Решение [6]. Сила тока в резисторе (то есть полный заряд, протекающий в ед. времени) пропорциональна величине одного заряда, их количеству в ед. объема, площади сечения резистора и, наконец, средней скорости направленного движения зарядов. Поскольку ничего кроме скорости в неизменном резисторе не должно меняться, то ток и скорость прямо пропорциональны. Когда замкнули ключ K_1, общее сопротивление цепи упало в 2 раза (раньше ток тек последовательно через резисторы 1 и 2, а теперь только через резистор 1 и далее по проводу без сопротивления через ключ K_1). Поэтому общий ток возрос в 2 раза, он весь течет через резистор 1, значит, скорость направленного движения электронов станет больше в 2 раза.

Решение [7]. Мощность в цепи

$$P = \frac{U^2}{R_{\text{общ}}},$$

где U — напряжение источника, поэтому она максимальна, когда общее сопротивление цепи минимально. Несложно перебрать варианты и убедиться, что общее сопротивление минимально, когда замкнуты ключи K_1 и K_2.

Решение [8]. При замыкании обоих ключей резисторы 1 и 3 соединены параллельно и общее сопротивление равно $R/2$ (если R — сопротивление одного резистора). В исходной схеме были последовательно соединены резисторы 1 и 2, то есть общее сопротивление было $2R$. Итак, общее сопротивление схемы упало в 4 раза, значит, мощность возросла в 4 раза.

Замечание. Существует общее (но довольно сложно строго доказываемое) утверждение, что в любой обычной электрической схеме при замыкании любого ключа сопротивление не может увеличиваться (физически качественно это объясняется тем, что при замыкании открывается еще один возможный путь для движения зарядов).

Поэтому в любой схеме, без перебора вариантов, наименьшее сопротивление наверняка достигается, когда все ключи замкнуты. (Но при этом бывают ситуации, если некоторые ключи разомкнуть, сопротивление останется тем же.)

9.5. (3 балла) На таинственном острове есть подземное озеро площади $S = 0{,}35$ км^2 и средней глубины $h = 20$ м, температура которого поддерживается постоянной и равной $T_0 = 25°$C за счет геотермального тепла. На дне озера лежит подводная лодка капитана Немо. Когда лодка утонула, озеро было пресным, но каждый год из-за просачивания морской воды озеро становится всё более соленым. При этом уровень озера остается постоянным: с поверхности озера происходит медленное испарение. Удельная теплота испарения воды озера при температуре 25°C: $L = 2450000$ Дж/кг, плотность морской воды $\rho_{\text{М}} = 1035$ кг/м^3, температура $T_{\text{М}} = 5°$C, теплоемкость $c_{\text{М}} = 4106\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot°\text{C}}$, а плотность лодки Немо $\rho_{\text{Л}} = 1020$ кг/м^3.

[9] Сколько триллионов (10^{12}) джоулей тепла должно поступить в озеро к моменту, когда лодка всплывет? Ответ округлите до целого числа.

Замечание. Размеры и теплоемкость самой подлодки, а также тепло, выделяющееся при растворении соли, считайте несущественными. *(А. М. Минарский)*

Ответ: 10140.

Решение. Найдем на момент всплытия лодки объем просочившейся соленой воды V_1 и, поскольку уровень озера постоянен, равный ему объем испарения пресной (соль не испаряется). Плотность пресной воды $\rho = 1000$ кг/м^3, озеро стало тяжелее на разность массы соленой и пресной воды:

$$m = \rho_{\text{М}} \cdot V_1 - \rho \cdot V_1 = (\rho_{\text{М}} - \rho) \cdot V_1. \qquad (*)$$

Полная масса воды в озере станет $M = \rho \cdot V + m$, где $V = S \cdot h$ — объем воды озера.

Перед тем как подлодка всплывет, плотность озера станет равной плотности лодки, и поэтому $M = \rho_{\text{Л}} \cdot V$. Приравняв, получим

$$\rho_{\text{Л}} \cdot V = \rho \cdot V + m \quad \Leftrightarrow \quad (\rho_{\text{Л}} - \rho) \cdot V = m.$$

Используя ($*$), получим

$$(\rho_{\text{Л}} - \rho) \cdot S \cdot h = (\rho_{\text{М}} - \rho) \cdot V_1 \quad \Leftrightarrow \quad 20 \cdot 350000 \cdot 20 = 35 \cdot V_1 \quad \Rightarrow \quad V_1 = 4000000 \text{ м}^3.$$

Вся соленая вода соответствующей массы $\rho_{\text{М}} \cdot V_1$ нагрелась от температуры $T_{\text{М}}$ до температуры озера T_0, а вся пресная вода массы $\rho \cdot V_1$ испарилась. В итоге количество тепла, переданного воде в озере, равно:

$$Q = c_M \cdot \rho_{\text{М}} \cdot V_1 \cdot (T_0 - T_M) + L \cdot \rho \cdot V_1 =$$
$$= (4106 \cdot 1035 \cdot 20 + 2450000 \cdot 1000) \cdot 4000000 = 101399768 \cdot 10^8 \text{ Дж} \approx 10140 \cdot 10^{12} \text{ Дж}.$$

9.6. **(3 балла)** Для ремонта на космической станции были сделаны два робота совершенно одинаковой формы и из одинаковых материалов, но первый имел высоту $h = 40$ см, а второй — $H = 140$ см. Оказалось, что эти два робота и двигались тоже совершенно одинаково и даже «неотличимо быстро». А именно: когда одна и та же видеокамера записала в одинаковом режиме работу роботов в невесомости, то пока в кадр не попадали предметы, позволяющие различать размеры роботов, по видеозаписи нельзя было определить, какого из роботов мы видим.

[10] Средняя мощность полезной работы двигателя в 1-м роботе была $P_1 = 16$ Вт. Найдите среднюю мощность двигателя во 2-м роботе. Ответ, если нужно, округлите до одного ватта. *(А. М. Минарский)*

Ответ: 8404.

Решение. Если на одинаково снятых видеороликах по движению роботов нельзя их различить, значит, скорости их движения отличались во столько же раз, во сколько их линейные размеры, то есть в $N = H/h = 3{,}5$ раза. Массы роботов из одинаковых материалов отличались во столько же раз, во сколько объемы, то есть в N^3 раз, и поэтому их кинетические энергии $mV^2/2$ отличались в $N^3 \cdot N^2$, то есть в N^5 раз. В невесомости изменение потенциальной энергии тел несущественно, поэтому мощности роботов, которых записывали на видео с одинаковой скоростью записи, отличаются во столько же раз, во сколько отличаются их кинетические энергии, то есть в N^5 раз:

$$P_2 = N^5 \cdot P_1 = \left(\frac{7}{2}\right)^5 \cdot 16 = 8403{,}5 \text{ Вт}.$$

9.7. **(4 балла)** Известно, что белые карлики — это некоторый тип звезд во Вселенной, в которых процессы энерго-выделения за счет ядерных реакций практически прекратились, и звезды медленно остывают за счет излучения. Мощность излучения нагретого тела пропорциональна площади его поверхности и 4-й степени её абсолютной температуры (в кельвинах).
Предположим, нам известно, что некоторый белый карлик остывал время $t = 125$ миллионов лет от температуры поверхности $T_0 = 16000°$K до температуры $T_1 = 8000°$K.

[11] Оцените время, через которое эта звезда может превратиться в «черного карлика», то есть температура её поверхности упадет до 1000°K. Ответ дайте с точностью до миллиона лет.

Замечание. Теплоемкость звезды, её массу и плотность считайте приблизительно неизменными. *(А. М. Минарский)*

Ответ: 73000.

Решение. Раз масса и плотность звезды не изменялась, то постоянным была и площадь её поверхности и излучение зависело лишь от температуры. Рассмотрим сначала остывание от 8000°K до 4000°K. Каждому моменту времени в процессе этого остывания, когда температура поверхности карлика была T, можно сопоставить момент с температурой поверхности 2T для начального процесса остывания от 16000°K до 8000°K. Мощность излучения для более холодного процесса при температуре T будет в $2^4 = 16$ раз меньше, чем для более горячего процесса при температуре 2T, то есть в соответствующие моменты времени карлик в более холодном процессе остывает в 16 раз медленнее (имеет мощность теплоотдачи в 16 раз меньше), чем в более горячем. Однако остыть в более холодном процессе карлику надо вдвое меньше (не от 16000°K до 8000°K, а от 8000°K до 4000°K), то есть надо потерять вдвое меньше джоулей тепла. Значит, остывание от 8000°K до 4000°K продлится в 8 раз дольше (теряем тепло в 2 раза меньшее, но с в 16 раз меньшей мощностью). Тем самым оно продлится

$$8t = 8 \cdot 125 \text{ млн} = 1000 \text{ млн лет.}$$

Следующий вдвое более холодный процесс остывания (от 4000°K до 2000°K) снова потребует в 8 раз большего времени, то есть 8000 млн лет, а остывание от 2000°K до 1000°K потребует еще в 8 раз большей длительности, то есть 64000 млн лет.
Общее время остывания карлика от 8000°K до 1000°K будет

$$1000 + 8000 + 64000 = 73000 \text{ млн лет.}$$

Замечание. Отметим, что полученное время в несколько раз больше предполагаемого возраста Вселенной, то есть наша Вселенная, по-видимому, слишком «молода», чтобы в ней мы могли наблюдать «остывших до черноты» белых карликов.

