

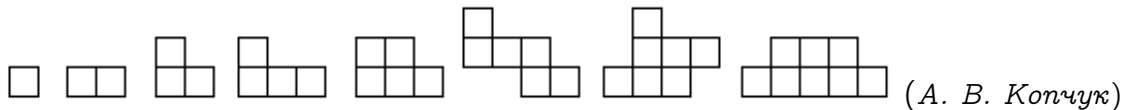


Задачі для 5 класу

Роботи здаються в електронному вигляді (наприклад, у вигляді сканів або doc-файлів з текстом), подробиці на сторінці formulo.org/ru/olymp/2021-math-ru/. Останній термін здачі — 10 листопада 2021 року о 23:59:59 за UTC (тобто 11 листопада о 01:59:59 за київським часом).

Роботи повинні бути виконані самостійно. У більшості завдань потрібні не тільки відповіді, а й повні обґрунтування. У роботі не повинно бути особистих даних Учасника, тобто підписувати роботу не треба.

1. Використовуючи кожен з фігур по одному разу, складіть із них прямокутник. Фігури можна повертати та перевертати.



2. Учитель попросив Катю і Олену написати по колу 4 натуральні числа, сума яких дорівнює 8, але жодні декілька (від 1 до 3) чисел, що йдуть поспіль, не дають в сумі 4. Обидві дівчинки виконали завдання. Чи могло виявитися, що Олена написала якесь число, яке Катя не написала? (С. П. Павлов)
3. У числа 1234 добуток цифр на 14 більше, ніж сума цифр (добуток цифр дорівнює $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$, а сума цифр дорівнює $1 + 2 + 3 + 4 = 10$). Придумайте число, у якого добуток цифр на 2021 більше, ніж сума цифр. (А. А. Теслер)
4. Перевіряючий Олімпіади після важкого трудового дня залишає робочий кабінет, освітлення в якому працює в декількох режимах. Коли перевіряючий вийшов з кімнати, він щільно закрив за собою двері та встав біля кнопки, яка перемикає ці режими (режими перемикаються по порядку від першого до останнього, після останнього йде вимикання, а потім все заново). Але, на жаль, перевіряючий дуже втомився і забув точну кількість режимів, а пам'ятає лише, що їх було не більше 5 (не рахуючи вимкненого стану) і що зараз увімкнений перший режим. Допоможіть перевіряючому вимкнути світло в кабінеті, якщо він не може бачити, який режим увімкнений. (А. В. Владимиров)
5. Чотири групи студентів (по 26 осіб у кожній) вирішили відправитися в поїздку на автобусах, а витрати розподілити порівну. Транспортна компанія надає автобуси двох видів — на 30 пасажирів (за однією ціною) і на 50 пасажирів (за вищою ціною). Спочатку студенти вирішили замовити автобуси якомога дешевше, і вийшло, що кожному потрібно заплатити по 250 гривень. Потім з'ясувалося, що жодна з груп не хоче опинитися розділеною між двома автобусами, і з урахуванням цього кожному студенту довелося б заплатити по 300 гривень. Зрештою по одному студенту в кожній із груп відмовилися від поїздки. Скільки тепер доведеться заплатити кожному зі студентів? (Л. С. Корешкова)
6. На клітчастому папері нарисований квадрат 5×5 (у ньому всього 25 клітинок). Дмитрик, роблячи розрізи тільки по лініях, хоче розділити квадрат на декілька (більше однієї) фігурок, у кожній з яких периметр (обчислюється в клітинах) дорівнює p . Для яких $p < 25$ Дмитрику вдасться це зробити? (С. П. Павлов)
7. Андрій задумав два різні натуральні числа. На одній із карток він записав їхню суму, а на іншій — подвоєне менше число. Після цього одну з карток він дав Борі, а іншу Віті. Боря: на жаль, я не знаю, яка у мене картка. Вітя: я теж не знаю, яка у мене картка. Боря: зате я тепер знаю. У кого виявилася картка з сумою? (К. А. Кноп)

