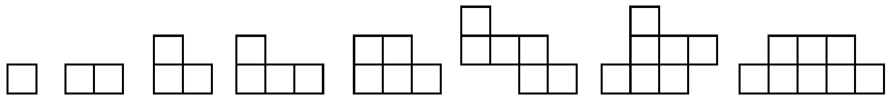
Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2021–2022 учебный год. Отборочный этап

Решения и критерии оценивания

Полностью верное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.

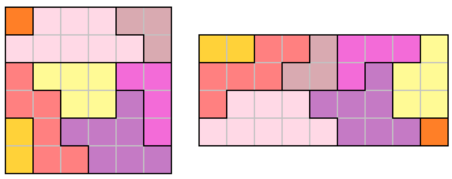
Задачи для 5 класса

1. Используя каждую из фигур по одному разу, составьте из них прямоугольник. Фигуры можно поворачивать и переворачивать.



(*А. В. Копчук*)

Решение. Два примера показаны на рисунке (есть и другие примеры).



Критерии. Есть хотя бы один пример — 7 баллов.

2. Учитель попросил Катю и Лену написать по кругу 4 натуральных числа, сумма которых равна 8, но никакие несколько (от 1 до 3) подряд идущих чисел не дают в сумме 4. Обе девочки выполнили задание. Могло ли оказаться, что Лена написала какое-то число, которое Катя не написала? (*С. П. Павлов*)

Ответ: Да, например, Лена написала 1232, а Катя — 1115.

Критерии. 7 баллов за верный пример. При ответе «нет» — 0 баллов независимо от продвижений.

3. У числа 1234 произведение цифр на 14 больше, чем сумма цифр (произведение цифр равно $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24$, а сумма цифр равна $1+2+3+4 = 10$). Придумайте число, у которого произведение цифр на 2021 больше, чем сумма цифр. (*А. А. Теслер*)

Решение. Например, 11 двоек и 5 единиц в любом порядке (сумма 27, произведение $2^{11} = 2048$).

4. Проверяющий олимпиады после тяжёлого трудового дня покидает рабочий кабинет, освещение в котором работает в нескольких режимах. Когда проверяющий вышел из комнаты, он плотно закрыл за собой дверь и встал у кнопки, которая переключает эти режимы (режимы переключаются по порядку от первого до последнего, после последнего идет выключение, а затем все заново). Но, к сожалению, проверяющий очень устал и забыл точное количество режимов, а помнит лишь, что их было не больше 5 (не считая выключенного состояния) и что сейчас включён первый режим. Помогите проверяющему выключить свет в кабинете, если он не может видеть, какой режим включён. (*А. Б. Владимиров*)

Решение. Например, щёлкнуть $\text{НОК}(1,2,3,4,5,6)-1 = 59$ раз. Впрочем, подходит любое общее кратное этих чисел минус 1.

Критерии. Достаточно привести любое подходящее количество раз (а не все возможные). 0 баллов за решение в предположении, что режимов ровно 5. Ход решения верный, но общее кратное вычислено неверно — снимается 2 балла. В ответе не вычтена единица — снимается 1 балл. Указано верное количество переключений (например, 59) без каких-либо пояснений, что это за число — 1 балл. Решение в предположении, что нужно найти НОК чисел 1, 2, 3, 4, 5, то есть не учтено, что выключенное состояние может оказаться шестым режимом — снимается 2 балла.

5. Четыре группы студентов (по 26 человек в каждой) решили отправиться в поездку на автобусах, а затраты распределить поровну. Транспортная компания предоставляет автобусы двух видов — на 30 пассажиров (по одной цене) и на 50 пассажиров (по более высокой цене). Сначала студенты решили заказать автобусы как можно дешевле, и вышло, что каждому нужно заплатить по 250 рублей. Потом выяснилось, что ни одна из групп не хочет оказаться разделённой между двумя автобусами, и с учётом этого каждому студенту пришлось бы заплатить по 300 рублей. В конце концов по одному студенту в каждой из групп отказались от поездки. Сколько теперь придётся заплатить каждому из студентов? (*Л. С. Корешкова*)

Решение. В первом случае (на 104 студента) самый дешёвый вариант либо $50+30+30$, либо $4 \cdot 30$. Но вариант $4 \cdot 30$ подходит и во втором случае, значит, он дороже. В первом случае потрачено 26000 рублей, во втором 31200 рублей, значит, автобус на 50 мест на 5200 дешевле, чем два автобуса на 30 мест. В третьем случае самый дешёвый вариант $50 \cdot 2$, он стоит ещё на 5200 дешевле первого, то есть 20800, или 208 на человека.

Ответ: 208 рублей.

6. На клетчатой бумаге нарисован квадрат 5×5 (в нём всего 25 клеток). Дима, делая разрезы только по линиям, хочет разделить квадрат на несколько (более одной) фигурок, у каждой из которой периметр (вычисляется в клетках) равен P. При каких $P < 25$ Диме удастся это сделать? (*С. П. Павлов*)

Решение. Во-первых, периметр не может быть нечётным. Действительно, обойдём фигурку по периметру. Вертикальных линий чётное количество, поскольку при таком обходе мы поднимемся и спустимся одинаковое количество раз; аналогично и горизонтальных линий чётное количество.

Минимальный чётный периметр, 4, имеет клетка 1×1, поэтому $P = 4$ подходит. Периметр 6 бывает только у прямоугольника 2×1, но на такие прямоугольники квадрат не разбивается, поскольку число клеток (25) нечётно. Все чётные числа от 8 до 24 достижимы (см. рисунок).