9.8. **(2 балла)** По неподтвержденному рассказу барона Мюнхгаузена, у него в России была дуэль с русским офицером на пулях, сделанных изо льда. При этом согласно рассказу пули столкнулись в воздухе, полностью расплавились и упали вниз одной большой каплей воды.

[12] При каких наименьших скоростях пуль это в принципе могло бы быть (ответ дайте с точностью до м/с)?

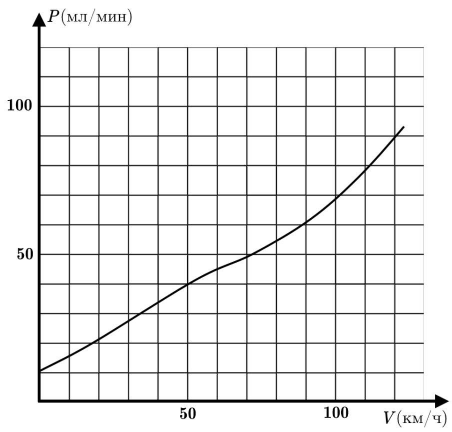
[13] Если обычная свинцовая пуля массой $m = 9$ г и температурой $T = 100$°C на скорости $v = 200$ м/с попадет в сугроб со снегом температурой $T_0 = 0$°C, то какая масса воды при этом образуется (ответ дайте с точностью до мг)?

Замечание. Удельные теплоемкости воды $C_\text{В} = 4200\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot{}^\circ\text{C}}$, льда $C_\text{Л} = 2100\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot{}^\circ\text{C}}$, свинца $C_\text{С} = 130\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot{}^\circ\text{C}}$, удельная теплота плавления льда $\lambda = 333{,}6$ кДж/кг. (*А. М. Минарский*)

Ответы: [12] 817. **[13]** 890.

Решение [12]. На нагрев ледяных пуль до температуры плавления (0°C) и их плавление идет кинетическая энергия столкнувшихся пуль. Минимальной эта энергия (и их скорость) будет, если после столкновения пули остановятся и если к моменту удара они уже имели 0°C, то есть их не надо было нагревать и всё пошло только на плавление. Тогда

$$\frac{m_1 \cdot v_1^2}{2} + \frac{m_2 \cdot v_2^2}{2} = \lambda \cdot (m_1 + m_2).$$



Если массы и скорости пуль равны, то сократив в этом уравнении массу $m = m_1 = m_2$, получим $v^2 = 2\lambda$, откуда с точностью до м/с минимальная скорость: $v = 817$ м/с.
Если же массы (а значит, и скорости в силу закона сохранения импульса) у пуль не равны, то кинетическая энергия хотя бы одной из пуль станет больше её теплоты плавления, и поэтому для неё $v^2 > 2\lambda$ и её скорость при столкновении превысит полученное (минимальное) значение.

Решение [13]. Поскольку снег имеет температуру $T_0 = 0$°C, то вся выделившая при торможении пули и её остывании энергия пойдет на плавление снега и образование воды. Итак:

$$\frac{m \cdot v^2}{2} + c \cdot m \cdot (T - T_0) = \lambda \cdot M \quad \Rightarrow \quad M = m \cdot \frac{v^2 + 2c \cdot (T - T_0)}{2\lambda} = 890 \text{ мг.}$$

9.9. **(3 балла)** Предположим, нам известна зависимость мощности расхода топлива некоторого автомобиля P (в мл/мин) от его скорости v (в км/ч, см. график) при движении по шоссе.

[14] При какой скорости движения по шоссе расход топлива на 100 км пути будет наименьший? Ответ дайте в км/ч, округлив до целого.

[15] Чему он равен? Ответ дайте в литрах. (*А. М. Минарский*)

Ответы: [14] 90. **[15]** 4.

Решение. Если автомобиль по данной дороге проедет расстояние L со скоростью v, то он потратит время $t = L/v$, и объем израсходованного им топлива будет

$$V_T = P \cdot t = \frac{P \cdot L}{v}. \qquad (*)$$

Таким образом, расход на единицу пути будет:
$$\frac{V_T}{L} = \frac{P}{v}.$$
Решение [14]. Мы видим, что наименьший расход топлива на единицу пути будет при такой скорости, когда будет наименьшим отношение P/v. На графике P от v это отношение — это наклон прямой, идущей из нуля в данную точку (v,P). Несложно понять, что наименьший наклон будет там, где линия, идущая из нуля, касается снизу нашего графика. Если мы будем просто поворачивать линейку, проходящую через ноль, мы определим, что её касание с графиком происходит в точке, где $v = 90$ км/ч и $P = 60$ мл/мин (то есть 3600 мл/ч).
Решение [15]. Подставив в $(*)$ нужные величины, мы найдем:
$$V_T = \frac{3600\ \frac{\text{мл}}{\text{ч}} \cdot 100\ \text{км}}{90\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}} = 4000\ \text{мл} = 4{,}0\ \text{л}.$$

Международная физическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2021–2022 учебный год. Отборочный этап

Решения задач для 10 класса

10.1. (2 балла) У экспериментального автомобиля массой $M = 1100$ кг все четыре колеса ведущие, причём передние и задние колёса могут вращаться в противоположные стороны (навстречу друг другу). Вес автомобиля и мощность $P = 100$ кВт двигателя распределяются между всеми колёсами поровну. Руль автомобиля не поворачивают, а передние и задние колёса запускают навстречу друг другу с максимальной скоростью. Коэффициенты трения колёс автомобиля и подошв человека об асфальт равны соответственно $K = 0{,}3$ и $k = 0{,}5$.

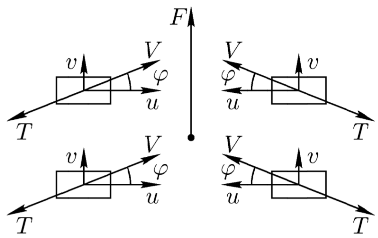
[1] С какой максимальной скоростью v сможет толкать этот автомобиль достаточно сильный человек массой $m = 70$ кг, если он будет давить на автомобиль вдоль прямой, проходящей через его центр масс параллельно осям колёс?
Выразите искомую величину в м/с и укажите в качестве ответа её численное значение, округлённое до трёх значащих цифр.

Замечание. Перераспределение веса автомобиля между колёсами из-за воздействия человека не учитывайте. (*С. Н. Сашов, А. В. Чудновский*)

Ответ: 3,25.

Решение. На рисунке показан вид сверху на четыре колеса автомобиля:

- V и u — скорости движения нижней точки каждого колеса относительно земли и кузова автомобиля соответственно,
- φ — угол между этими скоростями,
- F — сила давления человека,
- T — силы трения скольжения, действующие со стороны асфальта на колёса.



Мощность двигателя автомобиля расходуется на преодоление составляющих сил трения, направленных против скоростей u, поэтому с учётом распределения мощности и веса поровну между четырьмя колёсами запишем формулу для мощности силы:

$$\frac{P}{4} = T\cos\varphi \cdot u = \frac{KMg}{4}\cos\varphi \cdot u,$$

откуда получаем соотношение

$$u = \frac{P}{KMg\cos\varphi}. \qquad (10.1.1)$$

Из условия постоянства скорости v запишем равенство сил:

$$4T\sin\varphi = F,$$

что после подстановки выражений для сил трения даёт уравнение

$$4\cdot\frac{KMg}{4}\cdot\sin\varphi = kmg,$$

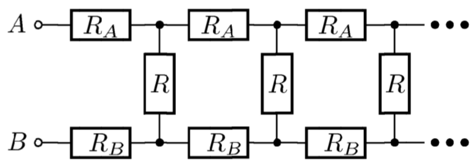
откуда фактически находим угол:

$$\sin\varphi = \frac{km}{KM}. \qquad (10.1.2)$$

Из геометрических соображений с использованием формул (10.1.1) и (10.1.2) выразим искомую скорость:

$$v = u\,\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{P\sin\varphi}{KMg(1-\sin^2\varphi)} = \frac{kmP}{g(K^2M^2 - k^2m^2)} \approx 3{,}25\ \text{м/с}.$$

10.2. **(2 балла)** Найдите напряжение U_0 между выводами A и B цепочки, состоящей из очень большого числа одинаковых звеньев из резисторов сопротивлениями R_A, R_B и R (см. рис.), если известно, что на резисторе R в звене номер $p = 10$ (считая со стороны выводов A и B) напряжение равно $U_p = 242$ В, а на резисторе R в звене номер $q = 12$ напряжение равно $U_q = 200$ В.

