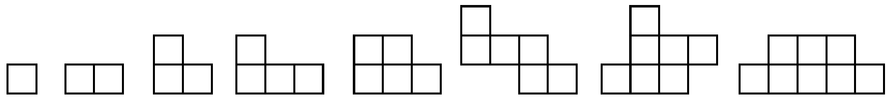
Olimpiada Matemática Internacional
"Fórmula de la Unidad" / "El Tercer Milenio"
Curso escolar 2021–2022. Primera Fase

Problemas para el nivel R5

Envía tu documento de soluciones en el formulario de la página web formulo.org/en/olymp/2021-math-en/ (por ej, como .doc de texto o documento escaneado).La fecha límite para el envío es **23:59:59 UTC,10 November 2021**. Recuerda que tus soluciones de los problemas deben ser de trabajo personal. La mayoría de los problemas requieren no solo una respuesta sino todo un procedimiento. Las soluciones no deben contener datos personales, es decir, **no debes firmar tus soluciones**.

---

1. Construye un rectángulo con estas figuras. Debes usar cada figura exactamente una vez. Puedes rotar las figuras y darles la vuelta.

(*A. Kopchuk*)
2. Un profesor les pidió a Kate y Helen escribir 4 enteros positivos en un círculo, de forma que su suma fuese 8 y la suma de cualesquiera (de 1a3) números consecutivos no fuese 4. Ambas chicas lo hicieron.¿Es posible que Kate escriba un número que Helen no haya escrito? (*S. Pavlov*)
3. El número 1234 es tal que el producto de sus dígitos es 14 más que la suma de sus dígitos (el producto es $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$, y la suma es igual a $1 + 2 + 3 + 4 = 10$). Encuentra un número tal que el producto de sus dígitos sea 2021 unidades más que la suma de sus dígitos. (*A. Tesler*)
4. Después de un día complicado corrigiendo problemas de Olimpiadas, un examinador salió de su habitación de trabajo y cerró la puerta. Terminó junto al enchufe que controlaba las luces de la habitación. Las luces pueden funcionar en varios modos. Presionando el interruptor, el examinador puede desplazarse por los diferentes modos, del primero hasta el último modo, luego al modo "luces apagadas", volver al primer modo, y así sucesivamente. El examinador que está muy cansado, no recuerda exactamente el número de modos, sin embargo, sabe que este número ("luces apagadas" no incluido) es 5 o menor. También sabe que las luces están ahora en modo #1. Ayúdale a apagar las luces ya que él no puede ver el interior de la habitación. (*A. Vladimirov*)
5. Cuatro grupos de estudiantes, de 26 personas cada grupo, decidieron hacer un viaje en autobús y pagarlo a partes iguales. Una empresa de transporte ofrece dos tipos diferentes de autobuses: para 30 pasajeros (a un precio) y para 50 (a un precio más alto). Los estudiantes decidieron gastar la menor cantidad de dinero posible, por lo que calcularon que cada uno debería pagar \$25. Luego se dieron cuenta de que ningún grupo quería estar separado entre diferentes autobuses y, en vista de esto, cada estudiante debería pagar \$30. Finalmente, un estudiante de *cada* grupo se negó a viajar. ¿Cuánto dinero deben pagar cada estudiante ahora? (*L. Koreshkova*)
6. Se dibuja un cuadrado 5×5 (consta de 25 celdas) en un papel cuadriculado. Dima quiere cortar este cuadrado a lo largo de las líneas de la cuadrícula en varias figuras (más de 1) de tal manera que el perímetro de cada figura (calculado en celdas) sea igual a P. ¿Para qué valores de $P < 25$ puede hacer esto Dima? (*S. Pavlov*)
7. Andrew pensó dos números enteros positivos, a y b ($a < b$). Escribió $a + b$ en un trozo de papel y $2a$ en otro trozo. A continuación le dió un trozo de papel a Boris y otro a Charlie.
Boris: No sé qué trozo es el que tengo.
Charlie: Yo tampoco sé qué trozo es el que tengo.
Boris: Pues ahora sí lo sé.
¿Quién tiene el trozo de papel con la suma? (*K. Knop*)