4 8 10 12 14

16 18 20 22 24

Ответ: при $P = 4, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24$.

Критерии. 3 балла — за нахождение всех верных примеров (−1 балл за каждый потерянный верный ответ, в том чисел за неверный пример к верному ответу).

4 балла — за доказательство, что других ответов нет: 1 балл за доказательство того, что периметр 6 невозможен; 1 балл за упоминание и ещё 2 балла за доказательство того, что нечётные периметры невозможны.

Только верный перечень ответов без каких-либо пояснений — 1 балл.

7. Андрей задумал два различных натуральных числа. На одной из карточек он записал их сумму, а на другой — удвоенное меньшее число. После этого одну из карточек он дал Боре, а другую Вите.
Боря: Увы, я не знаю, какая у меня карточка.
Витя: Я тоже не знаю, какая у меня карточка.
Боря: Зато я теперь знаю.
У кого оказалась карточка с суммой? (*К. А. Кноп*)

Решение.

Ясно, что у обоих мальчиков чётные числа, иначе бы имеющий нечётное число сразу понимал, что у него **не** карточка с удвоенным числом. Также ясно, что ни у кого из них не 2, так как видящий 2 сразу понимает, что у него $2 \cdot 1$. Кроме того, у Вити не может быть 4, так как вариант суммы $1+3$ для него невозможен (в этом варианте Боря бы видел 2, а значит, знал бы, какая у него карточка) и остается только вариант $2+2$. Поэтому у Вити чётное число, не меньшее 6, а у Бори чётное, не меньшее 4.

В каких случаях Боря на втором высказывании может понять, какая у него карточка? Если у Бори на карточке написано $2N$, то он должен иметь возможность выбрать между вариантом $N+N$ и списком вариантов $K+(2N-K)$ при $K<N$. Выбрать он может только в том случае, когда предыдущее высказывание Вити исключает одну из этих возможностей. Но единственные варианты, которые можно исключить, это $1+(2N-1)$ и $2+(2N-2)$, потому что после слов Вити выяснилось, что у него не 2 и не 4. Так как этого достаточно для того, чтобы исключить все варианты с различными суммами, то $2N=4$ или $2N=6$; Боря понимает, что задуманы 2 или 3 и еще какое-то число, а ему досталась карточка с удвоенным наименьшим. Следовательно, карточка с суммой — у Вити.

Критерии. Сам ответ оценивается в 0 баллов. За замечание, что сумма должна быть чётной, даётся 1 балл. За нахождение какого-нибудь варианта исходных чисел, дающего нужные ответы ребят, даётся 2 балла. Полностью рассмотрен вариант с карточкой 4 у Бори — 3 балла. Полностью рассмотрен вариант с карточкой 6 у Бори — 3 балла.

Задачи для 6 класса

1. См. задачу 1 для 5 класса.

2. По кругу написаны 6 натуральных чисел, сумма которых равна 12. Катя заметила, что какие бы несколько (от 1 до 5) подряд идущих чисел ни взять, их сумма не равна 6. Чему может равняться максимальное из чисел? (Укажите все возможные варианты ответа на этот вопрос и объясните, почему эти варианты возможны, а все остальные — нет.) (*С. П. Павлов*)

Решение. Возможные следующие ответы: 7 (711111), 5 (252111), 4 (143112), 3(313131).

Остальные ответы невозможны:

— если одно из чисел больше 7, то остальные 5 хотя бы 1, и сумма больше 12;

— если одно из чисел равно 6, то сумма остальных равна 6;

— если максимальное число равно 2, то эти числа — обязательно шесть двоек, и три из них в сумме дают 6;
— равняться 1 максимальное число не может.

Ответ: 3, 4, 5 или 7.

Критерии. За верное рассмотрение каждого из следующих 7 случаев: 2, 3, 4, 5, 6, 7, > 7 даётся по 1 баллу. Например, все верные ответы с примерами, но без доказательств невозможности остальных вариантов дают 4 балла.
За верный перечень ответов без обоснований — 1 балл.

3. См. задачу 3 для 5 класса.

4. В некотором месяце было пять понедельников, в следующем пять вторников, а в следующем — пять сред. В какой день недели начался год, в котором всё это было?
(*А. А. Теслер*)

Решение. Заметим, что в двух подряд идущих месяцах каждый день недели встречается не более 9 раз (поскольку их суммарная длина меньше 9 недель). Значит, во втором месяце было 4 понедельника и 4 среды. Такое возможно, только если он начался во вторник (иначе перед каждым из пяти вторников в нём будет понедельник, и получится 5 понедельников) и закончился во вторник (иначе получится 5 сред). Значит, в среднем месяце 29 дней, то есть это високосный февраль. 1 февраля было вторником, значит, 1 января — субботой. Заметим, что такие годы действительно существуют (например, 2000, 2028, 2056).