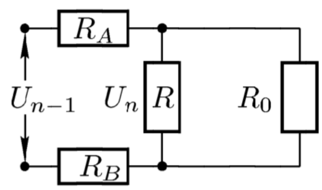


[2] Выразите искомую величину в вольтах и укажите в качестве ответа её численное значение, округлённое до трёх значащих цифр. (*С. Н. Сашов, А. В. Чудновский*)

Ответ: 628.

Решение. Добавление ещё одного звена к цепочке из очень большого количества звеньев уже практически не изменяет её общее сопротивление, поэтому обозначим его через R_0 без уточнения конкретного количества звеньев.

На рисунке изображено звено номер n, отмечено напряжение U_n на резисторе R из этого звена, вся последующая полубесконечная цепочка заменена на эквивалентный резистор сопротивлением R_0, а вместо всех предыдущих звеньев (с номерами меньшими n) отмечено лишь напряжение U_{n-1} на резисторе R из предыдущего звена, так как нашей целью будет получение связи между напряжениями на резисторах R из соседних звеньев.



Из закона Ома и свойств последовательно и параллельно соединённых резисторов можно записать уравнение

$$\frac{U_{n-1}}{R_1 + \dfrac{RR_0}{R+R_0} + R_2} = \frac{U_n}{\dfrac{RR_0}{R+R_0}},$$

откуда получаем соотношение

$$U_n = k \cdot U_{n-1},$$

где коэффициент k можно выразить через сопротивления, но мы специально не будем этого делать, чтобы продемонстрировать, что искомый ответ не зависит от этого коэффициента. Полученное соотношение означает, что последовательность напряжений является геометрической прогрессией, поэтому сразу воспользуемся формулой общего члена геометрической прогрессии:

$$U_n = U_0 \cdot k^n,$$

запись которой для двух описанных в условии случаев даёт пару уравнений

$$U_p = U_0 \cdot k^p \quad \text{и} \quad U_q = U_0 \cdot k^q,$$

из которых находим окончательный ответ:

$$U_0 = \sqrt[q-p]{\frac{U_p^q}{U_q^p}} = \sqrt[2]{\frac{(242\ \text{В})^{12}}{(200\ \text{В})^{10}}} \approx 628\ \text{В}.$$

10.3. **(2 балла)** К шарику объемом $V_1 = 2$ литра, наполненному воздухом над поверхностью океана при атмосферном давлении $p_0 = 101{,}3$ кПа и температуре $T_1 = 25°$C, прикрепили груз массой $m = 0{,}2$ кг. Затем шарик с грузом медленно начинают погружать вглубь океана.

[3] Считая, что, начиная с некоторой глубины, температура воды постоянна и равна $T_2 =$ $= 8°$C, определите, с какой глубины шарик уже не может всплыть. Ответ дайте в метрах с точностью до 1 метра.

Замечание. Массой воздуха и оболочки, а также объемом груза при решении можно пренебречь и считать ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2, а плотность океанской воды $\rho = 1030$ кг/м^3. (*А. М. Минарский, А. Б. Яковлев*)

Ответ: 87.

Решение. Так как шарик опускают медленно, то воздух в шарике находится в состоянии термодинамического равновесия. Таким образом, температура и давления внутри равны внешним, то есть тем, которые есть на соответствующей глубине. Поэтому к воздуху в шарике можно применить уравнение Клайперона–Менделеева. Тогда справедливо соотношение

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2},$$

где $p_1 = p_0$, $p_2 = p_0 + \rho g h$ и V_2 — давления и объем на глубине h. Если глубина больше критической, где сила тяжести равна силе Архимеда, то шарик не всплывет. Для определения критической глубины используем уравнение:

$$mg = \rho g V_2 \quad \Rightarrow \quad p_2 = \frac{p_1 V_1 T_2 \rho}{m T_1} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{p_1}{g\rho} \cdot \left(\frac{V_1 T_2 \rho}{m T_1} - 1 \right).$$

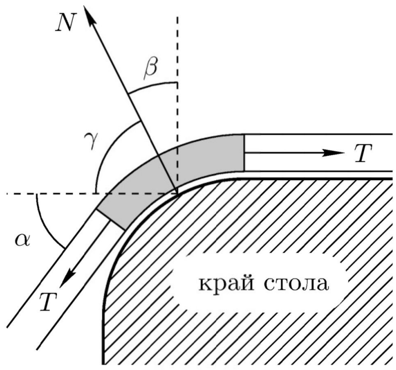
10.4. (2 балла) На двух столах лежит идеальная весомая нить (см. рисунок), так что ее часть провисает между столами, а концы закреплены держателями (черные треугольники на рисунке) непосредственно над поверхностью стола, сохраняющими свое положение в пространстве. Натяжение нити в ее горизонтальных участках $T = 120$ Н, погонная плотность $\rho = 1$ кг/м, расстояние между столами $L = 80$ см. Предполагается, что трения нет и провисание нити слабое (длина нити между столами приблизительно равна L).

[4] Какую силу надо приложить к столам, чтобы они не разъезжались? Ускорение свободного падения считайте равным $g = 9{,}8$ м/с^2. Ответ дайте с точностью до тысячных долей ньютона. (*С. Н. Сашов, А. Б. Яковлев*)

Ответ: 0,064.

Решение. Уравнение равновесия нити имеет вид

$$2N \cos\beta = \rho g L, \qquad (*)$$



где N – величина силы, с которой стол действует на нить, β — угол между силой N и вертикальной линией.

Связь между N и T имеет следующий вид: $N = 2T\cos\gamma$, где γ — угол между горизонтальной линией и силой, с которой нить действует на стол (равна векторной сумме сил натяжения в области контакта на краю стола). Как видно из рисунка, углы β и γ связаны: $\gamma = \pi/2 - \beta$. При этом угол β равен половине малого угла α между горизонтальной линией и нитью между столами вблизи угла стола. Подставляя выражение для N в ($*$) и учитывая, что $\cos\beta \approx 1$, получим

$$\sin\beta = \frac{\rho g L}{4T} \quad \Rightarrow \quad F = N\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = N\sin\beta = 2T \cdot (\sin\beta)^2 = \frac{(\rho g L)^2}{8T}.$$

10.5. (2 балла) Предположим, сила сопротивления движению судна на подводных крыльях типа «Метеор» растет пропорционально скорости $F = bv$, где $b = 1000$ кг/с. Владелец судна решил рассчитать оптимальную скорость такого судна, для максимализации дохода в единицу времени D (руб/с). При этом на «Метеоре» в среднем всегда находится $N = 80$ пассажиров, каждый из которых оплачивает билет из цены $C = 10$ руб/км (например, если он едет на

100 км, то его билет стоит 1000 руб). Пусть двигатель корабля всегда имеет кпд $\eta = 0{,}1$ и использует дизельное топливо плотности $\rho = 0{,}8$ кг/л, удельной теплоты сгорания $q = 4 \cdot 10^7$ Дж/кг и стоимости $s = 40$ руб/л; предприниматель по наивности думает, что основные его траты — это траты на топливо.

[5] Какую оптимальную скорость он получит? Посчитайте ответ в м/с с точностью до 1 м/с. **Замечание.** Считайте, что основной расход топлива судна идет при движении по трассе с постоянной высокой скоростью, а траты на разгон и торможение малосущественны.

(*С. Н. Сашов, А. М. Минарский*)

Ответ: 32.

Решение. Доход предпринимателя (по наивному представлению) — это разность между платой P, которую он получает с пассажиров и теми тратами Т, что он потратит на топливо. Доход в единицу времени:

$$D = \frac{P - T}{t}. \qquad (10.5.1)$$

Пусть судно прошло путь $L = vt$. Тогда от N пассажиров владелец получит плату

$$P = N \cdot CL = NCvt. \qquad (10.5.2)$$

Механическая работа двигателя судна против силы сопротивления при этом будет равна

$$A = F \cdot L = bv \cdot vt = bv^2t.$$

Она же равна $\eta \cdot Q = \eta q m$, где m — масса сгоревшего топлива. Приравняв, получим

$$m = \frac{bv^2t}{\eta q}.$$

Тогда траты владельца судна на топливо

$$T = s \cdot V = \frac{s \cdot m}{\rho} = \frac{sbv^2t}{\eta q \rho}. \qquad (10.5.3)$$

Подставив (10.5.2) и (10.5.3) в (10.5.1), получим:

$$D = NC \cdot v - \left(\frac{sb}{\eta q \rho}\right) \cdot v^2. \qquad (10.5.4)$$

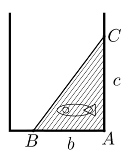
Зависимость в формуле (10.5.4) от скорости v имеет вид параболы $D = \beta \cdot v - \alpha \cdot v^2$. Её нули будут при $v = 0$ и $v = \beta/\alpha$, а максимум, как известно, находится посередине при значении $v = \beta/2\alpha$. Подставим, согласно формуле (10.5.4), нужные

$$\alpha = \frac{sb}{\eta q \rho}, \quad \beta = NC,$$

мы получим

$$v = \frac{1}{2} \cdot \frac{NC \cdot \eta q \rho}{sb} = \frac{1}{2} \cdot \frac{80 \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}1 \cdot 4 \cdot 107 \cdot 0{,}8}{40 \cdot 1000} = 32\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

10.6. **(2 балла)** На дороге Москва–Петербург пустили поезд «Сапсан–Экстрим» для любителей экстремальных ощущений. Едучи в поезде, один такой любитель обнаружил, что аквариум с его любимой рыбкой (тоже поневоле экстремалкой) выглядит так, как показано на рисунке. При этом $b = 50$ см, $c = 120$ см.