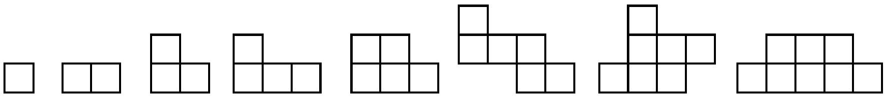
Olimpiada Matemática Internacional
"Fórmula de la Unidad" / "El Tercer Milenio"
Curso escolar 2021–2022. Primera Fase

Problemas para el nivel R6

Envía tu documento de soluciones en el formulario de la página web formulo.org/en/olymp/2021-math-en/ (por ej, como .doc de texto o documento escaneado).La fecha límite para el envío es **23:59:59 UTC,10 November 2021**. Recuerda que tus soluciones de los problemas deben ser de trabajo personal. La mayoría de los problemas requieren no solo una respuesta sino todo un procedimiento. Las soluciones no deben contener datos personales, es decir, **no debes firmar tus soluciones**.

---

1. Construye un rectángulo con estas figuras. Debes usar cada figura exactamente una vez. Puedes rotar las figuras y darles la vuelta.



(*A. Kopchuk*)

2. Escribimos 6 enteros positivos que suman 12 en un círculo. Kate observó que si ella coge cualesquiera números consecutivos (desde 1 hasta 5), su suma no es igual a 6. Encuentra el mayor número escrito. (Encuentra todas las posibles soluciones y razona las opciones posibles y las que no lo sean) (*S. Pavlov*)

3. El número 1234 es tal que el producto de sus dígitos es 14 más que la suma de sus dígitos (el producto es $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$, y la suma es igual a $1 + 2 + 3 + 4 = 10$). Encuentra un número tal que el producto de sus dígitos sea 2021 unidades más que la suma de sus dígitos. (*A. Tesler*)

4. En algún año, hubo 5 lunes en algún mes, 5 martes en el mes siguiente y 5 miércoles en el mes siguiente. ¿Qué día de la semana empezó ese año? (*A. Tesler*)

5. Cuatro grupos de estudiantes, de 26 personas cada grupo, decidieron hacer un viaje en autobús y pagarlo a partes iguales. Una empresa de transporte ofrece dos tipos diferentes de autobuses: para 30 pasajeros (a un precio) y para 50 (a un precio más alto). Los estudiantes decidieron gastar la menor cantidad de dinero posible, por lo que calcularon que cada uno debería pagar \$25. Luego se dieron cuenta de que ningún grupo quería estar separado entre diferentes autobuses y, en vista de esto, cada estudiante debería pagar \$30. Finalmente, un estudiante de *cada* grupo se negó a viajar. ¿Cuánto dinero deben pagar cada estudiante ahora? (*L. Koreshkova*)

6. 32 equipos participan en un campeonato de fútbol. Se dividen en 8 grupos: 4 equipos en cada grupo. En cada grupo cada equipo juega con los otros tres equipos. Por ganar un juego, cada equipo obtiene 3 puntos, 0 por una derrota y 1 por un empate (por lo que cada equipo puede conseguir de 0 a 9 puntos). ¿Podemos decir con certeza que después de la final de los juegos de los grupos habrá 5 equipos con la misma puntuación? (*A. Tesler*)

7. Andrew pensó dos números enteros positivos, a y b ($a < b$). Escribió $a + b$ en un trozo de papel y $2a$ en otro trozo. A continuación le dió un trozo de papel a Boris y otro a Charlie.
Boris: No sé qué trozo es el que tengo.
Charlie: Yo tampoco sé qué trozo es el que tengo.
Boris: Pues ahora sí lo sé.
¿Quién tiene el trozo de papel con la suma? (*K. Knop*)

Olimpiada Matemática Internacional
"Fórmula de la Unidad" / "El Tercer Milenio"
Curso escolar 2021–2022. Primera Fase

Problemas para el nivel R7

Envía tu documento de soluciones en el formulario de la página web formulo.org/en/olymp/2021-math-en/ (por ej, como .doc de texto o documento escaneado).La fecha límite para el envío es **23:59:59 UTC,10 November 2021**. Recuerda que tus soluciones de los problemas deben ser de trabajo personal. La mayoría de los problemas requieren no solo una respuesta sino todo un procedimiento. Las soluciones no deben contener datos personales, es decir, **no debes firmar tus soluciones**.