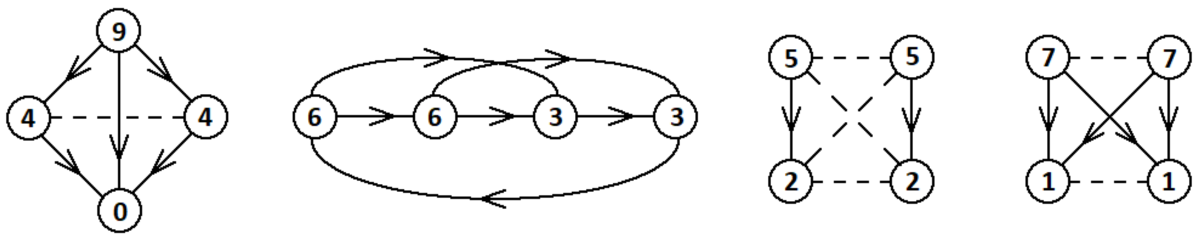
Ответ: в субботу.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Ответ+пример — 2 балла (в качестве примера можно указать номер года без дополнительных комментариев, а можно написать, что подходят январь–март високосного года). Доказывать существование високосного года, начинающегося с субботы, не требуется.

5. См. задачу 5 для 5 класса.

6. В чемпионате по футболу участвуют 32 команды, разбитые на 8 групп по 4 команды. В каждой группе каждая команда играет с каждой из трёх остальных по одному разу. За выигрыш в матче даётся 3 очка, за поражение 0, за ничью 1 (то есть суммарно команда может заработать от 0 до 9 очков). Обязательно ли после окончания групповых игр найдутся 5 команд, у которых поровну очков?
(*А. А. Теслер*)

Решение. Нет. Например, можно дважды повторить каждую из групп, показанных на рисунке. (В кружках указано количество набранных очков. Стрелки проведены от выигравших команд к проигравшим, а пунктирные линии — между командами, сыгравшими вничью.)



Критерии. При ответе «да» — 0 баллов независимо от наличия продвижений.

7. См. задачу 7 для 5 класса.

Задачи для 7 класса

1. См. задачу 6 для 5 класса.
2. См. задачу 4 для 5 класса.
3. Угол между часовой и минутной стрелками часов составляет 70°. Через сколько минут он в следующий раз станет равен 70°? Обе стрелки вращаются непрерывно. (*А. А. Теслер*)

   Решение. Заметим, что за 12 часов минутная стрелка проходит на 11 кругов больше часовой. Значит, угловая скорость минутной стрелки относительно часовой составляет $\dfrac{11}{12}$ кругов в час, или $\dfrac{11}{12}\cdot 360^\circ = 330^\circ$ в час.
   Если минутная стрелка отставала от часовой на 70°, то в следующий раз ей надо обгонять её на 70°, то есть пройти относительно неё 140°. Для этого потребуется $\dfrac{140}{330}$ часа, или $\frac{140}{330}\cdot 60 = 25\frac{5}{11}$ минут.
   Если же минутная стрелка опережала часовую на 70°, то в следующий раз она будет от неё отставать на 70°. Для этого ей надо пройти $360^\circ - 140^\circ = 220^\circ$, на это нужно $\dfrac{220}{330}$ часа, или 40 минут.

   Ответ: через 40 минут или через $25\frac{5}{11}$ минуты.

   Критерии. За каждый ответ без доказательства — 1 балл. За каждый ответ с верным доказательством — 3 балла. Второй ответ указан не точно, а округлённо — снимается 1 балл.

4. См. задачу 4 для 6 класса.
5. Типография определяет стоимость печати книги так: складывает стоимость обложки со стоимостью каждой из страниц, а результат округляет вверх до ближайшего целого числа рублей (то есть, например, если получилось 202 рубля 1 копейка, то это округляется до 203 рублей). Известно, что стоимость книги объёмом 104 страницы составляет 134 рубля, а книги объёмом 192 страницы — 181 рубль. Сколько стоит печать обложки, если она стоит целое число рублей, а стоимость одной страницы составляет целое число копеек? (*П. Д. Муленко*)

   Решение. До округления получалось, что первая книга стоит от 133.01 до 134 рублей, а вторая — от 180.01 до 181. Тогда разность их цен может составлять от $180.01 - 134 = 46.01$ до $181 - 133.01 = 47.99$. Эта разность в точности равна стоимости 88 страниц ($192 - 104 = 88$). Значит, одна страница стоит от $46,01/88 = 0,522\ldots$ до $47,99/88 = 0.545\ldots$ рублей. Поскольку страница стоит целое число копеек, то возможны лишь варианты 53 и 54 копейки.

   Если страница стоит 53 копейки, то страницы первой книги стоят $0.53\cdot 104 = 55.12$ рублей, тогда обложка должна стоить 78 рублей. Страницы второй книги стоят $0.53\cdot 192 = 101.76$, и обложка должна стоить 79 рублей — противоречие.
   Если страница стоит 54 копейки, то страницы первой книги стоят $0.54\cdot 104 = 56.16$ рублей, тогда обложка должна стоить 77 рублей. Страницы второй книги стоят $0.54\cdot 192 = 103.68$, и обложка вновь должна стоить 77 рублей — этот случай подходит.

   Ответ: 77 рублей.

   Критерии. 1 балл за ответ. 2 балла за ответ+пример. 3 балла, если не учтено округление при решении. Не доказано, что 53 не подходит — -2 балла. Не вычислена стоимость самой обложки при полностью верном обосновании стоимости страницы — -1 балл

6. См. задачу 6 для 6 класса.
7. См. задачу 7 для 5 класса.