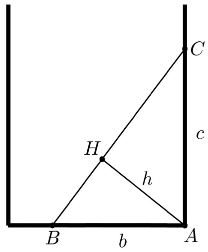
[6] Найдите в этот момент ускорение поезда (ответ дайте в м/с^2 с точностью до 1 м/с^2).

[7] Найдите максимальное давление воды в аквариуме (ответ дайте в Па с точностью до 10 Па).

Замечание. Для удобства расчетов и точности проверки вашего ответа считайте ускорение силы тяжести $g = 10$ м/с^2, давление воздуха в поезде $P_0 = 100000$ Па, плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3. (*С. Н. Сашов, А. М. Минарский*)

Ответы: [6] 24. **[7]** 112000.

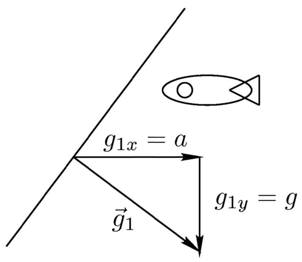
Решение [6]. Перейдем в систему отсчета поезда. В ней кажущееся ускорение силы тяжести g_1 (см. рис.) будет направлено перпендикулярно поверхности жидкости, и его вертикальная компонента g_{1_y} равна g, а горизонтальная равна по величине ускорению поезда a (и противоположна по направлению: если поезд ускоряется влево, все предметы в нем прижимаются к правой стене). Из подобия (сравните с рис. ниже):



$$\frac{g_{1_x}}{g_{1_y}} = \frac{AC}{AB} = \frac{c}{b} \quad \Rightarrow \quad a = g_{1_x} = \frac{c}{b} \cdot g_{1_y} = \frac{12}{5} \cdot g = 24\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Решение [7]. Дополнительное давление, создаваемое водой в аквариуме, равно $\rho g_1 h$, где h — глубина воды вдоль направления g_1. Наибольшая глубина аквариума, очевидно, в точке А, $h = AH$ (см. рис.). Из подобия (снова сравните рисунки):

$$\frac{g_1}{g_{1_y}} = \frac{AC}{AH} = \frac{c}{h},$$



откуда $g_1 \cdot h = g_{1_y} \cdot c = g \cdot c$, и окончательно, максимальное давление

$$P = P_0 + \rho g_1 h = P_0 + \rho g c = 100000 + 1000 \cdot 10 \cdot 1{,}2 = 112000 \text{ Па}.$$

10.7. (2 балла) Между двумя средневековыми стенами домов, сближающимися вверху, с небольшим углом между ними $\alpha = 0{,}20$ была зажата пружина с нерастянутой длиной $L_0 = 2$ м, массой $M = 6$ кг и коэффициентом жесткости $k = 2500$ Н/м. В начальный момент сжатие составляет 2% от L_0. Когда пружину поместили в верхнем положении на высоте H = 16 м, она начала скользить вниз под действием силы тяжести.

[8] Какую скорость приобрела пружина в момент отрыва, если коэффициент трения пружины о стенки $\mu = 0{,}4$? Ответ дайте в м/с с точностью до одной десятой.

Замечание. Считайте $g = 10$ м/с^2; пружина достаточно жесткая, чтобы прогиб её под своим весом при скольжении не учитывать. (*С. Н. Сашов, А. М. Минарский, А. Б. Яковлев*)

Ответ: 8,7.

Решение. Если наклон стенок мал, то если пружина сжата на расстояние x, то силы реакции опоры стенок направлены горизонтально и компенсируют силу упругости в обеих точках касания:

$$\text{ось } X: \qquad N - kx = 0 \quad \Rightarrow \quad N = kx.$$

По вертикали при скольжении действуют две силы трения $F_{\text{тр}} = \mu N = \mu k x$, и уравнение движения:

$$\text{ось } Y(\text{вниз}): \qquad Ma = Mg - 2F_{\text{тр}} = Mg - 2\mu k x.$$

По мере опускания и уменьшения сжатия пружины, сила трения линейно убывает и при отрыве, когда сжатие $x = 0$, становится равной нулю. Тем самым средняя сила трения

$$\langle F_{\text{тр}} \rangle = \frac{1}{2} \cdot \mu k x_{\max},$$

где $x_{\max}$ — максимальное сжатие на высоте H, и 2 силы трения на всем пути до соскальзывания L совершают работу

$$A = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \mu k x_{\max} \cdot L.$$

Поэтому пружина получает кинетическую энергию:

$$\frac{Mv^2}{2} = U - A,$$

где $U = MgL$ — изменение потенциальной энергии на пути L.

$$x_{\max} = L_0 \cdot 0{,}02 = 2 \cdot 0{,}02 = 0{,}04.$$

Так как угол α мал, то

$$L = \frac{x_{\max}}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{x_{\max}}{\alpha} = \frac{0{,}04 \cdot 180}{0{,}2 \cdot \pi}$$

(отметим, что L меньше, чем H). Подставим данные в уравнение сохранения энергии:

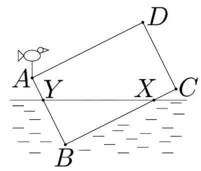
$$(6 \cdot 10 - 0{,}4 \cdot 2500 \cdot 0{,}04) \cdot \frac{0{,}04 \cdot 180}{0{,}2 \cdot \pi} = \frac{6 \cdot v^2}{2} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{240}{\pi}} = 8{,}7\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Замечание. дополнительные данные не потребовались, но можно их учесть, чтобы проверить малость наклона стенок. На высоте H будет начало скольжения:

$$FR = Mg - 2\mu k x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{Mg}{2\mu k} = \frac{10 \cdot 10}{2 \cdot 0{,}4 \cdot 2500} = 0{,}05\ \text{м},$$

то есть при опускании на $H - h = 6{,}4$ м стены расходятся всего на 5 см.

10.8. (4 балла) На середину ребра AA' плавающего прямоугольного куска пенопласта $ABCDA'B'C'D'$ села птица массы $m = 90$ г (см. рис., точки A и A', B и B', C и C', D и D' совмещены).

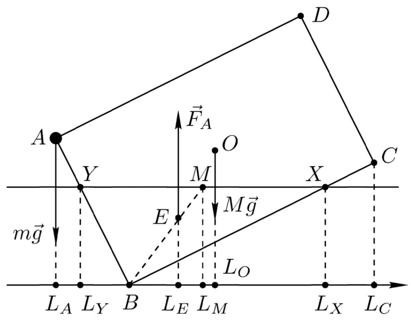


Размеры куска $AA' = a = 12$ см, $AB = b = 10$ см, $BC = c = 15$ см, плотность пенопласта $\rho = 0{,}2$ г/см^3. В результате кусок наклонился.

[9] Найдите расстояние $BX = x$, на которое теперь сторона BC погружена в воду. Ответ округлите и дайте в см с точностью до сотых долей. (*С. Н. Сашов, А. М. Минарский*)

Ответ: устойчивое равновесие: 11,45 см **(4 балла)**; неустойчивое равновесие: 8,66 см **(3 балла)**.

Решение. Масса куска $M = \rho \cdot V = \rho \cdot abc = 0{,}2 \cdot 12 \cdot 10 \cdot 15 = 360$ г. Так как птица села на середину ребра AA', то кусок погрузился симметрично и объем погружения — это треугольная призма $BXYB'X'Y'$ (см.рис. — совпали X с X', Y с Y'), так что $BB' = XX' = YY' = a$ ($= AA'$). Пусть $BX = x$, $BY = y$, тогда величина объем погружения куска



$$V_{\text{п}} = S(BXY) \cdot BB' = \left(\frac{1}{2} \cdot xy\right) \cdot a,$$

а сила Архимеда

$$F_A = \rho_{\text{в}} \cdot V_{\text{п}} \cdot g = \frac{1}{2} \cdot xy \cdot a \cdot \rho_{\text{в}} \cdot g. \tag{10.8.1}$$

