

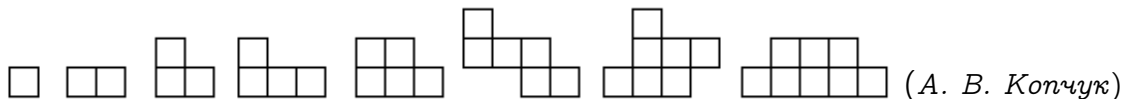


Задачи для 5 класса

Работы сдаются в электронном виде (например, в виде сканов или doc-файлов с текстом), подробности на странице formulo.org/ru/olymp/2021-math-ru/. Последний срок сдачи — 10 ноября 2021 года в 23:59:59 по UTC (то есть 11 ноября в 02:59:59 по московскому времени).

Работы должны быть сделаны самостоятельно. В большинстве задач нужны не только ответы, но и полные обоснования. В работе не должно быть личных данных участника, то есть подписывать работу не следует.

1. Используя каждую из фигур по одному разу, составьте из них прямоугольник. Фигуры можно поворачивать и переворачивать.



2. Учитель попросил Катю и Лену написать по кругу 4 натуральных числа, сумма которых равна 8, но никакие несколько (от 1 до 3) подряд идущих чисел не дают в сумме 4. Обе девочки выполнили задание. Могло ли оказаться, что Лена написала какое-то число, которое Катя не написала? (С. П. Павлов)
3. У числа 1234 произведение цифр на 14 больше, чем сумма цифр (произведение цифр равно $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$, а сумма цифр равна $1 + 2 + 3 + 4 = 10$). Придумайте число, у которого произведение цифр на 2021 больше, чем сумма цифр. (А. А. Теслер)
4. Проверяющий олимпиады после тяжёлого трудового дня покидает рабочий кабинет, освещение в котором работает в нескольких режимах. Когда проверяющий вышел из комнаты, он плотно закрыл за собой дверь и встал у кнопки, которая переключает эти режимы (режимы переключаются по порядку от первого до последнего, после последнего идет выключение, а затем все заново). Но, к сожалению, проверяющий очень устал и забыл точное количество режимов, а помнит лишь, что их было не больше 5 (не считая выключенного состояния) и что сейчас включён первый режим. Помогите проверяющему выключить свет в кабинете, если он не может видеть, какой режим включён. (А. Б. Владимиров)
5. Четыре группы студентов (по 26 человек в каждой) решили отправиться в поездку на автобусах, а затраты распределить поровну. Транспортная компания предоставляет автобусы двух видов — на 30 пассажиров (по одной цене) и на 50 пассажиров (по более высокой цене). Сначала студенты решили заказать автобусы как можно дешевле, и вышло, что каждому нужно заплатить по 250 рублей. Потом выяснилось, что ни одна из групп не хочет оказаться разделённой между двумя автобусами, и с учётом этого каждому студенту пришлось бы заплатить по 300 рублей. В конце концов по одному студенту в каждой из групп отказались от поездки. Сколько теперь придётся заплатить каждому из студентов? (Л. С. Корешкова)
6. На клетчатой бумаге нарисован квадрат 5×5 (в нём всего 25 клеток). Дима, делая разрезы только по линиям, хочет разделить квадрат на несколько (более одной) фигурок, у каждой из которых периметр (вычисляется в клетках) равен P . При каких $P < 25$ Диме удастся это сделать? (С. П. Павлов)
7. Андрей задумал два различных натуральных числа. На одной из карточек он записал их сумму, а на другой — удвоенное меньшее число. После этого одну из карточек он дал Боре, а другую Вите.
Боря: Увы, я не знаю, какая у меня карточка.
Витя: Я тоже не знаю, какая у меня карточка.
Боря: Зато я теперь знаю.
У кого оказалась карточка с суммой? (К. А. Кноп)