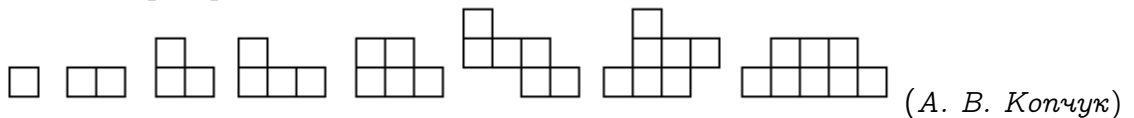


Задачі для 6 класу

Роботи здаються в електронному вигляді (наприклад, у вигляді сканів або doc-файлів з текстом), подробиці на сторінці formulo.org/ru/olymp/2021-math-ru/. Останній термін здачі — 10 листопада 2021 року о 23:59:59 за UTC (тобто 11 листопада о 01:59:59 за київським часом).

Роботи повинні бути виконані самостійно. У більшості завдань потрібні не тільки відповіді, а й повні обґрунтування. У роботі не повинно бути особистих даних Учасника, тобто підписувати роботу не треба.

1. Використовуючи кожен з фігур по одному разу, складіть із них прямокутник. Фігури можна повертати та перевертати.



2. По колу написані 6 натуральних чисел, сума яких дорівнює 12. Катя помітила, що які б кілька (від 1 до 5) чисел, що йдуть поспіль, не взяти, їхня сума не дорівнює 6. Чому може дорівнювати максимальне з чисел? (Наведіть усі можливі варіанти відповіді на це питання і поясніть, чому ці варіанти можливі, а всі інші — ні.) (С. П. Павлов)
3. У числа 1234 добуток цифр на 14 більше, ніж сума цифр (добуток цифр дорівнює $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$, а сума цифр дорівнює $1 + 2 + 3 + 4 = 10$). Придумайте число, у якого добуток цифр на 2021 більше, ніж сума цифр. (А. А. Теслер)
4. У деякому місяці було п'ять понеділів, у наступному п'ять вівторків, а в місяці після нього — п'ять серед. У який день тижня почався рік, у якому все це було? (А. А. Теслер)
5. Чотири групи студентів (по 26 осіб у кожній) вирішили відправитися в поїздку на автобусах, а витрати розподілити порівну. Транспортна компанія надає автобуси двох видів — на 30 пасажирів (за однією ціною) і на 50 пасажирів (за вищою ціною). Спочатку студенти вирішили замовити автобуси якомога дешевше, і вийшло, що кожному потрібно заплатити по 250 гривень. Потім з'ясувалося, що жодна з груп не хоче опинитися розділеною між двома автобусами, і з урахуванням цього кожному студенту довелося б заплатити по 300 гривень. Зрештою по одному студенту в кожній із груп відмовилися від поїздки. Скільки тепер доведеться заплатити кожному зі студентів? (Л. С. Корешкова)
6. У чемпіонаті з футболу беруть участь 32 команди, розбиті на 8 груп по 4 команди. У кожній групі кожна команда грає з кожною з трьох інших по одному разу. За виграв у матчі дається 3 очки, за поразку 0, за нічию 1 (тобто сумарно команда може заробити від 0 до 9 очок). Чи обов'язково після закінчення групових ігор знайдуться 5 команд, у яких порівну очок? (А. А. Теслер)
7. Андрій задумав два різні натуральні числа. На одній із карток він записав їхню суму, а на іншій — подвоєне менше число. Після цього одну з карток він дав Борі, а іншу Віті. Боря: на жаль, я не знаю, яка у мене картка. Вітя: я теж не знаю, яка у мене картка. Боря: зате я тепер знаю. У кого виявилася картка з сумою? (К. А. Кноп)



Задачі для 7 класу

Роботи здаються в електронному вигляді (наприклад, у вигляді сканів або doc-файлів з текстом), подробиці на сторінці formulo.org/ru/olymp/2021-math-ru/. Останній термін здачі — 10 листопада 2021 року о 23:59:59 за UTC (тобто 11 листопада о 01:59:59 за київським часом).

Роботи повинні бути виконані самостійно. У більшості завдань потрібні не тільки відповіді, а й повні обґрунтування. У роботі не повинно бути особистих даних Учасника, тобто підписувати роботу не треба.