Из уравновешенности сил тяжести и силы Архимеда:

$$F_A = Mg + mg, \tag{10.8.2}$$

откуда $F_A/g = M + m = 360 + 90 = 450$ г. Подставляя числа в (10.8.1), получим

$$xy = 75 \tag{10.8.3}$$

(все длины меряем в см).
Напишем правило рычага (равновесие моментов) для сил Mg, mg и F_A. Это правило можно рассматривать относительно любой точки, например B. Спроектируем на горизонтальную ось все нужные расстояния от точки B (см. рис.) и получим:

$$mg \cdot L_A = Mg \cdot L_O - F_A \cdot L_E$$

или, учитывая (10.8.2) и разделив на g:

$$m \cdot L_A = M \cdot L_O - (M + m) \cdot L_E \tag{10.8.4}$$

(точка E, где приложена сила F_A при виде сбоку, есть центр масс треугольника BXY, то есть пересечение медиан: $BE = 2/3 \cdot BM$, где M — середина XY).
Далее мы выразим расстояния L_A, L_O и L_E в формуле (10.8.4) через x и y. Сначала заметим из подобия прямоугольных треугольников BXL_X, BYL_Y и BXY, что

$$\begin{cases} \dfrac{L_X}{x} = \dfrac{x}{d} \\ \dfrac{L_Y}{y} = \dfrac{y}{d} \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} L_X = \dfrac{x^2}{d} \\ L_Y = \dfrac{y^2}{d} \end{cases}$$

где $d = XY$. Далее

$$\frac{L_A}{L_Y} = \frac{BA}{BY} = \frac{b}{y}, \qquad \frac{L_C}{L_X} = \frac{BC}{BX} = \frac{c}{x},$$

поэтому

$$L_A = L_Y \cdot \frac{b}{y} = \frac{y^2}{d} \cdot \frac{b}{y} = \frac{yb}{d}, \qquad L_C = L_X \cdot \frac{c}{x} = \frac{x^2}{d} \cdot \frac{c}{x} = \frac{xc}{d}. \tag{10.8.5}$$

Точка O — середина AC (центр масс пенопласта), поэтому

$$L_O = \frac{L_C - L_A}{2}$$

(здесь разность потому что L_C и L_A направлены в разные стороны от B), или

$$L_O = \frac{\dfrac{xc}{d} - \dfrac{yb}{d}}{2}. \tag{10.8.6}$$

Наконец, точка M — середина XY, поэтому

$$L_M = \frac{L_Y - L_X}{2} = \frac{\dfrac{x^2}{d} - \dfrac{y^2}{d}}{2} \quad \Rightarrow \quad L_E = \frac{L_M}{2} = \frac{\dfrac{x^2}{d} - \dfrac{y^2}{d}}{3}. \tag{10.8.7}$$

Подставим выражения для длин (10.8.5), (10.8.6) и (10.8.7) в (10.8.4) и умножим полученное уравнение на d:

$$m \cdot yb = \frac{M \cdot (xc - yb)}{2} - \frac{(M+m) \cdot (x^2 - y^2)}{3}.$$

Подставив числа:

$$90 \cdot 10y = \frac{360(15x - 10y)}{2} - \frac{450 \cdot (x^2 - y^2)}{3},$$

и затем, упростив и разделив на -150, получим:

$$18(x - y) = x^2 - y^2. \tag{10.8.8}$$

Совместное решение системы уравнений (10.8.3) и (10.8.8) дает положительные решения (x, y), вписывающиеся в прямоугольник $BC \times BA = c \times b = 15 \times 10$:

$$\text{А) } x = y = \sqrt{75} \qquad \text{или} \qquad \text{Б) } x = 9 + \sqrt{6}, y = 9 - \sqrt{6}.$$

При наклоне пенопласта из горизонтального положения первым достигается равновесие $x > y$, оно и является устойчивым. Возможно равновесие $x = y$, но оно не является устойчивым: при малейшем отклонении, если случайно станет $x > y$, то система перейдет в первое, устойчивое положение, а если станет $x < y$, то птица опрокинет пенопласт.

10.9. **(1 балл)** В широкий и очень глубокий аквариум, наполненный водой, погружена вертикально длинная круглая цилиндрическая пористая труба длиной $L = 10$ м, в которую с расходом $\Phi = 0{,}01$ м^3/с начинают подавать воду, вытекающую симметрично через поры во все стороны. Вблизи середины трубы перед началом эксперимента на расстоянии $r_0 = 5$ см от оси трубы, точно друг над другом на небольшом расстоянии находятся две маленькие пушинки. После начала подачи воды через время $t = 1000$ с пушинки оказываются каждая на той же высоте, что и вначале.

[10] На каком расстоянии от оси трубы они находятся? Ответ дайте в сантиметрах с точностью до 1 см.

Замечание. Радиус трубки значительно меньше r_0 и при решении его можно не учитывать.

(*С. Н. Сашов*)

Ответ: 57.

Решение. Так как скорость вытекания воды из пористой трубы пропорциональна разности давлений, то она не зависит от глубины. В точках, далеких от концов трубы, скорость вытекающей из трубы воды будет направлена горизонтально. Для простоты предположим, что это справедливо всех глубин. До начала процесса объем жидкости между осью трубы и цилиндрической поверхностью, на которой находятся пушинки, равен $L\pi r_0^2$.

Через время t объем жидкости между осью трубы и цилиндрической поверхностью, на которой находятся пушинки, равен $L\pi r^2$, а изменение объема связано с поступившим объемом воды Φt. Таким образом

$$L\pi r^2 = L\pi r_0^2 + \Phi t \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{r_0^2 + \frac{\Phi t}{\pi L}}.$$

Международная физическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2021–2022 учебный год. Отборочный этап

Решения задач для 11 класса

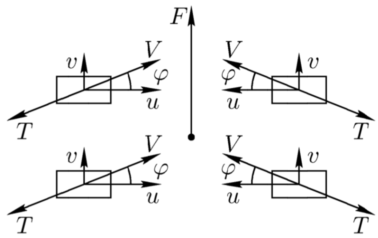
11.1. (2 балла) У экспериментального автомобиля массой $M = 1100$ кг все четыре колеса ведущие, причём передние и задние колёса могут вращаться в противоположные стороны (навстречу друг другу). Вес автомобиля и мощность $P = 100$ кВт двигателя распределяются между всеми колёсами поровну. Руль автомобиля не поворачивают, а передние и задние колёса запускают навстречу друг другу с максимальной скоростью. Коэффициенты трения колёс автомобиля и подошв человека об асфальт равны соответственно $K = 0{,}3$ и $k = 0{,}5$.

[1] С какой максимальной скоростью v сможет толкать этот автомобиль достаточно сильный человек массой $m = 70$ кг, если он будет давить на автомобиль вдоль прямой, проходящей через его центр масс параллельно осям колёс?
Выразите искомую величину в м/с и укажите в качестве ответа её численное значение, округлённое до трёх значащих цифр.

Замечание. Перераспределение веса автомобиля между колёсами из-за воздействия человека не учитывайте. (*С. Н. Сашов, А. В. Чудновский*)

Ответ: 3,25.

Решение. На рисунке показан вид сверху на четыре колеса автомобиля:



- V и u — скорости движения нижней точки каждого колеса относительно земли и кузова автомобиля соответственно,
- φ — угол между этими скоростями,
- F — сила давления человека,
- T — силы трения скольжения, действующие со стороны асфальта на колёса.

Мощность двигателя автомобиля расходуется на преодоление составляющих сил трения, направленных против скоростей u, поэтому с учётом распределения мощности и веса поровну между четырьмя колёсами запишем формулу для мощности силы:

$$\frac{P}{4} = T\cos\varphi\cdot u = \frac{KMg}{4}\cos\varphi\cdot u,$$

откуда получаем соотношение

$$u = \frac{P}{KMg\cos\varphi}. \tag{11.1.1}$$

Из условия постоянства скорости v запишем равенство сил:

$$4T\sin\varphi = F,$$

что после подстановки выражений для сил трения даёт уравнение

$$4\cdot\frac{KMg}{4}\cdot\sin\varphi = kmg,$$

откуда фактически находим угол:

$$\sin\varphi = \frac{km}{KM}. \tag{11.1.2}$$

Из геометрических соображений с использованием формул (11.1.1) и (11.1.2) выразим искомую скорость:

$$v = u\,\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{P\sin\varphi}{KMg(1-\sin^2\varphi)} = \frac{kmP}{g(K^2M^2 - k^2m^2)} \approx 3{,}25\ \text{м/с}.$$

11.2. **(3 балла)** Тонкое проволочное кольцо радиусом $r = 7$ м из материала плотностью $\rho = 8400$ кг/м^3, удельной теплоёмкостью $c = 385\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot{}^\circ\text{C}}$ и удельным сопротивлением $\mu = 0{,}016$ Ом $\cdot$ мм^2/м вращается (не обязательно равномерно) в однородном постоянном магнитном поле индукцией $B = 0{,}3$ Тл вокруг оси, проходящей через центр кольца и лежащей в его плоскости. В некоторый момент в процессе вращения плоскость кольца была перпендикулярна вектору индукции магнитного поля, а через время $\tau = 5$ с кольцо оказалось повернуто на 180°.

[2] Найдите наименьшее возможное увеличение температуры $\Delta T_{\min}$ кольца в процессе поворота. Выразите искомую величину в кельвинах и укажите в качестве ответа её численное значение, округлённое до трёх значащих цифр.

[3] Найдите наименьшую угловую скорость $\omega_{\min}$ в процессе поворота, который привёл к наименьшему росту температуры кольца. Выразите искомую величину в обратных секундах и укажите в качестве ответа её численное значение, округлённое до трёх значащих цифр.