---

1. Se dibuja un cuadrado 5×5 (consta de 25 celdas) en un papel cuadriculado. Dima quiere cortar este cuadrado a lo largo de las líneas de la cuadrícula en varias figuras (más de 1) de tal manera que el perímetro de cada figura (calculado en celdas) sea igual a P. ¿Para qué valores de $P < 25$ puede hacer esto Dima? (*S. Pavlov*)

2. Después de un día complicado corrigiendo problemas de Olimpiadas, un examinador salió de su habitación de trabajo y cerró la puerta. Terminó junto al enchufe que controlaba las luces de la habitación. Las luces pueden funcionar en varios modos. Presionando el interruptor, el examinador puede desplazarse por los diferentes modos, del primero hasta el último modo, luego al modo "luces apagadas", volver al primer modo, y así sucesivamente. El examinador que está muy cansado, no recuerda exactamente el número de modos, sin embargo, sabe que este número ("luces apagadas" no incluido) es 5 o menor. También sabe que las luces están ahora en modo #1. Ayúdale a apagar las luces ya que él no puede ver el interior de la habitación. (*A. Vladimirov*)

3. El ángulo entre la manilla de la hora y el minutero de un reloj es 70°. ¿En cuántos minutos volverá este ángulo a ser 70° de nuevo? Ambas anillas rotan continuamente. (*A. Tesler*)

4. En algún año, hubo 5 lunes en algún mes, 5 martes en el mes siguiente y 5 miércoles en el mes siguiente. ¿Qué día de la semana empezó ese año? (*A. Tesler*)

5. Una imprenta en Rusia calcula el precio de imprimir un libro de la siguiente forma: suman el precio de la portada y el precio de todas las páginas y entonces redondean a una cantidad entera de rublos (p. ej. 202 rublos 1 kopeck se redondea a 203 rublos). Sabemos que cuesta 134 rublos imprimir un libro de 104 páginas, y 181 rublos imprimir un libro de 192 páginas. Encuentra el precio de la portada si cuesta un número entero de rublos, y cada página cuesta un número entero de kopecks. (1 rublo contiene 100 kopecks.) (*P. Mulenko*)

6. 32 equipos participan en un campeonato de fútbol. Se dividen en 8 grupos: 4 equipos en cada grupo. En cada grupo cada equipo juega con los otros tres equipos. Por ganar un juego, cada equipo obtiene 3 puntos, 0 por una derrota y 1 por un empate (por lo que cada equipo puede conseguir de 0 a 9 puntos). ¿Podemos decir con certeza que después de la final de los juegos de los grupos habrá 5 equipos con la misma puntuación? (*A. Tesler*)

7. Andrew pensó dos números enteros positivos, a y b ($a < b$). Escribió $a + b$ en un trozo de papel y $2a$ en otro trozo. A continuación le dió un trozo de papel a Boris y otro a Charlie.
   Boris: No sé qué trozo es el que tengo.
   Charlie: Yo tampoco sé qué trozo es el que tengo.
   Boris: Pues ahora sí lo sé.
   ¿Quién tiene el trozo de papel con la suma? (*K. Knop*)

Olimpiada Matemática Internacional
"Fórmula de la Unidad" / "El Tercer Milenio"
Curso escolar 2021–2022. Primera Fase

Problemas para el nivel R8

Envía tu documento de soluciones en el formulario de la página web formulo.org/en/olymp/2021-math-en/ (por ej, como .doc de texto o documento escaneado).La fecha límite para el envío es **23:59:59 UTC,10 November 2021**. Recuerda que tus soluciones de los problemas deben ser de trabajo personal. La mayoría de los problemas requieren no solo una respuesta sino todo un procedimiento. Las soluciones no deben contener datos personales, es decir, **no debes firmar tus soluciones**.

---

1. El número 1234 es tal que el producto de sus dígitos es 14 más que la suma de sus dígitos (el producto es $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$, y la suma es igual a $1 + 2 + 3 + 4 = 10$). Sea x el menor entero positivo tal que el producto de sus dígitos es 2021 *menos* que la suma de sus dígitos. ¿Cuántos dígitos contiene x? (*A. Tesler*)

2. Encuentra todos los números enteros positivos n tales que $45^n + 988 \cdot 2^n$ es divisible por 2021. (*L. Koreshkova*)