1. На клітчастому папері нарисований квадрат 5×5 (у ньому всього 25 клітинок). Дмитрик, роблячи розрізи тільки по лініях, хоче розділити квадрат на декілька (більше однієї) фігурок, у кожній з яких периметр (обчислюється в клітинах) дорівнює p . Для яких $p < 25$ Дмитрику вдасться це зробити? (С. П. Павлов)
2. Перевіряючий Олімпіади після важкого трудового дня залишає робочий кабінет, освітлення в якому працює в декількох режимах. Коли перевіряючий вийшов з кімнати, він щільно закрив за собою двері та встав біля кнопки, яка перемикає ці режими (режими перемикаються по порядку від першого до останнього, після останнього йде вимикання, а потім все заново). Але, на жаль, перевіряючий дуже втомився і забув точну кількість режимів, а пам'ятає лише, що їх було не більше 5 (не рахуючи вимкненого стану) і що зараз увімкнений перший режим. Допоможіть перевіряючому вимкнути світло в кабінеті, якщо він не може бачити, який режим увімкнений. (А. Б. Владимиров)
3. Кут між годинниковою та хвилиною стрілками годинника становить 70° . Через скільки хвилин він наступного разу дорівнюватиме 70° ? Обидві стрілки обертаються неперервно. (А. А. Теслер)
4. У деякому місяці було п'ять понеділків, у наступному п'ять вівторків, а в місяці після нього — п'ять серед. У який день тижня почався рік, у якому все це було? (А. А. Теслер)
5. Друкарня визначає вартість друку книги так: додає вартість обкладинки до вартості кожної зі сторінок, а результат округлює вгору до найближчого цілого числа гривень (тобто, наприклад, якщо вийшло 202 гривні 1 копія, то це округляється до 203 гривень). Відомо, що вартість книги обсягом 104 сторінки становить 134 гривні, а книги обсягом 192 сторінки — 181 гривню. Скільки коштує друк обкладинки, якщо вона коштує ціле число гривень, а вартість однієї сторінки становить ціле число копійок? (П. Д. Муленко)
6. У чемпіонаті з футболу беруть участь 32 команди, розбиті на 8 груп по 4 команди. У кожній групі кожна команда грає з кожною з трьох інших по одному разу. За виграш у матчі дається 3 очки, за поразку 0, за нічию 1 (тобто сумарно команда може заробити від 0 до 9 очок). Чи обов'язково після закінчення групових ігор знайдуться 5 команд, у яких порівну очок? (А. А. Теслер)
7. Андрій задумав два різні натуральні числа. На одній із карток він записав їхню суму, а на іншій — подвоєне менше число. Після цього одну з карток він дав Борі, а іншу Віті. Боря: на жаль, я не знаю, яка у мене картка. Вітя: я теж не знаю, яка у мене картка. Боря: зате я тепер знаю. У кого виявилася картка з сумою? (К. А. Кноп)



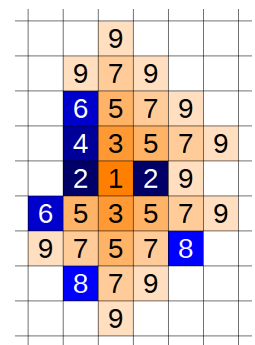
Задачі для 8 класу

Роботи здаються в електронному вигляді (наприклад, у вигляді сканів або doc-файлів з текстом), подробиці на сторінці formulo.org/ru/olymp/2021-math-ru/. Останній термін здачі — 10 листопада 2021 року о 23:59:59 за UTC (тобто 11 листопада о 01:59:59 за київським часом).

Роботи повинні бути виконані самостійно. У більшості завдань потрібні не тільки відповіді, а й повні обґрунтування. У роботі не повинно бути особистих даних Учасника, тобто підписувати роботу не треба.