Задачи для 8 класса

1. У числа 1234 произведение цифр на 14 больше, чем сумма цифр (произведение цифр равно $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$, а сумма цифр равна $1 + 2 + 3 + 4 = 10$). А сколько разрядов содержит наименьшее натуральное число, у которого произведение цифр на 2021 *меньше*, чем сумма цифр? (*А. А. Теслер*)

   Решение. Построим пример, в котором одна из цифр числа равна нулю, тогда произведение цифр равно 0, а сумма 2021. Минимальное количество ненулевых цифр равно $[2021 : 9] + 1 = 225$ (224 девятки и одна пятёрка), то есть всего 226 цифр.
   Докажем, что меньше 226 цифр в числе быть не может. Если цифр 224 или менее, то их сумма не превосходит $224 \cdot 9 = 2016$ — слишком мало. Если цифр 225, то их сумма может быть от 2021 до 2025, причём для этого каждая цифра должна быть не меньше 5; но тогда произведение гораздо больше 4.

   Ответ: 226.

   Критерии. Рассмотрен только случай, когда одна из цифр равна 0, и для него верно найден ответ (иначе говоря, доказана невозможность 224 и возможность 226, но пропущен случай 225) — 3 балла. Только доказано, что 224 цифры быть не может — 1 балл. Только ответ (226), без каких-либо комментариев про минимальность — 1 балл.
   Ответ меньше верного на 1 или 2 при верных рассуждениях (что вызвано неверным округлением и/или неучётом цифры 0) — снимается 1 или 2 балла соответственно.

2. При каких натуральных n выражение $45^n + 988 \cdot 2^n$ делится на 2021? (*Л. С. Корешкова*)

   Решение. Заметим, что 2021 равно произведению простых чисел 43 и 47, то есть делимость на 2021 равносильна делимости на 43 и 47. Воспользуемся формулами
   $(a^n - b^n) = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$,
   $(a^n + b^n) = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \ldots - ab^{n-2} + b^{n-1})$ при нечётных n.

   Во-первых, $45^n + 988 \cdot 2^n = (45^n - 2^n) + 989 \cdot 2^n$ кратно 43, поскольку $45^n - 2^n$ и 989 делятся на 43.

   Во-вторых, $45^n + 988 \cdot 2^n = (45^n + 2^n) + 987 \cdot 2^n$. При нечётных n это кратно 47, поскольку $45^n + 2^n$ и 987 делятся на 47. При чётных n второе слагаемое кратно 47, а первое нет. Действительно, $45^{2k} + 2^{2k} \equiv (-2)^{2k} + 2^{2k} \equiv 2^{2k} + 2^{2k} \equiv 2^{2k+1} \not\equiv 0 \pmod{47}$.
   (Запись $a \equiv b \pmod{m}$ означает, что числа a и b имеют одинаковый остаток от деления на m. Мы использовали известное свойство: если $a \equiv b \pmod{m}$, то $a^n \equiv b^n \pmod{m}$.)

   Ответ: при всех нечётных n.

   Критерии. Разобран только случай нечётного n — 3 балла. Если доказано только для чётных — 4 балла.

3. См. задачу 3 для 7 класса.

4. Переставляя цифры в трёхзначном числе, можно получить до 6 различных чисел. Какое наибольшее количество из них могут образовывать арифметическую прогрессию? (Арифметическая прогрессия — это последовательность, в которой каждое число больше предыдущего на одну и ту же величину, например: 57, 63, 69, 75.) (*В. П. Федотов*)

Ответ: 3.

Решение. Пример: 127, 172, 217 (есть и другие).

Докажем, что прогрессия из 4 чисел невозможна (тогда более длинная тем более). Пусть в прогрессии четыре числа, тогда два из них в одной сотне (обозначим их $\overline{abc}$ и $\overline{acb}$). Тогда разность прогрессии меньше 100, и все её члены находятся в последовательных сотнях (двух или трёх). Если числа занимают три разных сотни (с начальными цифрами a, b, c), то получается, что эти цифры последовательные, но тогда разность между $\overline{abc}$ и $\overline{acb}$ не больше 18, и элементы прогрессии не могут оказаться в трёх разных сотнях. Если же числа находятся всего в двух сотнях, то они имеют вид $\overline{abc}$, $\overline{acb}$, $\overline{bac}$, $\overline{bca}$. Заметим, что разность между двумя (не обязательно соседними) членами прогрессии $m = |\overline{abc} - \overline{bac}|$ делится на 10. Простой перебор расположения элементов прогрессии показывает, что разность между двумя другими числами ($\overline{acb}$ и $\overline{bca}$) либо равна m, либо втрое больше, либо втрое меньше, то есть тоже делится на 10; но последние цифры у них разные (если бы какие-то из цифр a, b, c совпадали, то чисел было бы не более трёх).

Другое доказательство невозможности 4 чисел. Ясно, что данные цифры различны. Какие-то два из четырёх чисел имеют одинаковые средние цифры, так что разность между ними $\overline{xyz} - \overline{zyx}$ делится на 99. Эта разность равна разности прогрессии, умноженной на число от 1 до 3, то есть разность прогрессии делится на 11. Также какие-то два из чисел прогрессии ($\overline{abc}$ и $\overline{acb}$) имеют одинаковые старшие цифры, тогда разность между ними равна $9(b - c)$, а в то же время она должна делиться на 11, что невозможно, ведь разность между неравными цифрами не делится на 11.

Критерии. 2 балла за пример, 5 за доказательство невозможности последовательностей длины 4. Доказательство невозможности, в котором разобраны не все возможные случаи, оценивается не более, чем в 2 балла.