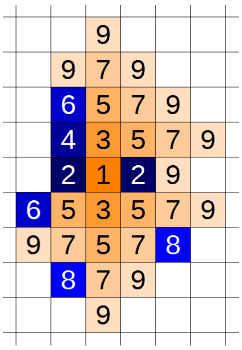
3. El ángulo entre la manilla de la hora y el minutero de un reloj es 70°. ¿En cuántos minutos volverá este ángulo a ser 70° de nuevo? Ambas anillas rotan continuamente. (*A. Tesler*)

4. Puedes obtener hasta 6 números diferentes reordenando los dígitos en un número de 3 dígitos. ¿Cuántos de estos números forman una progresión aritmética? Encuentra la mayor solución posible. (Una progresión aritmética es una secuencia en la que cada número es mayor que el anterior en un mismo número, por ejemplo: 57, 63, 69, 75.) (*V. Fedotov*)

5. Marcamos los centros de las celdas blancas de un tablero de ajedrez 8×8 con blanco, y los centros de las celdas negras con negro. Encentra el número de triángulos rectángulos isósceles con los vértices en los centros del mismo color. (*L. Koreshkova*)

6. Hay un cuadrado $ABCD$ en el plano y un punto M en su interior. Encuentra una forma de dibujar una línea paralela a AC por M usando solo una regla y dibujando no más de 20 líneas. (No existe escala en la regla y no puedes marcar nada en ella— la única cosa que puedes hacer es dibujar una línea por dos puntos dados.) (*A. Tesler*)

7. En un plano infinito sobre una cuadrícula, cada celda representa una casa y n bomberos protegen estas casas. Suponemos que el fuego comienza en una sola celda. Un minuto después, cada bombero puede optar (pero no está obligado) a proteger una celda que es vecina de una celda en llamas pero que no está en llamas. Un minuto más tarde, el fuego se extiende a todas las celdas vecinas, excepto a las protegidas. Después de eso, los bomberos y el fuego siguen actuando. Encuentre el n más pequeño de modo que n bomberos puedan localizar el fuego, es decir, evitar que se propague más.



(En la imagen, vemos un ejemplo de cómo se puede desarrollar para $n = 2$: los números impares muestran cómo se propaga el fuego y los números pares muestran las acciones de los bomberos) (*L. Koreshkova*)

Olimpiada Matemática Internacional
"Fórmula de la Unidad" / "El Tercer Milenio"
Curso escolar 2021–2022. Primera Fase

Problemas para el nivel R9

Envía tu documento de soluciones en el formulario de la página web formulo.org/en/olymp/2021-math-en/ (por ej, como .doc de texto o documento escaneado).La fecha límite para el envío es **23:59:59 UTC,10 November 2021**. Recuerda que tus soluciones de los problemas deben ser de trabajo personal. La mayoría de los problemas requieren no solo una respuesta sino todo un procedimiento. Las soluciones no deben contener datos personales, es decir, **no debes firmar tus soluciones**.

---

1. Marina soñó con un triángulo de lados 9 y 4, y que la bisectriz del ángulo que forman esos dos lados medía 6. Marina quiere dibujar ese triángulo. ¿Es posible? (*L. Koreshkova*)

2. Encuentra todos los números enteros positivos n tales que $45^n + 988 \cdot 2^n$ es divisible por 2021. (*L. Koreshkova*)

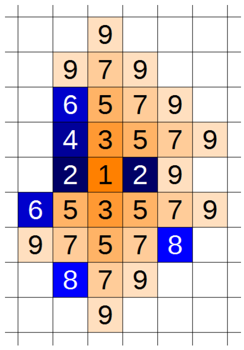
3. El ángulo entre la manilla de la hora y el minutero de un reloj es 70°. ¿En cuántos minutos volverá este ángulo a ser 70° de nuevo? Ambas anillas rotan continuamente. (*A. Tesler*)

4. Puedes obtener hasta 6 números diferentes reordenando los dígitos en un número de 3 dígitos. ¿Cuántos de estos números forman una progresión aritmética? Encuentra la mayor solución posible. (Una progresión aritmética es una secuencia en la que cada número es mayor que el anterior en un mismo número, por ejemplo: 57, 63, 69, 75.) (*V. Fedotov*)

5. Llamamos un conjunto X *periodico* (con un periodo $T > 0$) si, para cada $a \in X$, los números $a + T$ y $a - T$ también pertenecen a X. Consideramos el conjunto de todos los enteros que contienen el dígito 5 en su notación decimal. ¿Es este conjunto periódico? (*A. Tesler*)