Замечание. Индуктивность кольца и теплообмен с окружающей средой не учитывайте. Считайте, что кольцо может вращаться с любой сколь угодно большой угловой скоростью и иметь сколь угодно большое угловое ускорение, то есть не нужно учитывать ни прочность материала, ни даже ограничения теории относительности на скорость тел.

(*С. Н. Сашов, А. В. Чудновский*)

Ответы: **[2]** 17,0. **[3]** 0,4.

Решение [2]. Пусть $\varphi \in [0;\pi]$ — угол поворота от начального положения, тогда поток магнитного поля через кольцо и возникающая из-за изменения потока ЭДС индукции имеют соответственно вид

$$\Phi = \pi r^2 B \cos\varphi,$$

$$\mathcal{E} = -\dot{\Phi} = \pi r^2 B\omega \sin\varphi,$$

где $\omega = \dot{\varphi}$ — мгновенная угловая скорость вращения кольца. Пусть S — площадь поперечного сечения проволоки, тогда по формуле для удельного сопротивления выразим общее сопротивление кольца:

$$R = \frac{2\pi r\mu}{S}.$$

По законам Ома и Джоуля–Ленца найдём выделившееся в кольце количество теплоты:

$$Q = \frac{1}{R}\int\limits_0^\tau \mathcal{E}^2 dt = \frac{S}{2\pi r\mu}\int\limits_0^\tau \mathcal{E}^2 dt.$$

Свяжем изменение температуры ΔT с величиной Q через объём $V = 2\pi r S$ и массу $m = \rho V$ кольца:

$$Q = cm\Delta T = 2\pi r S\rho c\Delta T,$$

откуда после подстановки формулы Q получаем выражение

$$\Delta T = \frac{Q}{2\pi r S\rho c} = \frac{1}{4\pi^2 r^2\mu\rho c}\int\limits_0^\tau \mathcal{E}^2 dt.$$

По условию вращение может быть неравномерным, то есть величины φ, ω и зависящая от них $\mathcal{E}$ являются неизвестными функциями времени, поэтому преобразуем формулу для ΔT с использованием усреднения по времени, которое будем обозначать угловыми скобками:

$$\Delta T = \frac{\tau}{4\pi^2 r^2\mu\rho c}\cdot\left\langle\mathcal{E}^2\right\rangle, \text{ где } \left\langle\mathcal{E}^2\right\rangle = \frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau \mathcal{E}^2 dt.$$

Поскольку известно общее изменение потока $\Delta\Phi = -2\pi r^2 B$ за общее время τ, то можно найти среднюю ЭДС

$$\mathcal{E}_0 = \langle \mathcal{E} \rangle = -\frac{\Delta\Phi}{\tau} = \frac{2\pi r^2 B}{\tau}$$

и выразить средний квадрат ЭДС через $\mathcal{E}_0$ и мгновенное отличие $F = \mathcal{E} - \mathcal{E}_0$ текущей ЭДС от средней:

$$\left\langle \mathcal{E}^2 \right\rangle = \left\langle (\mathcal{E}_0 + F)^2 \right\rangle = \mathcal{E}_0^2 + 2\mathcal{E}_0 \langle F \rangle + \left\langle F^2 \right\rangle = \mathcal{E}_0^2 + \left\langle F^2 \right\rangle.$$

После подстановки последнего выражения получаем функцию

$$\Delta T = \frac{\tau}{4\pi^2 r^2 \mu\rho c} \cdot \left(\mathcal{E}_0^2 + \left\langle F^2 \right\rangle\right),$$

минимум которой достигается при $F = 0$ (так как наименьшее значение квадрата — это ноль), откуда находим ответ на первый вопрос:

$$\Delta T_{\min} = \frac{\tau}{4\pi^2 r^2 \mu\rho c} \cdot \mathcal{E}_0^2 = \frac{r^2 B^2}{\mu\rho c\tau} \approx 17{,}0 \text{ К}.$$

Решение [3]. Условие $F = 0$ приводит к уравнению $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0$, из которого после подстановки получаем зависимость мгновенной угловой скорости от угла поворота:

$$\omega = \frac{2}{\tau \sin\varphi},$$

откуда находим ответ на второй вопрос:

$$\omega_{\min} = \frac{2}{\tau (\sin\varphi)_{\max}} = \frac{2}{\tau} = 0{,}4 \text{ с}^{-1}.$$

Замечание. В начальный и конечный моменты времени (когда $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$) требуемая угловая скорость стремится к бесконечности, но соответствующая оговорка в условии задачи позволяет нам не учитывать недостижимость требуемой угловой скорости в граничные моменты времени, полагая, что кратковременное нарушение условия $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0$ не сильно изменит $\Delta T_{\min}$.

11.3. (3 балла) Через бесконечную пластину толщиной $h = 5$ м, изготовленную из материала с удельным сопротивлением $\rho = 1{,}2$ мкОм · м и коэффициентом теплопроводности $k = 11$ Вт/(м · К), течёт ток плотностью $j = 30$ А/м^2. На обеих поверхностях пластины поддерживают одну и ту же постоянную температуру.

[4] Найдите разность ΔT между максимальной и минимальной температурами внутри пластины в установившемся режиме. Зависимость сопротивления от температуры не учитывайте. Выразите искомую величину в микрокельвинах и укажите в качестве ответа её численное значение, округлённое до трёх значащих цифр.

Ответ: 307. (*С. Н. Сашов, А. В. Чудновский*)

Решение. Направим ось x перпендикулярно пластине и выберем начало координат в середине пластины, тогда в силу симметрии будет достаточно найти зависимость температуры $T(x)$ при $x \in [0; h/2]$, так как при $x \in [-h/2; 0]$ она будет точно такой же. Обозначим через S площадь произвольного куска пластины, тогда мощность тепловыделения в объёме V внутри этого куска в пределах от середины пластины до некоторой положительной координаты x выразим через плотность мощности w по закону Джоуля–Ленца:

$$P = w \cdot V = j^2 \rho \cdot Sx.$$

В установившемся режиме ровно эта мощность должна отводиться за счёт теплопроводности в положительном направлении оси x (в отрицательном направлении в силу симметрии будет отводиться тепло, выделяющееся в области с отрицательными координатами):

$$P = -kS \cdot \frac{dT}{dx},$$

где отношение дифференциалов dT/dx — это градиент температур, а общий минус отражает тот факт, что температура уменьшается с ростом координаты.
Приравняв полученные выражения для P и упростив выражения, получим дифференциальное уравнение

$$dT = -\frac{\rho j^2}{k} \cdot x dx.$$

Поскольку тепло выделяется в толще пластины и отводится наружу, максимальная температура $T_{\max}$ будет в середине пластины при $x = 0$, а минимальная $T_{\min}$ — на её поверхностях при $x = h/2$, поэтому для нахождения ΔT можно не выписывать общее решение, а сразу взять определённый интеграл:

$$\int\limits_{T_{\min}}^{T_{\max}} dT = -\int\limits_{h/2}^{0} \frac{\rho j^2}{k} \cdot x dx,$$

откуда получаем окончательный ответ:

$$\Delta T = T_{\max} - T_{\min} = \frac{\rho j^2}{k} \cdot \frac{x^2}{2}\bigg|_0^{h/2} = \frac{\rho j^2 h^2}{8k} \approx 307 \text{ мкК}.$$

11.4. (2 балла) Пластина в форме правильной треугольной призмы $ABCA'B'C'$ высотой $h = 7$ мм изготовлена из материала с удельным сопротивлением $\rho = 1$ мкОм · м. Через грань $ABB'A'$ призмы втекает ток силой $I = 5$ А равномерно по площади этой грани, точно такой же по силе ток так же равномерно втекает через грань $BCC'B'$, а вот через грань $ACC'A'$ ток вытекает из пластины, причём тоже равномерно по площади соответствующей грани.

[5] Найдите выделяющуюся в пластине тепловую мощность P. Выразите искомую величину в микроваттах и укажите в качестве ответа её численное значение, округлённое до четырёх значащих цифр.

(*И. В. Савельев, С. Н. Сашов, А. В. Чудновский*)

Ответ: 6186.
Решение. Сперва напомним вывод редко встречающейся в школьных задачах дифференциальной формы записи закона Джоуля–Ленца через более знакомую ученикам интегральную форму

$$W = I^2 R,$$

где W — тепловая мощность электрического тока, I — сила тока, R — сопротивление проводника. Пусть S и l — площадь поперечного сечения и длина цилиндрического проводника, ρ — его удельное сопротивление, j — плотность тока, тогда с помощью формул

$$I = jS \quad \text{и} \quad R = \rho \cdot \frac{S}{l}$$

преобразуем закон Джоуля–Ленца к виду

$$W = j^2 \rho S l.$$

Тепловая мощность W выделяется в объёме проводника $V = Sl$, поэтому из определения $w = W/V$ для плотности мощности получим выражение

$$w = j^2 \rho,$$

которое и является дифференциальной формой записи закона Джоуля–Ленца. Отметим, что сокращение S и l означает, что плотность мощности не будет зависеть от формы и размера проводника, если плотность тока везде одинакова.