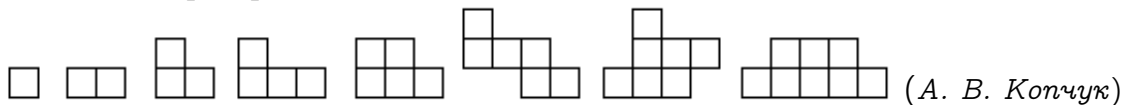


Задачи для 6 класса

Работы сдаются в электронном виде (например, в виде сканов или doc-файлов с текстом), подробности на странице formulo.org/ru/olymp/2021-math-ru/. Последний срок сдачи — 10 ноября 2021 года в 23:59:59 по UTC (то есть 11 ноября в 02:59:59 по московскому времени).

Работы должны быть сделаны самостоятельно. В большинстве задач нужны не только ответы, но и полные обоснования. В работе не должно быть личных данных участника, то есть подписывать работу не следует.

1. Используя каждую из фигур по одному разу, составьте из них прямоугольник. Фигуры можно поворачивать и переворачивать.



2. По кругу написаны 6 натуральных чисел, сумма которых равна 12. Катя заметила, что какие бы несколько (от 1 до 5) подряд идущих чисел ни взять, их сумма не равна 6. Чему может равняться максимальное из чисел? (Укажите все возможные варианты ответа на этот вопрос и объясните, почему эти варианты возможны, а все остальные — нет.)

(С. П. Павлов)

3. У числа 1234 произведение цифр на 14 больше, чем сумма цифр (произведение цифр равно $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$, а сумма цифр равна $1 + 2 + 3 + 4 = 10$). Придумайте число, у которого произведение цифр на 2021 больше, чем сумма цифр.

(А. А. Теслер)

4. В некотором месяце было пять понедельников, в следующем пять вторников, а в следующем — пять сред. В какой день недели начался год, в котором всё это было?

(А. А. Теслер)

5. Четыре группы студентов (по 26 человек в каждой) решили отправиться в поездку на автобусах, а затраты распределить поровну. Транспортная компания предоставляет автобусы двух видов — на 30 пассажиров (по одной цене) и на 50 пассажиров (по более высокой цене). Сначала студенты решили заказать автобусы как можно дешевле, и вышло, что каждому нужно заплатить по 250 рублей. Потом выяснилось, что ни одна из групп не хочет оказаться разделённой между двумя автобусами, и с учётом этого каждому студенту пришлось бы заплатить по 300 рублей. В конце концов по одному студенту в каждой из групп отказались от поездки. Сколько теперь придётся заплатить каждому из студентов?

(Л. С. Корешкова)

6. В чемпионате по футболу участвуют 32 команды, разбитые на 8 групп по 4 команды. В каждой группе каждая команда играет с каждой из трёх остальных по одному разу. За выигрыш в матче даётся 3 очка, за поражение 0, за ничью 1 (то есть суммарно команда может заработать от 0 до 9 очков). Обязательно ли после окончания групповых игр найдутся 5 команд, у которых поровну очков?

(А. А. Теслер)

7. Андрей задумал два различных натуральных числа. На одной из карточек он записал их сумму, а на другой — удвоенное меньшее число. После этого одну из карточек он дал Боре, а другую Вите.

Боря: Увы, я не знаю, какая у меня карточка.

Витя: Я тоже не знаю, какая у меня карточка.

Боря: Зато я теперь знаю.

У кого оказалась карточка с суммой?

(К. А. Кноп)



Задачи для 7 класса

Работы сдаются в электронном виде (например, в виде сканов или doc-файлов с текстом), подробности на странице formulo.org/ru/olymp/2021-math-ru/. Последний срок сдачи — 10 ноября 2021 года в 23:59:59 по UTC (то есть 11 ноября в 02:59:59 по московскому времени).

Работы должны быть сделаны самостоятельно. В большинстве задач нужны не только ответы, но и полные обоснования. В работе не должно быть личных данных участника, то есть подписывать работу не следует.