6. Hay un cuadrado $ABCD$ en el plano y un punto M en su interior. Encuentra una forma de dibujar una línea paralela a AC por M usando solo una regla y dibujando no más de 20 líneas. (No existe escala en la regla y no puedes marcar nada en ella— la única cosa que puedes hacer es dibujar una línea por dos puntos dados.) (*A. Tesler*)

7. En un plano infinito sobre una cuadrícula, cada celda representa una casa y n bomberos protegen estas casas. Suponemos que el fuego comienza en una sola celda. Un minuto después, cada bombero puede optar (pero no está obligado) a proteger una celda que es vecina de una celda en llamas pero que no está en llamas. Un minuto más tarde, el fuego se extiende a todas las celdas vecinas, excepto a las protegidas. Después de eso, los bomberos y el fuego siguen actuando. Encuentre el n más pequeño de modo que n bomberos puedan localizar el fuego, es decir, evitar que se propague más.



(En la imagen, vemos un ejemplo de cómo se puede desarrollar para $n = 2$: los números impares muestran cómo se propaga el fuego y los números pares muestran las acciones de los bomberos) (*L. Koreshkova*)

Olimpiada Matemática Internacional
“Fórmula de la Unidad” / “El Tercer Milenio”
Curso escolar 2021–2022. Primera Fase

Problemas para el nivel R10

Envía tu documento de soluciones en el formulario de la página web formulo.org/en/olymp/2021-math-en/ (por ej, como .doc de texto o documento escaneado).La fecha límite para el envío es **23:59:59 UTC,10 November 2021**. Recuerda que tus soluciones de los problemas deben ser de trabajo personal. La mayoría de los problemas requieren no solo una respuesta sino todo un procedimiento. Las soluciones no deben contener datos personales, es decir, **no debes firmar tus soluciones**.

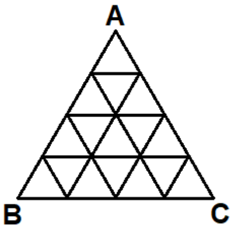
---

1. En algún año, hubo 5 lunes en algún mes, 5 martes en el mes siguiente y 5 miércoles en el mes siguiente. ¿Qué día de la semana empezó ese año? (*A. Tesler*)

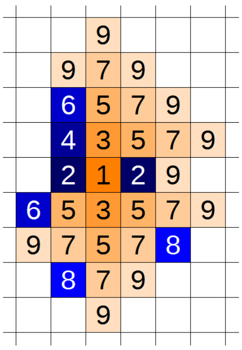
2. Dos círculos son tangentes internamente en el punto A. AB es el diámetro de un círculo mayor y el punto O es el centro de un círculo menor siendo la cuerda BD del círculo mayor tangente al círculo menor en el punto C. Demuestra que $BO \cdot CD = OA \cdot BC$. (*E. Golikova*)

3. Andrew pensó dos números enteros positivos, a y b ($a < b$). Escribió $a + b$ en un trozo de papel y $2a$ en otro trozo. A continuación le dió un trozo de papel a Boris y otro a Charlie.
Boris: No sé qué trozo es el que tengo.
Charlie: Yo tampoco sé qué trozo es el que tengo.
Boris: Pues ahora sí lo sé.
¿Quién tiene el trozo de papel con la suma? (*K. Knop*)

4. Hay una red triangular que se muestra en la imagen. El joven Peter colocó un RobotCaracol en el punto A. El caracol necesita una hora para recorrer un lado de la red. En cada bifurcación. el caracol elige cualquiera de las direcciones con la misma probabilidad (incluyendo la de la que acaba de venir), y entre las bifurcaciones, no se da la vuelta. Peter se fue y regresó después de 4 horas. ¿Qué es mas probable: que él encontrara el RobotCaracol en el lado BC o en el punto A? (*L. Koreshkova, A. Tesler*)



5. En un plano infinito sobre una cuadrícula, cada celda representa una casa y n bomberos protegen estas casas. Suponemos que el fuego comienza en una sola celda. Un minuto después, cada bombero puede optar (pero no está obligado) a proteger una celda que es vecina de una celda en llamas pero que no está en llamas. Un minuto más tarde, el fuego se extiende a todas las celdas vecinas, excepto a las protegidas. Después de eso, los bomberos y el fuego siguen actuando. Encuentre el n más pequeño de modo que n bomberos puedan localizar el fuego, es decir, evitar que se propague más.