5. Отметим на шахматной доске центры всех клеток (центры белых клеток — белыми точками, центры чёрных — чёрными). Сколько существует равнобедренных прямоугольных треугольников, все вершины которых — отмеченные точки одного цвета?

(*Л. С. Корешкова*)

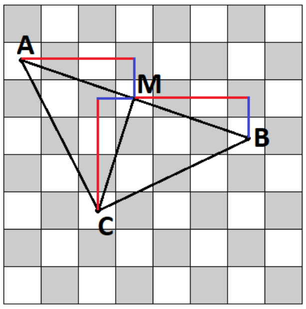
Решение. Приведём решение, не требующее перебора вариантов, хотя и не самое простое.

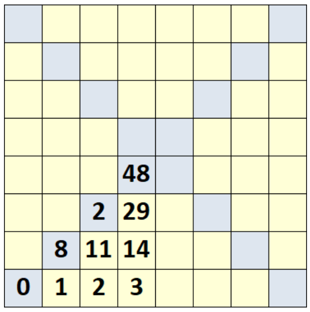
Лемма. Такие треугольники — это в точности равнобедренные прямоугольные треугольники, у которых центр гипотенузы и все вершины являются центрами клеток.

Доказательство леммы. Будем обозначать координаты точки A через x_A и y_A, и аналогично для остальных точек. Считаем, что координаты центров клеток принимают значения от 1 до 7. Обозначим $|x_A - x_M| = m$, $|y_A - y_M| = n$. Тогда $|x_B - x_M| = |y_c - y_M| = m$, $|y_B - y_M| = |x_C - x_M| = n$, поскольку отрезки AM и CM равны и перпендикулярны.

1. Пусть у треугольника все вершины и середина гипотенузы являются центрами граней. Заметим, что M и A одного цвета тогда и только тогда, когда $|x_A - x_M| + |y_A - y_M|$ чётно, то есть $m + n$ чётно. То же верно и для пар M и B, M и C. Это значит, что точки A, B, C все одного цвета (либо того же, что M, либо противоположного).

2. Пусть у треугольника все вершины одного цвета. Совпадение цветов A и B означает, что $2g + 2h$ чётно, то есть $g + h$ — целое. Теперь рассмотрим отрезок AC: его проекции на оси (при $m \geqslant n$) равны $g-h$ и $g+h$, откуда получается, что $(g-h)+(g+h)$ чётное, то есть g целое. Заключаем, что и h целое. Значит, M — центр клетки. ***Лемма доказана.***





Теперь будем считать треугольники, описанные в лемме. Для каждой возможной середины гипотенузы (x, y) найдём явную формулу для количества треугольников. Из соображений симметрии можно считать, что $0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 3$.

Если $(x+a, y+b)$ — вершина с прямым углом, то оставшиеся вершины имеют координаты $(x-b, y+a)$ и $(x+b, y-a)$. Надо найти количество целочисленных пар (a, b) таких, что все эти три точки имеют координаты от 0 до 7. Получаем 6 двойных неравенств (по одному на каждую координату каждой точки), из которых с учётом условия $0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 3$ остаются только $-x \leqslant b \leqslant x$ и $-x \leqslant a \leqslant y$. Так что всего есть $(2x+1)(x+y+1)-1$ треугольников, вариант $a=b=0$ мы исключаем.

Суммируя эти количества по всем клеткам, получаем
$8(1+2+3+11+14+29)+4(0+8+24+48)=800$.

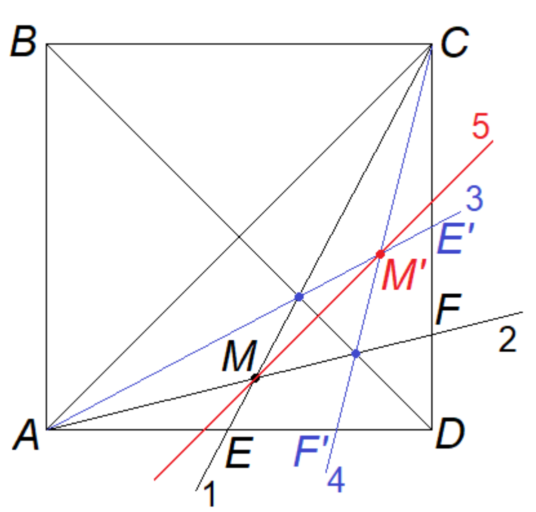
Критерии. Во всех переборных решениях — каждый пропущенный случай штраф в 1 балл. Если в переборе нет логики, то сразу 0 баллов за решение.

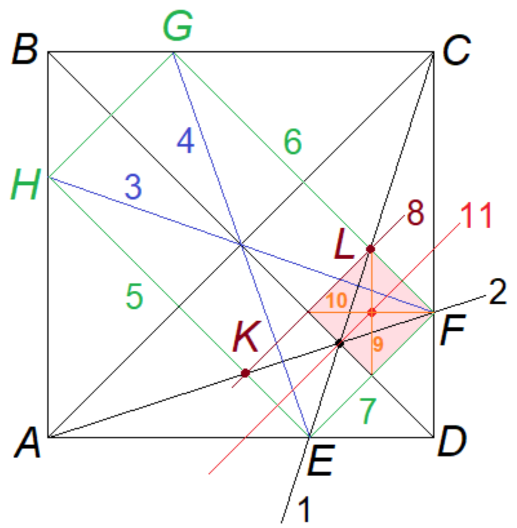
6. На плоскости нарисован квадрат $ABCD$ и точка M внутри него. Придумайте, как с помощью одной линейки, проведя не более 20 линий, провести через M прямую, параллельную диагонали AC. (На линейке нет делений, на ней нельзя ничего отмечать — можно только проводить прямую через две данные точки.) (*А. А. Теслер*)

Решение. Проведём сначала диагонали квадрата. Будем сразу считать, что M не лежит на AC (иначе исходная прямая — сама AC).