1. На клетчатой бумаге нарисован квадрат 5×5 (в нём всего 25 клеток). Дима, делая разрезы только по линиям, хочет разделить квадрат на несколько (более одной) фигурок, у каждой из которых периметр (вычисляется в клетках) равен P . При каких $P < 25$ Диме удастся это сделать?
(С. П. Павлов)
2. Проверяющий олимпиады после тяжёлого трудового дня покидает рабочий кабинет, освещение в котором работает в нескольких режимах. Когда проверяющий вышел из комнаты, он плотно закрыл за собой дверь и встал у кнопки, которая переключает эти режимы (режимы переключаются по порядку от первого до последнего, после последнего идет выключение, а затем все заново). Но, к сожалению, проверяющий очень устал и забыл точное количество режимов, а помнит лишь, что их было не больше 5 (не считая выключенного состояния) и что сейчас включён первый режим. Помогите проверяющему выключить свет в кабинете, если он не может видеть, какой режим включён.
(А. Б. Владимиров)
3. Угол между часовой и минутной стрелками часов составляет 70° . Через сколько минут он в следующий раз станет равен 70° ? Обе стрелки вращаются непрерывно.
(А. А. Теслер)
4. В некотором месяце было пять понедельников, в следующем пять вторников, а в следующем — пять сред. В какой день недели начался год, в котором всё это было?
(А. А. Теслер)
5. Типография определяет стоимость печати книги так: складывает стоимость обложки со стоимостью каждой из страниц, а результат округляет вверх до ближайшего целого числа рублей (то есть, например, если получилось 202 рубля 1 копейка, то это округляется до 203 рублей). Известно, что стоимость книги объёмом 104 страницы составляет 134 рубля, а книги объёмом 192 страницы — 181 рубль. Сколько стоит печать обложки, если она стоит целое число рублей, а стоимость одной страницы составляет целое число копеек?
(П. Д. Муленко)
6. В чемпионате по футболу участвуют 32 команды, разбитые на 8 групп по 4 команды. В каждой группе каждая команда играет с каждой из трёх остальных по одному разу. За выигрыш в матче даётся 3 очка, за поражение 0, за ничью 1 (то есть суммарно команда может заработать от 0 до 9 очков). Обязательно ли после окончания групповых игр найдутся 5 команд, у которых поровну очков?
(А. А. Теслер)
7. Андрей задумал два различных натуральных числа. На одной из карточек он записал их сумму, а на другой — удвоенное меньшее число. После этого одну из карточек он дал Боре, а другую Вите.
Боря: Увы, я не знаю, какая у меня карточка.
Витя: Я тоже не знаю, какая у меня карточка.
Боря: Зато я теперь знаю.
У кого оказалась карточка с суммой?
(К. А. Кноп)



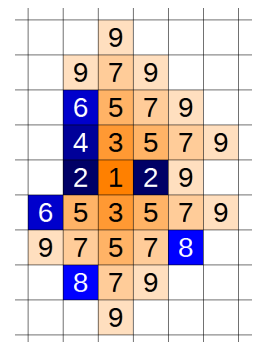
Задачи для 8 класса

Работы сдаются в электронном виде (например, в виде сканов или doc-файлов с текстом), подробности на странице formulo.org/ru/olymp/2021-math-ru/. Последний срок сдачи — 10 ноября 2021 года в 23:59:59 по UTC (то есть 11 ноября в 02:59:59 по московскому времени).

Работы должны быть сделаны самостоятельно. В большинстве задач нужны не только ответы, но и полные обоснования. В работе не должно быть личных данных участника, то есть подписывать работу не следует.