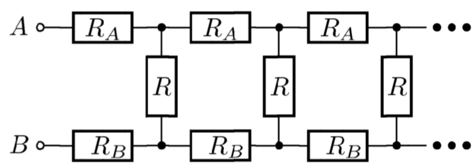
Теперь вернёмся к исходной задаче. Из симметрии следует, что направление тока в каждой точке пластины будет перпендикулярно «особенной» грани $ACC'A'$, через которую вытекает суммарный ток силой $2I$. Все токи равномерно распределены по площади граней, поэтому плотность тока во всех точках пластины будет одинакова:

$$j = \frac{2I}{ah},$$

где a — длина стороны основания пластины, а расчёт выполнен для грани $ACC'A'$, так как именно она перпендикулярна току. Искомую общую мощность найдём через плотность мощности w тока и объём V пластины:

$$P = w \cdot V = j^2\rho \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a^2h = \frac{I^2\rho\sqrt{3}}{h} \approx 6186 \text{ мкВт}.$$

11.5. (2 балла) Найдите напряжение U_0 между выводами A и B цепочки, состоящей из очень большого числа одинаковых звеньев из резисторов сопротивлениями R_A, R_B и R (см. рис.), если известно, что на резисторе R в звене номер $p = 10$ (считая со стороны выводов A и B) напряжение равно $U_p = 242$ В, а на резисторе R в звене номер $q = 12$ напряжение равно $U_q = 200$ В.

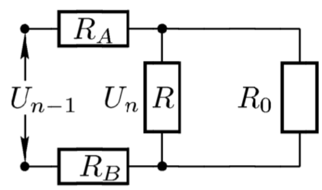


[6] Выразите искомую величину в вольтах и укажите в качестве ответа её численное значение, округлённое до трёх значащих цифр. (*С. Н. Сашов, А. В. Чудновский*)

Ответ: 628.

Решение. Добавление ещё одного звена к цепочке из очень большого количества звеньев уже практически не изменяет её общее сопротивление, поэтому обозначим его через R_0 без уточнения конкретного количества звеньев.

На рисунке изображено звено номер n, отмечено напряжение U_n на резисторе R из этого звена, вся последующая полубесконечная цепочка заменена на эквивалентный резистор сопротивлением R_0, а вместо всех предыдущих звеньев (с номерами меньшими n) отмечено лишь напряжение U_{n-1} на резисторе R из предыдущего звена, так как нашей целью будет получение связи между напряжениями на резисторах R из соседних звеньев.



Из закона Ома и свойств последовательно и параллельно соединённых резисторов можно записать уравнение

$$\frac{U_{n-1}}{R_1 + \dfrac{RR_0}{R+R_0} + R_2} = \frac{U_n}{\dfrac{RR_0}{R+R_0}},$$

откуда получаем соотношение

$$U_n = k \cdot U_{n-1},$$

где коэффициент k можно выразить через сопротивления, но мы специально не будем этого делать, чтобы продемонстрировать, что искомый ответ не зависит от этого коэффициента. Полученное соотношение означает, что последовательность напряжений является геометрической прогрессией, поэтому сразу воспользуемся формулой общего члена геометрической прогрессии:

$$U_n = U_0 \cdot k^n,$$

запись которой для двух описанных в условии случаев даёт пару уравнений

$$U_p = U_0 \cdot k^p \quad \text{и} \quad U_q = U_0 \cdot k^q,$$

из которых находим окончательный ответ:

$$U_0 = \sqrt[q-p]{\frac{U_p^q}{U_q^p}} = \sqrt[2]{\frac{(242\ \text{В})^{12}}{(200\ \text{В})^{10}}} \approx 628\ \text{В}.$$

11.6. (3 балла) На некоторой далекой планете поверхность очень хорошо проводит тепло и при этом ее можно считать упругой с коэффициентом жесткости $k = 10^6$ Н/м. Однажды ночью у космонавта отключился обогрев скафандра и чтобы замедлить остывание он стал подпрыгивать.

[7] Как высоко космонавт должен подпрыгивать, чтобы замедлить остывание в 10 раз? Ответ дайте с точностью до 0,1 см.

Замечание. Масса космонавта вместе со скафандром $m = 100$ кг, ускорение свободного падения на планете $g = 4$ м/с^2. Считайте, что все теплопотери происходят при контакте подошв с поверхностью планеты. (*С. Н. Сашов, А. М. Минарский, А. Б. Яковлев*)

Ответ: 4,0.

Решение. Когда космонавт вдавливает подошвы в грунт возникает упругая сила, пропорциональная величине деформации. Поэтому движение космонавта при контакте с грунтом это колебание, а время контакта равно половине периода

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

За счет приобретенной скорости v к концу полупериода колебаний космонавт совершает прыжок на высоту h, которую можно определить из уравнения сохранения энергии

$$mgh = \frac{mv^2}{2}.$$

Длительность прыжка равна удвоенному времени подъема на высоту h, которое можно получить из равенства нулю скорости в верхней точке: $v - gt = 0$. Таким образом, время полета

$$t_2 = \frac{2v}{g} = \sqrt{\frac{8h}{g}}.$$

Так как по условию задачи $9T/2 = t_2$, то

$$h = \frac{81\pi^2 mg}{8k}.$$

11.7. (2 балла) Между двумя средневековыми стенами домов, сближающимися вверху, с небольшим углом между ними $\alpha = 0{,}20$ была зажата пружина с нерастянутой длиной $L_0 = 2$ м, массой $M = 6$ кг и коэффициентом жесткости $k = 2500$ Н/м. В начальный момент сжатие составляет 2% от L_0. Когда пружину поместили в верхнем положении на высоте H = 16 м, она начала скользить вниз под действием силы тяжести.

[8] Какую скорость приобрела пружина в момент отрыва, если коэффициент трения пружины о стенки $\mu = 0{,}4$? Ответ дайте в м/с с точностью до одной десятой.

Замечание. Считайте $g = 10$ м/с^2; пружина достаточно жесткая, чтобы прогиб её под своим весом при скольжении не учитывать. (*С. Н. Сашов, А. М. Минарский, А. Б. Яковлев*)

Ответ: 8,7.

Решение. Если наклон стенок мал, то если пружина сжата на расстояние x, то силы реакции опоры стенок направлены горизонтально и компенсируют силу упругости в обеих точках касания:

$$\text{ось } X: \qquad N - kx = 0 \quad \Rightarrow \quad N = kx.$$

По вертикали при скольжении действуют две силы трения $F_{\text{тр}} = \mu N = \mu kx$, и уравнение движения:

$$\text{ось } Y (\text{вниз}): \qquad Ma = Mg - 2F_{\text{тр}} = Mg - 2\mu kx.$$

По мере опускания и уменьшения сжатия пружины, сила трения линейно убывает и при отрыве, когда сжатие $x = 0$, становится равной нулю. Тем самым средняя сила трения

$$\langle F_{\text{тр}} \rangle = \frac{1}{2} \cdot \mu k x_{\max},$$

где $x_{\max}$ — максимальное сжатие на высоте H, и 2 силы трения на всем пути до соскальзывания L совершают работу

$$A = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \mu k x_{\max} \cdot L.$$

Поэтому пружина получает кинетическую энергию:

$$\frac{Mv^2}{2} = U - A,$$

где $U = MgL$ — изменение потенциальной энергии на пути L.

$$x_{\max} = L_0 \cdot 0{,}02 = 2 \cdot 0{,}02 = 0{,}04.$$

Так как угол α мал, то

$$L = \frac{x_{\max}}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{x_{\max}}{\alpha} = \frac{0{,}04 \cdot 180}{0{,}2 \cdot \pi}$$

(отметим, что L меньше, чем H). Подставим данные в уравнение сохранения энергии:

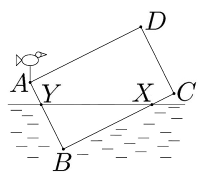
$$(6 \cdot 10 - 0{,}4 \cdot 2500 \cdot 0{,}04) \cdot \frac{0{,}04 \cdot 180}{0{,}2 \cdot \pi} = \frac{6 \cdot v^2}{2} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{240}{\pi}} = 8{,}7 \ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Замечание. дополнительные данные не потребовались, но можно их учесть, чтобы проверить малость наклона стенок. На высоте H будет начало скольжения:

$$FR = Mg - 2\mu kx = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{Mg}{2\mu k} = \frac{10 \cdot 10}{2 \cdot 0{,}4 \cdot 2500} = 0{,}05 \text{ м},$$

то есть при опускании на $H - h = 6{,}4$ м стены расходятся всего на 5 см.

11.8. **(4 балла)** На середину ребра AA' плавающего прямоугольного куска пенопласта $ABCDA'B'C'D'$ села птица массы $m = 90$ г (см. рис., точки A и A', B и B', C и C', D и D' совмещены).