Научимся для начала отражать произвольную точку S, лежащую (например) на стороне AD, относительно BD. Пусть CS пересекает BD в точке T, тогда AT пересекает CD в точке S', симметричной S.

Теперь проведём через M прямые CE и AF, где E и F лежат на сторонах квадрата (см. первый рисунок). Отразим точки E и F относительно диагонали BD, как описано выше, получим точки E' и F'. Тогда прямые AE' и CF' пересекаются в точке M', симметричной M относительно BD.





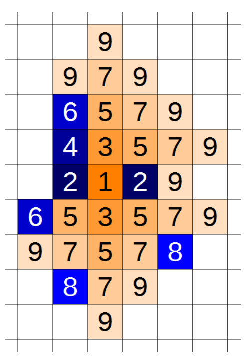
Отдельно надо рассмотреть случай, когда M лежит на BD (см. второй рисунок) — тогда M и M' совпадают, так что предыдущий алгоритм не подходит. Не умаляя общности, пусть M является внутренней точкой отрезка OD (где O — точка пересечения диагоналей квадрата). Проведём через M прямые CE и DF, как мы это делали в предыдущем случае. Пусть прямые EO и FO пересекают стороны квадрата в точках G и H соответственно, тогда $EFGH$ — прямоугольник (поскольку его вершины симметричны друг другу относительно диагоналей квадрата, то стороны параллельны этим диагоналям, то есть перпендикулярны между собой). Пусть теперь $EH \cap AF = K$, $FG \cap CE = L$, тогда K и L симметричны относительно BD, значит, $KLFE$ — прямоугольник. Диагональ BD делит его на два равных прямоугольника. Найдём точку пересечения одного из них и обозначим за M', тогда прямая MM' содержит среднюю линию прямоугольника $KLFE$, то есть параллельна AC.

Критерии. Построение выполнено для всех случаев, кроме лежащих на BD — 4 балла.

Не упомянут случай $M \in AC$ — баллы не снимаются.

Приведено верное построение, но доказательство верности полностью отсутствует — не более 3 баллов.

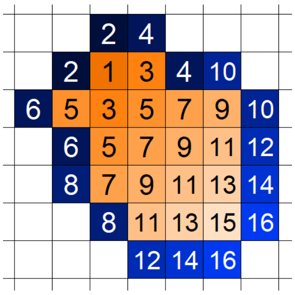
7. В городе, представляющем собой бесконечную клетчатую плоскость, есть n пожарных. Однажды в одной из клеток города возникает пожар. В следующую минуту каждый пожарный может (но не обязан) защитить какую-нибудь одну ещё не горящую клетку, соседнюю с горящей. Ещё через минуту пожар распространяется на все клетки, соседние с горящими, кроме защищённых. Далее пожарные и пожар действуют по очереди. При каком минимальном n пожарные смогут локализовать пожар, то есть сделать так, чтобы он перестал распространяться?



(На рисунке показано, как могут развиваться события при $n = 2$; нечётные числа соответствуют распространению пожара, чётные — действиям пожарных.)

(Л. С. Корешкова)

Решение. Сначала докажем, что одного пожарного недостаточно. Пусть огонь начал распространяться из клетки с координатами $(0,0)$. По индукции легко проверить, что после n ходов пожарного огонь сможет захватить хотя бы одну клетку на n-й диагонали из клеток $(n,0)$, …, $(0,n)$: пожарный к этому моменту мог защитить не больше одной клетки на n-й диагонали, а у уже горящей клетки на предыдущей диагонали есть два соседа на n-й.



Двух пожарных достаточно, см. рисунок.

Критерии. Только пример — 3 балла, только оценка — 3 балла.

Задачи для 9 класса

1. Марине приснился треугольник со сторонами 9 и 4, и биссектрисой, выходящей из угла, образованного этими сторонами, длиной 6. Сможет ли Марина воплотить сон в реальность? (*Л. С. Корешкова*)

   Решение. Нет (два треугольника, полученные после проведения биссектрисы, оказываются подобными, но тогда стороны, лежащие против равных углов, не могут образовывать одну прямую).

   Критерии.

2. См. задачу 2 для 8 класса.

3. См. задачу 3 для 7 класса.

4. См. задачу 4 для 8 класса.

5. Назовём числовое множество X периодичным (с периодом $T > 0$), если для всякого $a \in X$ числа $a + T$ и $a - T$ также лежат в X. Периодично ли множество всех целых чисел, содержащих в записи цифру 5? (*А. А. Теслер*)

   Ответ: Нет.

   Решение. Пусть оно периодично с периодом T. Тогда рассмотрим такое n, что $T < 10^n$. Тогда существует такое число A в промежутке от $5 \cdot 10^n$ до $6 \cdot 10^n - 1$, что А $+ T = 6 \cdot 10^n$. Противоречие.

6. См. задачу 6 для 8 класса.

7. См. задачу 7 для 8 класса.