1. У числа 1234 произведение цифр на 14 больше, чем сумма цифр (произведение цифр равно $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$, а сумма цифр равна $1 + 2 + 3 + 4 = 10$). А сколько разрядов содержит наименьшее натуральное число, у которого произведение цифр на 2021 меньше, чем сумма цифр? (А. А. Теслер)
2. При каких натуральных n выражение $45^n + 988 \cdot 2^n$ делится на 2021? (Л. С. Корешкова)
3. Угол между часовой и минутной стрелками часов составляет 70° . Через сколько минут он в следующий раз станет равен 70° ? Обе стрелки вращаются непрерывно. (А. А. Теслер)
4. Переставляя цифры в трёхзначном числе, можно получить до 6 различных чисел. Какое наибольшее количество из них могут образовывать арифметическую прогрессию? (Арифметическая прогрессия — это последовательность, в которой каждое число больше предыдущего на одну и ту же величину, например: 57, 63, 69, 75.) (В. П. Федотов)
5. Отметим на шахматной доске центры всех клеток (центры белых клеток — белыми точками, центры чёрных — чёрными). Сколько существует равнобедренных прямоугольных треугольников, все вершины которых — отмеченные точки одного цвета? (Л. С. Корешкова)
6. На плоскости нарисован квадрат $ABCD$ и точка M внутри него. Придумайте, как с помощью одной линейки, проведя не более 20 линий, провести через M прямую, параллельную диагонали AC . (На линейке нет делений, на ней нельзя ничего отмечать — можно только проводить прямую через две данные точки.) (А. А. Теслер)

7. В городе, представляющем собой бесконечную клетчатую плоскость, есть n пожарных. Однажды в одной из клеток города возникает пожар. В следующую минуту каждый пожарный может (но не обязан) защитить какую-нибудь одну ещё не горящую клетку, соседнюю с горящей. Ещё через минуту пожар распространяется на все клетки, соседние с горящими, кроме защищённых. Далее пожарные и пожар действуют по очереди. При каком минимальном n пожарные смогут локализовать пожар, то есть сделать так, чтобы он перестал распространяться?



(На рисунке показано, как могут развиваться события при $n = 2$; нечётные числа соответствуют распространению пожара, чётные — действиям пожарных.)

(Л. С. Корешкова)



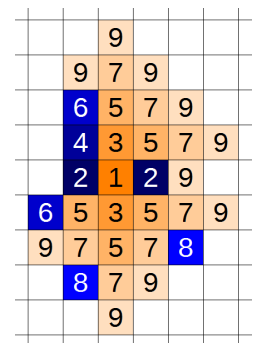
Задачи для 9 класса

Работы сдаются в электронном виде (например, в виде сканов или doc-файлов с текстом), подробности на странице formulo.org/ru/olymp/2021-math-ru/. Последний срок сдачи — 10 ноября 2021 года в 23:59:59 по UTC (то есть 11 ноября в 02:59:59 по московскому времени).

Работы должны быть сделаны самостоятельно. В большинстве задач нужны не только ответы, но и полные обоснования. В работе не должно быть личных данных участника, то есть подписывать работу не следует.

1. Марине приснился треугольник со сторонами 9 и 4, и биссектрисой, выходящей из угла, образованного этими сторонами, длиной 6. Сможет ли Марина воплотить сон в реальность? (Л. С. Корешкова)
2. При каких натуральных n выражение $45^n + 988 \cdot 2^n$ делится на 2021? (Л. С. Корешкова)
3. Угол между часовой и минутной стрелками часов составляет 70° . Через сколько минут он в следующий раз станет равен 70° ? Обе стрелки вращаются непрерывно. (А. А. Теслер)
4. Переставляя цифры в трёхзначном числе, можно получить до 6 различных чисел. Какое наибольшее количество из них могут образовывать арифметическую прогрессию? (Арифметическая прогрессия — это последовательность, в которой каждое число больше предыдущего на одну и ту же величину, например: 57, 63, 69, 75.) (В. П. Федотов)
5. Назовём числовое множество X периодичным (с периодом $T > 0$), если для всякого $a \in X$ числа $a + T$ и $a - T$ также лежат в X . Периодично ли множество всех целых чисел, содержащих в записи цифру 5? (А. А. Теслер)
6. На плоскости нарисован квадрат $ABCD$ и точка M внутри него. Придумайте, как с помощью одной линейки, проведя не более 20 линий, провести через M прямую, параллельную диагонали AC . (На линейке нет делений, на ней нельзя ничего отмечать — можно только проводить прямую через две данные точки.) (А. А. Теслер)