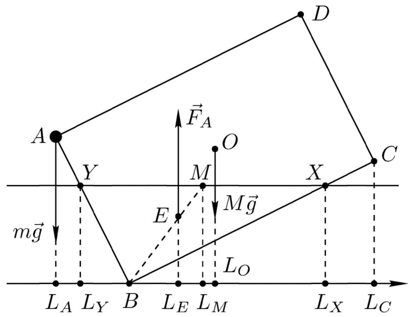


Размеры куска $AA' = a = 12$ см, $AB = b = 10$ см, $BC = c = 15$ см, плотность пенопласта $\rho = 0{,}2$ г/см^3. В результате кусок наклонился.

[9] Найдите расстояние $BX = x$, на которое теперь сторона BC погружена в воду. Ответ округлите и дайте в см с точностью до сотых долей. (*С. Н. Сашов, А. М. Минарский*)

Ответ: устойчивое равновесие: 11,45 см **(4 балла)**; неустойчивое равновесие: 8,66 см **(3 балла)**.

Решение. Масса куска $M = \rho \cdot V = \rho \cdot abc = 0{,}2 \cdot 12 \cdot 10 \cdot 15 = 360$ г. Так как птица села на середину ребра AA', то кусок погрузился симметрично и объем погружения — это треугольная призма $BXYB'X'Y'$ (см.рис. — совпали X с X', Y с Y'), так что $BB' = XX' = YY' = a$ $(= AA')$. Пусть $BX = x$, $BY = y$, тогда величина объем погружения куска



$$V_\text{п} = S(BXY) \cdot BB' = \left(\frac{1}{2} \cdot xy\right) \cdot a,$$

а сила Архимеда

$$F_A = \rho_\text{в} \cdot V_\text{п} \cdot g = \frac{1}{2} \cdot xy \cdot a \cdot \rho_\text{в} \cdot g. \tag{11.8.1}$$

Из уравновешенности сил тяжести и силы Архимеда:

$$F_A = Mg + mg, \tag{11.8.2}$$

откуда $F_A/g = M + m = 360 + 90 = 450$ г. Подставляя числа в (11.8.1), получим

$$xy = 75 \tag{11.8.3}$$

(все длины меряем в см).

Напишем правило рычага (равновесие моментов) для сил Mg, mg и F_A. Это правило можно рассматривать относительно любой точки, например B. Спроектируем на горизонтальную ось все нужные расстояния от точки B (см. рис.) и получим:

$$mg \cdot L_A = Mg \cdot L_O - F_A \cdot L_E$$

или, учитывая (11.8.2) и разделив на g:

$$m \cdot L_A = M \cdot L_O - (M + m) \cdot L_E \tag{11.8.4}$$

(точка E, где приложена сила F_A при виде сбоку, есть центр масс треугольника BXY, то есть пересечение медиан: $BE = 2/3 \cdot BM$, где M — середина XY).

Далее мы выразим расстояния L_A, L_O и L_E в формуле (11.8.4) через x и y. Сначала заметим из подобия прямоугольных треугольников BXL_X, BYL_Y и BXY, что

$$\begin{cases} \dfrac{L_X}{x} = \dfrac{x}{d} \\ \dfrac{L_Y}{y} = \dfrac{y}{d} \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} L_X = \dfrac{x^2}{d} \\ L_Y = \dfrac{y^2}{d} \end{cases}$$

где $d = XY$. Далее

$$\frac{L_A}{L_Y} = \frac{BA}{BY} = \frac{b}{y}, \qquad \frac{L_C}{L_X} = \frac{BC}{BX} = \frac{c}{x},$$

поэтому

$$L_A = L_Y \cdot \frac{b}{y} = \frac{y^2}{d} \cdot \frac{b}{y} = \frac{yb}{d}, \qquad L_C = L_X \cdot \frac{c}{x} = \frac{x^2}{d} \cdot \frac{c}{x} = \frac{xc}{d}. \tag{11.8.5}$$

Точка O — середина AC (центр масс пенопласта), поэтому

$$L_O = \frac{L_C - L_A}{2}$$

(здесь разность потому что L_C и L_A направлены в разные стороны от B), или

$$L_O = \frac{\frac{xc}{d} - \frac{yb}{d}}{2}. \tag{11.8.6}$$

Наконец, точка M — середина XY, поэтому

$$L_M = \frac{L_Y - L_X}{2} = \frac{\frac{x^2}{d} - \frac{y^2}{d}}{2} \quad \Rightarrow \quad L_E = \frac{L_M}{2} = \frac{\frac{x^2}{d} - \frac{y^2}{d}}{3}. \tag{11.8.7}$$

Подставим выражения для длин (11.8.5), (11.8.6) и (11.8.7) в (11.8.4) и умножим полученное уравнение на d:

$$m \cdot yb = \frac{M \cdot (xc - yb)}{2} - \frac{(M+m) \cdot (x^2 - y^2)}{3}.$$

Подставив числа:

$$90 \cdot 10y = \frac{360(15x - 10y)}{2} - \frac{450 \cdot (x^2 - y^2)}{3},$$

и затем, упростив и разделив на -150, получим:

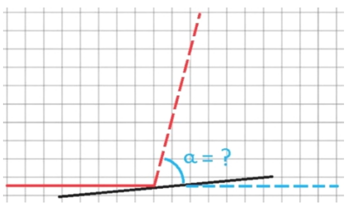
$$18(x - y) = x^2 - y^2. \tag{11.8.8}$$

Совместное решение системы уравнений (11.8.3) и (11.8.8) дает положительные решения (x, y), вписывающиеся в прямоугольник $BC \times BA = c \times b = 15 \times 10$:

$$\text{А) } x = y = \sqrt{75} \qquad \text{или} \qquad \text{Б) } x = 9 + \sqrt{6}, y = 9 - \sqrt{6}.$$

При наклоне пенопласта из горизонтального положения первым достигается равновесие $x > y$, оно и является устойчивым. Возможно равновесие $x = y$, но оно не является устойчивым: при малейшем отклонении, если случайно станет $x > y$, то система перейдет в первое, устойчивое положение, а если станет $x < y$, то птица опрокинет пенопласт.

11.9. **(3 балла)** Расположенное в вакууме зеркало (изображено черной линией на рисунке) наклонено к горизонтальной оси x под углом, тангенс которого равен $1/10$. Зеркало движется строго вертикально по оси y со скоростью, равной $9/10$ скорости света. Плоская световая волна, распространяющаяся вдоль оси x (изображена на рисунке красной сплошной линией), падает на зеркало и отражается. Луч света, определяющий направление движения световой волны после отражения, обозначен на рисунке пунктирной красной линией.



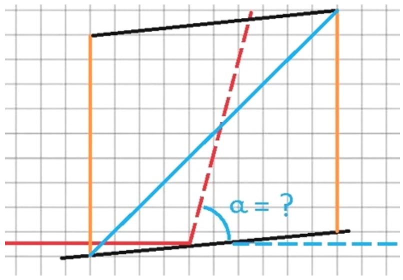
[10] Определите угол α между направлением отраженной волны (изображена на рисунке красной пунктирной линией) и осью x. Выразите ответ как неотрицательное число в градусах с точностью до одного градуса.

Замечание. Учтите, что световая волна распространяется в вакууме всегда с одинаковой по величине скоростью, независимо от направления распространения и любых других обстоятельств.

(С. Н. Сашов)

Ответ: $90°$.

Решение. На рисунке справа левая вертикальная линия отмечает положение фронта падающей световой волны (в реальности он может быть уже, но понятно, что построение будет просто масштабировано при желании) в некий условно «начальный» момент времени. Правая вертикальная линия — это положение фронта падающей волны через некотрый временной промежуток, в принципе, произвольный, но выбранный как есть для удобства построения; в частности, он выбран так, чтобы свет прошел за это время горизонтально 10 клеток. Нижняя и верхняя наклонные черные линии — это положения зеркала в эти же моменты. Как видим, при построении эти четыре линии образуют параллелограмм, а его диагональ, нарисованная голубым, наклонена под углом 45°.



Из двух вершин параллелограмма, соединенных голубой диагональю, левая представляет собой пересечение фронта падающей волны с зеркалом в «начальный» момент времени, а правая вершина — в «конечный» момент. Понятно, что в промежуточные моменты времени точка пересечения движущегося фронта падающей волны с движущимся зеркалом будет находиться на этой голубой диагонали, также очевидно, что эта точка будет двигаться вдоль этой диагонали равномерно.

Исходя из принципа Гюйгенса или просто из соображения непрерывности или локальной причинности, отраженная плоская волна будет также содержать эту точку. Исходя хотя бы просто из симметрии (или обратимости времени в оптике при желании), очевидно, что отраженная волна должна располагаться под тем же углом к голубой диагонали, что и падающая (и направления фронтов, и перпендикулярные им векторы скорости распространения света для падающей и отраженной волны; в общем — всё симметрично для этих двух волн относительно этой прямой).

А значит, отраженный луч так же наклонен к этой плоскости под 45°, как и падающий, а значит ответ: 90°.