Задачи для 10 класса

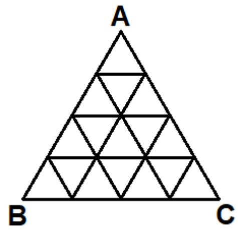
1. См. задачу 4 для 6 класса.

2. Две окружности касаются внутренним образом в точке A. AB — диаметр большей окружности, точка O — центр меньшей. Хорда BD большей окружности касается меньшей в точке C. Докажите, что $BO \cdot CD = OA \cdot BC$. (*Е. С. Голикова*)

   Решение. Угол ADB прямой, поскольку опирается на диаметр, OCB прямой по свойству касательной, значит, $AO : OB = DC : CB$ по теореме о пропорциональных отрезках.

3. См. задачу 7 для 5 класса.

4. Дана треугольная сетка, показанная на рисунке. Юный робототехник Петя посадил в точку A робота-улитку. Чтобы пройти по одному ребру сетки, улитке нужен час. На каждой развилке улитка с равной вероятностью выбирает любое из направлений (в том числе то, откуда только что пришла), а между развилками не разворачивается. Петя ушёл и вернулся ровно через 4 часа. Что более вероятно: что он увидит улитку на стороне BC или в вершине A? (*Л. С. Корешкова, А. А. Теслер*)

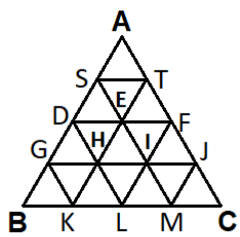


   Решение. В вершине вероятность больше. Вероятности попасть во все вершины после 1, 2, 3, 4 часа имеют вид

$$\begin{matrix} 0 \\ 1/2 \quad 1/2 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1/4 \\ 1/8 \quad 1/8 \\ 1/8 \quad 1/4 \quad 1/8 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \frac{1}{16} \\ \frac{11}{48} \quad \frac{11}{48} \\ \frac{7}{96} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{7}{96} \\ \frac{1}{32} \quad \frac{7}{96} \quad \frac{7}{96} \quad \frac{1}{32} \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \frac{11}{96} \\ \frac{49}{384} \quad \frac{49}{384} \\ \frac{113}{1152} \quad \frac{101}{576} \quad \frac{113}{1152} \\ \frac{35}{1152} \quad \frac{17}{288} \quad \frac{17}{288} \quad \frac{35}{1152} \\ \frac{1}{128} \quad \frac{23}{1152} \quad \frac{7}{288} \quad \frac{23}{1152} \quad \frac{1}{128} \end{matrix}$$

   Получаем $11/96$ для вершины и суммарно $23/288$ для стороны.



   Другой способ решения. На самом деле не обязательно считать вероятности для всех вершин.

   Чтобы попасть на сторону, улитке надо все четыре раза спускаться вниз.
   После первого хода вероятность попасть в вершины S и T составляет по $1/2$.
   После второго хода вероятность попасть в D равна $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$, в F тоже, в E: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{4}$.
   После третьего хода: в G — $\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{32}$, в J тоже, в каждую из вершин H и I — по $\frac{1}{32} + \frac{1}{24} = \frac{7}{96}$.
   После четвёртого: вероятность уйти вниз, если выходить из G или J — $\frac{1}{2}$, если из H и I — $\frac{1}{3}$. Итого $\left(\frac{1}{32} \cdot 12 + \frac{7}{96} \cdot \frac{1}{3}\right) \cdot 2 = \frac{23}{288}$.

   Чтобы попасть в вершину, улитка должна пройти по пути одного из следующих видов.
   а) $ASASA$ или $ASATA$ или $ATASA$ или $ATATA$: вероятность $\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\right) \cdot 4 = \frac{1}{16}$.

б) $ASTSA$ или $ATSTA$: вероятность $\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\right)\cdot 2=\frac{1}{64}$.
в) $ASDSA$ или $ATFTA$: вероятность $\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\right)\cdot 2=\frac{1}{64}$.
г) $ASESA$ или $ASETA$ или $ATESA$ или $ATETA$: вероятность $\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}\right)\cdot 4=\frac{1}{48}$.
Итого $\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{64}+\frac{1}{48}=\frac{22}{192}=\frac{11}{96}$.

Ответ: Более вероятно, что улитка будет в вершине A.

Критерии. Только ответ («в вершине более вероятно») не оценивается. Если в решении улитка выбирает направления по другим правилам, чем в условии, то ставится 0 баллов. Полный балл ставится уже за правильно найденные вероятности оказаться в вершине и на стороне (даже если участник забыл указать, какая из них больше).

5. См. задачу 7 для 8 класса.

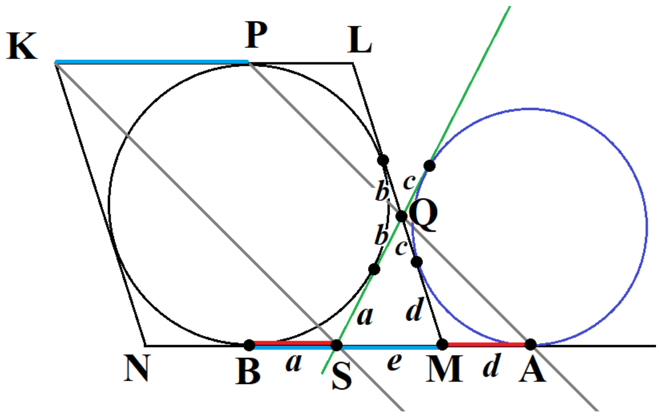
6. В ромб $KLMN$ вписана окружность, которая касается стороны LK в точке P. Через точки P и K проведены параллельные прямые до пересечения со сторонами LM и MN в точках Q и R соответственно. Докажите, что окружность касается QR.