1. У числа 1234 добуток цифр на 14 більше, ніж сума цифр (добуток цифр дорівнює $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$, а сума цифр дорівнює $1 + 2 + 3 + 4 = 10$). А скільки розрядів містить найменше натуральне число, у якого добуток цифр на 2021 менше, ніж сума цифр? (А. А. Теслер)
2. Для яких натуральних n вираз $45^n + 988 \cdot 2^n$ ділиться на 2021? (Л. С. Корешкова)
3. Кут між годинниковою та хвилиною стрілками годинника становить 70° . Через скільки хвилин він наступного разу дорівнюватиме 70° ? Обидві стрілки обертаються неперервно. (А. А. Теслер)
4. Переставляючи цифри в тризначному числі, можна отримати до 6 різних чисел. Яка найбільша кількість з них можуть утворювати арифметичну прогресію? (Арифметична прогресія — це послідовність, у якій кожне число більше попереднього на одну і ту саму величину, наприклад: 57, 63, 69, 75.) (В. П. Федотов)
5. Відмітимо на шахівниці центри всіх клітин (центри білих клітин — білими точками, центри чорних — чорними). Скільки існує рівнобедрених прямокутних трикутників, всі вершини яких — відмічені точки одного кольору? (Л. С. Корешкова)
6. На площині намальовано квадрат $ABCD$ і точку M всередині нього. Придумайте, як за допомогою однієї лінійки, провівши не більше 20 ліній, провести через M пряму, паралельну діагоналі AC . (На лінійці немає поділок, на ній не можна нічого відмічати — можна лише проводити пряму через дві дані точки.) (А. А. Теслер)

7. У місті, що представляє собою нескінченну клітчасту площину, є n пожежників. Одного разу в одній з клітинок міста виникає пожежа. У наступну хвилину кожен пожежник може (але не зобов'язаний) захистити якусь одну клітинку, яка не палає, але сусідня з нею палає. Ще через хвилину пожежа поширюється на всі сусідні з палаючими клітинки, крім захищених. Далі пожежники й пожежа діють по черзі. При якому мінімальному n пожежники зможуть локалізувати пожежу, тобто зробити так, щоб вона припинила поширюватися?



(На малюнку показано, як можуть розвиватися події при $n = 2$; непарні числа відповідають поширенню пожежі, парні — діям пожежників.)

(Л. С. Корешкова)



Міжнародна математична олімпіада
«Формула Єдності» / «Третє тисячоліття»
2021–2022 навчальний рік. Відбірковий етап



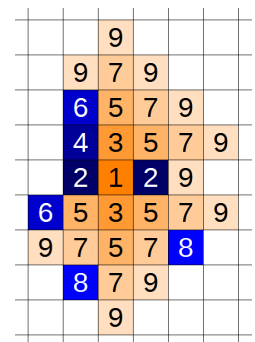
Задачі для 9 класу

Роботи здаються в електронному вигляді (наприклад, у вигляді сканів або doc-файлів з текстом), подробиці на сторінці formulo.org/ru/olymp/2021-math-ru/. Останній термін здачі — 10 листопада 2021 року о 23:59:59 за UTC (тобто 11 листопада о 01:59:59 за київським часом).

Роботи повинні бути виконані самостійно. У більшості завдань потрібні не тільки відповіді, а й повні обґрунтування. У роботі не повинно бути особистих даних Учасника, тобто підписувати роботу не треба.

1. Марині наснився трикутник зі сторонами 9 і 4 та бісектрисою, що виходить із кута, утвореного цими сторонами, довжиною 6. Чи зможе Марина втілити сон у реальність?
(Л. С. Корешкова)
2. Для яких натуральних n вираз $45^n + 988 \cdot 2^n$ ділиться на 2021?
(Л. С. Корешкова)
3. Кут між годинниковою та хвилинною стрілками годинника становить 70° . Через скільки хвилин він наступного разу дорівнюватиме 70° ? Обидві стрілки обертаються неперервно.
(А. А. Теслер)
4. Переставляючи цифри в тризначному числі, можна отримати до 6 різних чисел. Яка найбільша кількість з них можуть утворювати арифметичну прогресію? (Арифметична прогресія — це послідовність, у якій кожне число більше попереднього на одну і ту саму величину, наприклад: 57, 63, 69, 75.)
(В. П. Федотов)
5. Назвемо числову множину X періодичною (з періодом $T > 0$), якщо для довільного $a \in X$ числа $a+T$ і $a-T$ також належать X . Чи періодична множина всіх цілих чисел, що містять у записі цифру 5?
(А. А. Теслер)
6. На площині намальовано квадрат $ABCD$ і точку M всередині нього. Придумайте, як за допомогою однієї лінійки, провівши не більше 20 ліній, провести через M пряму, паралельну діагоналі AC . (На лінійці немає поділок, на ній не можна нічого відмічати — можна лише проводити пряму через дві дані точки.)
(А. А. Теслер)