(En la imagen, vemos un ejemplo de cómo se puede desarrollar para $n = 2$: los números impares muestran cómo se propaga el fuego y los números pares muestran las acciones de los bomberos) (*L. Koreshkova*)

6. El círculo inscrito en un rombo $KLMN$ es tangente al lado LK en el punto P. Dibujamos dos líneas paralelas por los puntos P y K, e intersectan los lados LM y MN en los puntos Q y R respectivamente. Demuestra que este círculo es tangente a QR. (*L. Koreshkova*)

7. El producto de tres números positivos x, y and z es igual a 1. Encuentra el menor valor posible de la fracción $\dfrac{(x+y)(y+z)(z+x)}{x+y+z-1}$. (*A. R. Arab*)

Olimpiada Matemática Internacional
"Fórmula de la Unidad" / "El Tercer Milenio"
Curso escolar 2021–2022. Primera Fase

Problemas para el nivel R11

Envía tu documento de soluciones en el formulario de la página web formulo.org/en/olymp/2021-math-en/ (por ej, como .doc de texto o documento escaneado).La fecha límite para el envío es **23:59:59 UTC,10 November 2021**. Recuerda que tus soluciones de los problemas deben ser de trabajo personal. La mayoría de los problemas requieren no solo una respuesta sino todo un procedimiento. Las soluciones no deben contener datos personales, es decir, **no debes firmar tus soluciones**.

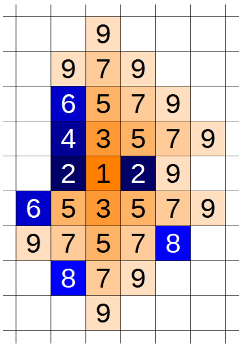
---

1. En algún año, hubo 5 lunes en algún mes, 5 martes en el mes siguiente y 5 miércoles en el mes siguiente. ¿Qué día de la semana empezó ese año? (*A. Tesler*)

2. Hace algún tiempo, en una lejana galaxia, a mucha distancia había algunos telescopios en el planeta X: el telescopio A estaba en el Polo Norte y los telescopios B y C estaban en el Ecuador. La distancia entre B y C (medida al lo largo de la supercicie del planeta) es dos veces menor que entre A y C. Cada telescoio observa exactamente la mitad del cielo (la otra mitad está detras del planeta). Encuentra la probabilidad de que los tres telescopios estén observando nuestro Sol en este momento. (*O. Pyayve*)

3. Puedes obtener hasta 6 números diferentes reordenando los dígitos en un número de 3 dígitos. ¿Cuántos de estos números forman una progresión aritmética? Encuentra la mayor solución posible. (Una progresión aritmética es una secuencia en la que cada número es mayor que el anterior en un mismo número, por ejemplo: 57, 63, 69, 75.) (*V. Fedotov*)

4. En un plano infinito sobre una cuadrícula, cada celda representa una casa y n bomberos protegen estas casas. Suponemos que el fuego comienza en una sola celda. Un minuto después, cada bombero puede optar (pero no está obligado) a proteger una celda que es vecina de una celda en llamas pero que no está en llamas. Un minuto más tarde, el fuego se extiende a todas las celdas vecinas, excepto a las protegidas. Después de eso, los bomberos y el fuego siguen actuando. Encuentre el n más pequeño de modo que n bomberos puedan localizar el fuego, es decir, evitar que se propague más.



(En la imagen, vemos un ejemplo de cómo se puede desarrollar para $n = 2$: los números impares muestran cómo se propaga el fuego y los números pares muestran las acciones de los bomberos) (*L. Koreshkova*)

5. Prueba que que hay un número entero positivo que puede representarse como una suma de dos cuadrados perfectos en al menos 2021 formas. (*O. Pyayve*)

6. El círculo inscrito en un rombo $KLMN$ es tangente al lado LK en el punto P. Dibujamos dos líneas paralelas por los puntos P y K, e intersectan los lados LM y MN en los puntos Q y R respectivamente. Demuestra que este círculo es tangente a QR. (*L. Koreshkova*)

7. El producto de tres números positivos x, y and z es igual a 1. Encuentra el menor valor posible de la fracción $\dfrac{(x+y)(y+z)(z+x)}{x+y+z-1}$. (*A. R. Arab*)