(*Л. С. Корешкова*)

Решение. Проведём из точки Q вторую касательную к окружности, она пересечёт сторону MN в некой точке S. Докажем, что $KS||PQ$ (тогда получится, что S совпадает с R, то есть QR — касательная к окружности).

Рассмотрим вневписанную окружность треугольника QSM (см. рисунок). Пусть A — точка касания с продолжением NM. Q — центр гомотетии окружностей, поскольку это точка пересечения общих касательных; значит, $Q \in AP$.

Докажем, что $SA = KP$ (то есть что $KPAS$ — параллелограмм). Действительно, $KP = BM$ по свойствам ромба (эти отрезки симметричны относительно его центра), а $BS = MA$ по свойствам вписанных окружностей (см. рисунок: отрезки касательных к одной окружности из одной точки равны, поэтому $a+b+c=e+d$, $e+a=d+c+b$; складывая эти равенства, получаем $2a=2d$).



7. Произведение трёх положительных чисел x, y и z равно 1. Какое наименьшее значение принимает выражение $\dfrac{(x+y)(y+z)(z+x)}{x+y+z-1}$?

(*А. Р. Араб*)

Решение. Заметим, что это выражение равно 4 при $x=y=z=1$. Остаётся доказать неравенство $(x+y)(y+z)(z+x)\geqslant 4(x+y+z-1)$. Не умаляя общности, $z\leqslant\min(x,y)$, тогда $x+y\geqslant 2$. Подставим $\frac{1}{xy}$ вместо z и избавимся от знаменателей, получим

$$(x+y)(x^2y+1)(xy^2+1)\geqslant 4xy(x^2y+xy^2+1-xy).$$

Сделаем замену $s=x+y$, $p=xy$, так как неравенство симметрично относительно x и y, получится квадратичное неравенство на s:

$$s^2p+s(p^3-4p^2+1)+4p^2-4p\geqslant 0$$

Положительность x и y равносильна тому, что $s>0$ и $0<p\leqslant\frac{s^2}{4}$ (также у нас $s\geqslant 2$). Так как коэффициент при s^2 положителен, то остаётся проверить, что неравенство выполнено

при $s = 2$ и что $-\frac{p^3-4p^2+1}{2p} \leqslant 2$. Но при $s = 2$ (и $0 < p \leqslant 1$) неравенство очевидно:

$$2p^3 - 4p^2 + 2 \geqslant 2(\sqrt{p^3} - 1)^2 \geqslant 0.$$

А оставшееся неравенство следует из $p^3 - 4p^2 + 4p + 1 = p(p-2)^2 + 1 \geqslant 0$ при $p > 0$.

Критерии. Проверки неравенства в частных случаях (например, при $x = y = z = 1$) не оцениваются.

Задачи для 11 класса

1. См. задачу 4 для 6 класса.

2. На далёкой планете X стоят телескопы: телескоп A — на Северном полюсе, телескопы B и C — на экваторе, причём расстояние между B и C (по поверхности планеты) вдвое меньше, чем между A и C. Каждый телескоп видит ровно половину неба (ту, которая не закрыта планетой). Какова вероятность, что в данный момент во все три телескопа видно наше Солнце? (*О. А. Пяйве*)

   Ответ: 3/16.

   Решение. Пусть O — центр планеты, тогда $\angle BOC = 45^\circ$. Ясно, что телескопы B и C вместе наблюдают ровно 3/8 неба, так что все три видят только 3/16.

   Критерии. За нахождение $\angle BOC$ даётся 2 балла. Если телескоп A не учтён, то не больше 5 баллов.

3. См. задачу 4 для 8 класса.

4. См. задачу 7 для 8 класса.

5. Докажите, что существует натуральное число, которое можно представить в виде суммы квадратов двух натуральных чисел не менее чем 2021 способом. (*О. А. Пяйве*)

   Решение. Как известно, существует бесконечно много примитивных пифагоровых троек, то есть таких троек взаимно простых натуральных чисел (a, b, c), что $a^2 + b^2 = c^2$. Возьмём 2021 такую тройку $(a_1, b_1, c_1), \ldots, (a_{2021}, b_{2021}, c_{2021})$. Пусть теперь $C = c_1 \cdot c_2 \cdot \ldots \cdot c_{2021}$, $k_i = \dfrac{C}{c_i}$. Тогда тройки $(k_1a_1, k_1b_1, k_1c_1) \ldots, (k_{2021}a_{2021}, k_{2021}b_{2021}, k_{2021}c_{2021})$ также являются пифагоровыми, то есть в каждой из них квадрат третьего числа («гипотенузы») равен сумме квадратов первых двух чисел («катетов»). Заметим, что «гипотенуза» во всех этих тройках совпадает. Докажем, что сами тройки различны: если какие-то две тройки совпадают, значит, до домножения на k_i они были пропорциональны, но тогда хотя бы одна из них — не примитивная.

   Критерии. Если решение в целом верное, но не доказано или не полностью доказано, что получающиеся разложения различны, то снимается 1–2 балла.

6. См. задачу 6 для 10 класса.

7. См. задачу 7 для 10 класса.