7. У місті, що представляє собою нескінченну клітчасту площину, є n пожежників. Одного разу в одній з клітинок міста виникає пожежа. У наступну хвилину кожен пожежник може (але не зобов'язаний) захистити якусь одну клітинку, яка не палає, але сусідня з нею палає. Ще через хвилину пожежа поширюється на всі сусідні з палаючими клітинки, крім захищених. Далі пожежники й пожежа діють по черзі. При якому мінімальному n пожежники зможуть локалізувати пожежу, тобто зробити так, щоб вона припинила поширюватися?



(На малюнку показано, як можуть розвиватися події при $n = 2$; непарні числа відповідають поширенню пожежі, парні — діям пожежників.)

(Л. С. Корешкова)



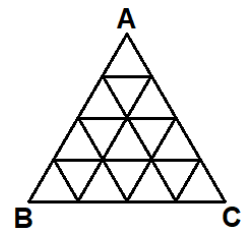
Задачі для 10 класу

Роботи здаються в електронному вигляді (наприклад, у вигляді сканів або doc-файлів з текстом), подробиці на сторінці formulo.org/ru/olymp/2021-math-ru/. Останній термін здачі — 10 листопада 2021 року о 23:59:59 за UTC (тобто 11 листопада о 01:59:59 за київським часом).

Роботи повинні бути виконані самостійно. У більшості завдань потрібні не тільки відповіді, а й повні обґрунтування. У роботі не повинно бути особистих даних Учасника, тобто підписувати роботу не треба.

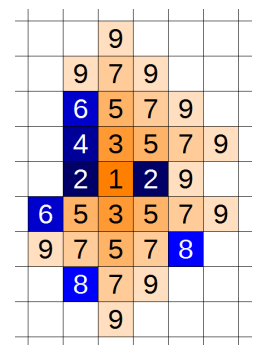
1. У деякому місяці було п'ять понеділів, у наступному п'ять вівторків, а в місяці після нього — п'ять серед. У який день тижня почався рік, у якому все це було? (А. А. Теслер)
2. Два кола дотикаються внутрішнім чином у точці A . AB — діаметр більшого кола, точка O — центр меншого. Хорда BD більшого кола дотикається до меншого в точці C . Доведіть, що $BO \cdot CD = OA \cdot BC$. (Е. С. Голикова)
3. Андрій задумав два різні натуральні числа. На одній із карток він записав їхню суму, а на іншій — подвоєне менше число. Після цього одну з карток він дав Борі, а іншу Віті.
Боря: на жаль, я не знаю, яка у мене картка.
Вітя: я теж не знаю, яка у мене картка.
Боря: зате я тепер знаю.
У кого виявилася картка з сумою? (К. А. Кноп)

4. Дано трикутну сітку, зображену на рисунку. Юний робототехнік Петрик посадив у точку A робота-равлика. Щоб пройти по одному ребру сітки, равлику потрібна година. На кожному розгалуженні равлик із однаковими ймовірностями вибирає будь-який із напрямків (у тому числі той, звідки тільки що прийшов), а між розгалуженнями не повертає. Петрик пішов і повернувся рівно через 4 години. Що більш імовірно: що він побачить равлика на стороні BC або у вершині A ?



(Л. С. Корешкова, А. А. Теслер)

5. У місті, що представляє собою нескінченну клітчасту площину, є n пожежників. Одного разу в одній з клітинок міста виникає пожежа. У наступну хвилину кожен пожежник може (але не зобов'язаний) захистити якусь одну клітинку, яка не палає, але сусідня з нею палає. Ще через хвилину пожежа поширюється на всі сусідні з палаючими клітинки, крім захищених. Далі пожежники й пожежа діють по черзі. При якому мінімальному n пожежники зможуть локалізувати пожежу, тобто зробити так, щоб вона припинила поширюватися?