7. В городе, представляющем собой бесконечную клетчатую плоскость, есть n пожарных. Однажды в одной из клеток города возникает пожар. В следующую минуту каждый пожарный может (но не обязан) защитить какую-нибудь одну ещё не горящую клетку, соседнюю с горящей. Ещё через минуту пожар распространяется на все клетки, соседние с горящими, кроме защищённых. Далее пожарные и пожар действуют по очереди. При каком минимальном n пожарные смогут локализовать пожар, то есть сделать так, чтобы он перестал распространяться?



(На рисунке показано, как могут развиваться события при $n = 2$; нечётные числа соответствуют распространению пожара, чётные — действиям пожарных.)

(Л. С. Корешкова)



Задачи для 10 класса

Работы сдаются в электронном виде (например, в виде сканов или dos-файлов с текстом), подробности на странице formulo.org/ru/olymp/2021-math-ru/. Последний срок сдачи — 10 ноября 2021 года в 23:59:59 по UTC (то есть 11 ноября в 02:59:59 по московскому времени).

Работы должны быть сделаны самостоятельно. В большинстве задач нужны не только ответы, но и полные обоснования. В работе не должно быть личных данных участника, то есть подписывать работу не следует.

1. В некотором месяце было пять понедельников, в следующем пять вторников, а в следующем — пять сред. В какой день недели начался год, в котором всё это было?

(А. А. Теслер)

2. Две окружности касаются внутренним образом в точке A . AB — диаметр большей окружности, точка O — центр меньшей. Хорда BD большей окружности касается меньшей в точке C . Докажите, что $BO \cdot CD = OA \cdot BC$.

(Е. С. Голикова)

3. Андрей задумал два различных натуральных числа. На одной из карточек он записал их сумму, а на другой — удвоенное меньшее число. После этого одну из карточек он дал Боре, а другую Вите.

Боря: Увы, я не знаю, какая у меня карточка.

Витя: Я тоже не знаю, какая у меня карточка.

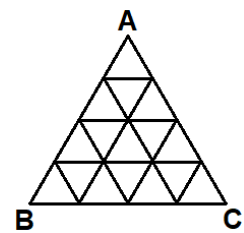
Боря: Зато я теперь знаю.

У кого оказалась карточка с суммой?

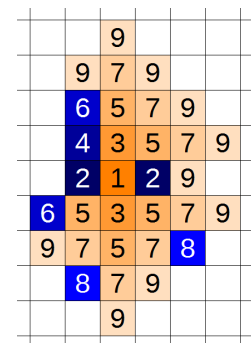
(К. А. Кноп)

4. Дана треугольная сетка, показанная на рисунке. Юный робототехник Петя посадил в точку A робота-улитку. Чтобы пройти по одному ребру сетки, улитке нужен час. На каждой развилке улитка с равной вероятностью выбирает любое из направлений (в том числе то, откуда только что пришла), а между развилками не разворачивается. Петя ушёл и вернулся ровно через 4 часа. Что более вероятно: что он увидит улитку на стороне BC или в вершине A ?

(Л. С. Корешкова, А. А. Теслер)



5. В городе, представляющем собой бесконечную клетчатую плоскость, есть n пожарных. Однажды в одной из клеток города возникает пожар. В следующую минуту каждый пожарный может (но не обязан) защитить какую-нибудь одну ещё не горящую клетку, соседнюю с горящей. Ещё через минуту пожар распространяется на все клетки, соседние с горящими, кроме защищённых. Далее пожарные и пожар действуют по очереди. При каком минимальном n пожарные смогут локализовать пожар, то есть сделать так, чтобы он перестал распространяться?