(На малюнку показано, як можуть розвиватися події при $n = 2$; непарні числа відповідають поширенню пожежі, парні — діям пожежників.)

(Л. С. Корешкова)

6. У ромб $KLMN$ вписане коло, яке дотикається до сторони LK в точці P . Через точки P і K проведені паралельні прямі до перетину зі сторонами LM і MN в точках Q і R відповідно. Доведіть, що коло дотикається до QR . (Л. С. Корешкова)

7. Добуток трьох додатних чисел x , y і z дорівнює 1. Яке найменше значення набуває вираз $\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{x+y+z-1}$? (А. Р. Араб)



Міжнародна математична олімпіада
«Формула Єдності» / «Третє тисячоліття»
2021–2022 навчальний рік. Відбірковий етап



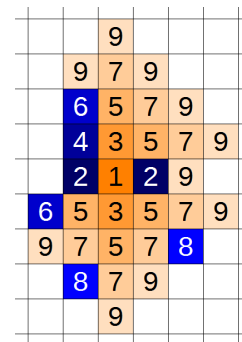
Задачі для 11 класу

Роботи здаються в електронному вигляді (наприклад, у вигляді сканів або doc-файлів з текстом), подробиці на сторінці formulo.org/ru/olymp/2021-math-ru/. Останній термін здачі — 10 листопада 2021 року о 23:59:59 за UTC (тобто 11 листопада о 01:59:59 за київським часом).

Роботи повинні бути виконані самостійно. У більшості завдань потрібні не тільки відповіді, а й повні обґрунтування. У роботі не повинно бути особистих даних Учасника, тобто підписувати роботу не треба.

1. У деякому місяці було п'ять понеділків, у наступному п'ять вівторків, а в місяці після нього — п'ять серед. У який день тижня почався рік, у якому все це було? (А. А. Теслер)
2. На далекій планеті X стоять телескопи: телескоп A — на Північному полюсі, телескопи B і C — на екваторі, причому відстань між B і C (по поверхні планети) вдвічі менша, ніж між A і C . Кожен телескоп бачить рівно половину неба (ту, яка не закрита планетою). Яка ймовірність, що у даний момент у всі три телескопи видно наше Сонце? (О. А. Пяйве)
3. Переставляючи цифри в тризначному числі, можна отримати до 6 різних чисел. Яка найбільша кількість з них можуть утворювати арифметичну прогресію? (Арифметична прогресія — це послідовність, у якій кожне число більше попереднього на одну і ту саму величину, наприклад: 57, 63, 69, 75.) (В. П. Федотов)

4. У місті, що представляє собою нескінченну клітчасту площину, є n пожежників. Одного разу в одній з клітинок міста виникає пожежа. У наступну хвилину кожен пожежник може (але не зобов'язаний) захистити якусь одну клітинку, яка не палає, але сусідня з нею палає. Ще через хвилину пожежа поширюється на всі сусідні з палаючими клітинки, крім захищених. Далі пожежники й пожежа діють по черзі. При якому мінімальному n пожежники зможуть локалізувати пожежу, тобто зробити так, щоб вона припинила поширюватися?



(На малюнку показано, як можуть розвиватися події при $n = 2$; непарні числа відповідають поширенню пожежі, парні — діям пожежників.)

(Л. С. Корешкова)

5. Доведіть, що існує натуральне число, яке можна подати у вигляді суми квадратів двох натуральних чисел не менше, ніж 2021 способом. (О. А. Пяйве)
6. У ромб $KLMN$ вписане коло, яке дотикається до сторони LK в точці P . Через точки P і K проведені паралельні прямі до перетину зі сторонами LM і MN в точках Q і R відповідно. Доведіть, що коло дотикається до QR . (Л. С. Корешкова)
7. Добуток трьох додатних чисел x , y і z дорівнює 1. Яке найменше значення набуває вираз $\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{x+y+z-1}$? (А. Р. Араб)