(На рисунке показано, как могут развиваться события при $n = 2$; нечётные числа соответствуют распространению пожара, чётные — действиям пожарных.)

(Л. С. Корешкова)

6. В ромб $KLMN$ вписана окружность, которая касается стороны LK в точке P . Через точки P и K проведены параллельные прямые до пересечения со сторонами LM и MN в точках Q и R соответственно. Докажите, что окружность касается QR .

(Л. С. Корешкова)

7. Произведение трёх положительных чисел x , y и z равно 1. Какое наименьшее значение принимает выражение $\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{x+y+z-1}$?

(А. Р. Араб)



Задачи для 11 класса

Работы сдаются в электронном виде (например, в виде сканов или doc-файлов с текстом), подробности на странице formulo.org/ru/olymp/2021-math-ru/. Последний срок сдачи — 10 ноября 2021 года в 23:59:59 по UTC (то есть 11 ноября в 02:59:59 по московскому времени).

Работы должны быть сделаны самостоятельно. В большинстве задач нужны не только ответы, но и полные обоснования. В работе не должно быть личных данных участника, то есть подписывать работу не следует.

1. В некотором месяце было пять понедельников, в следующем пять вторников, а в следующем — пять сред. В какой день недели начался год, в котором всё это было?

(А. А. Теслер)

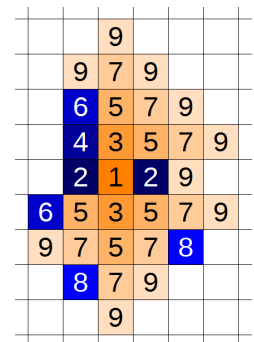
2. На далёкой планете X стоят телескопы: телескоп A — на Северном полюсе, телескопы B и C — на экваторе, причём расстояние между B и C (по поверхности планеты) вдвое меньше, чем между A и C . Каждый телескоп видит ровно половину неба (ту, которая не закрыта планетой). Какова вероятность, что в данный момент во все три телескопа видно наше Солнце?

(О. А. Пяйве)

3. Переставляя цифры в трёхзначном числе, можно получить до 6 различных чисел. Какое наибольшее количество из них могут образовывать арифметическую прогрессию? (Арифметическая прогрессия — это последовательность, в которой каждое число больше предыдущего на одну и ту же величину, например: 57, 63, 69, 75.)

(В. П. Федотов)

4. В городе, представляющем собой бесконечную клетчатую плоскость, есть n пожарных. Однажды в одной из клеток города возникает пожар. В следующую минуту каждый пожарный может (но не обязан) защитить какую-нибудь одну ещё не горящую клетку, соседнюю с горящей. Ещё через минуту пожар распространяется на все клетки, соседние с горящими, кроме защищённых. Далее пожарные и пожар действуют по очереди. При каком минимальном n пожарные смогут локализовать пожар, то есть сделать так, чтобы он перестал распространяться?



(На рисунке показано, как могут развиваться события при $n = 2$; нечётные числа соответствуют распространению пожара, чётные — действиям пожарных.)

(Л. С. Корешкова)

5. Докажите, что существует натуральное число, которое можно представить в виде суммы квадратов двух натуральных чисел не менее чем 2021 способом.

(О. А. Пяйве)

6. В ромб $KLMN$ вписана окружность, которая касается стороны LK в точке P . Через точки P и K проведены параллельные прямые до пересечения со сторонами LM и MN в точках Q и R соответственно. Докажите, что окружность касается QR .

(Л. С. Корешкова)

7. Произведение трёх положительных чисел x , y и z равно 1. Какое наименьшее значение принимает выражение $\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{x+y+z-1}$?

(А. Р. Араб)