Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2020–2021 учебный год. Заключительный этап

# Решения и критерии проверки

Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов. За некоторые продвижения могут ставиться баллы, а за недостатки — сниматься. Для большинства задач после решения указаны критерии проверки (напечатаны серым цветом). Но, конечно, не всякое решение укладывается в заранее придуманные критерии.

## Задачи для 5 класса

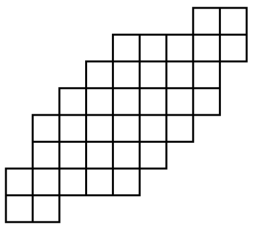
1. За один ход можно либо прибавить к числу одну из его цифр, либо вычесть из него одну из его цифр (например, из числа 142 можно получить $142 + 2 = 144$, $142 - 4 = 138$ и несколько других чисел).
а) Можно ли за несколько ходов получить из числа 2020 число 2021?
б) Можно ли за несколько ходов получить из числа 1000 число 2021? (*А. А. Теслер*)

**Решение.** а) Да, например, так: 20**2**0→20**1**8→**2**019→2021.

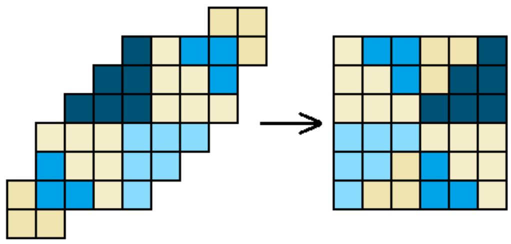
б) Да. Например, прибавляя первую цифру (единицу), дойдём до числа 2000; прибавляя первую цифру (двойку), дойдём до 2020; далее см. пункт а.

**Критерии.** Пункт а) 3 балла, б) 4 балла. В пункте (б) ставим 1 балл за продвижение до 1999 (например, за «решение» вида «от 1000 прибавляем по единице и вот он, результат 2021»).

2. Покажите, как разрезать «конфетку» на восемь фигур двух видов (по четыре фигуры каждого вида) и собрать из этих восьми фигур квадрат. (Фигуры одного вида должны быть одинаковыми, то есть совпадать при наложении друг на друга, но они могут быть по-разному повёрнуты.) (*Л. С. Корешкова*)

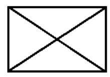


**Решение.** Например, так.

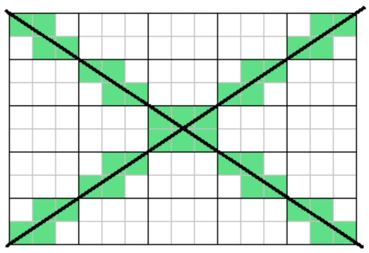


**Критерии.** Показано, как разрезать конфетку, но не показано, как из полученных частей составить квадрат (но его можно составить) — 6 баллов.

3. В клетчатом прямоугольнике длиной 303 клетки и шириной 202 клетки провели две диагонали и покрасили все клетки, внутри которых они прошли. Сколько клеток оказалось закрашено? (*О. А. Пяйве, А. А. Теслер*)



**Решение.** Разделим мысленно большой прямоугольник на прямоугольнички $2 \times 3$. (Центральная часть прямоугольника показана на рисунке.)



Заметим, что каждая диагональ пересекает 101 такой прямоугольничек (проходя через их вершины), и в каждом из них проходит через 4 клетки. Таким образом, две диагонали, казалось бы, проходят через $404 \cdot 2 = 808$ клеток. Но на самом деле центральный прямоугольничек $2 \times 3$ является общим для обеих диагоналей, и в нём закрашены не 8 клеток (как следовало бы из нашего подсчёта), а только 6.

**Ответ:** 806 клеток.

**Критерии.** Идея разделить прямоугольник на прямоугольники $2 \times 3$ или указание, что диагональ проходит через их узлы — не менее 1 балла (но за «решение» вида «в прямоугольнике $2 \times 3$ диагонали пересекают 6 клеток, значит, в прямоугольнике $202 \times 303$ будет в 101 раз больше» — 0 баллов, поскольку тут нет идеи деления на прямоугольники).

Отсутствует поправка, связанная с центром (то есть ответ 808) — 3 балла; центр учтён, но неверно — 4 балла.

4. В классе учатся 28 человек. На 8 марта каждый мальчик подарил каждой девочке один цветок — тюльпан, розу или нарцисс. Сколько было подарено роз, если известно, что их в 4 раза больше, чем нарциссов, но в 3 раза меньше, чем тюльпанов? (*А. А. Теслер*)

   **Решение.** Обозначим количество нарциссов $x$, тогда роз $4x$, а тюльпанов $12x$, значит, всего цветов $17x$. Количество цветов равно произведению числа мальчиков на число девочек. Поскольку 17 — простое число, то одно из этих количеств делится на 17, то есть это 17 и 11. Значит, $17x = 17 \cdot 11$, то есть $x = 11$, а искомое количество роз $4x = 44$.

   **Ответ:** 44 розы.

   **Критерии.** Неполное переборное решение — не более 4 баллов. Только ответ — 1 балл.

5. Однажды Валера вышел из дома, дошёл пешком до дачи, покрасил там 11 досок забора и вернулся домой через 2 часа после выхода. В другой раз Валера с Ольгой пошли на дачу вместе, вдвоём покрасили 9 досок забора (не помогая и не мешая друг другу), вместе ушли и вернулись домой через 3 часа после выхода. Сколько досок успеет покрасить Ольга в одиночку, если ей надо вернуться домой через час после выхода? Физические способности Валеры и Ольги, их трудолюбие и условия работы неизменны. (*В. П. Федотов*)

   **Решение.** Странный результат (вдвоём за большее время персонажи успели выполнить меньше работы) объясняется разным временем, затраченным на ходьбу, ведь скорость «совместной» ходьбы равна меньшей из скоростей путников. Во второй раз время работы Валеры уменьшилось, значит, время в пути увеличилось более чем на час; отсюда следует, что Ольга тратит на путь до дачи и обратно больше часа. Поэтому за час она даже не успеет дойти и вернуться.

   **Ответ:** 0 досок.

   **Критерии.** Только ответ — 0 баллов. Понимание того, что двое идут со скоростью более медленного путника (то есть Ольги) — 2 балла.

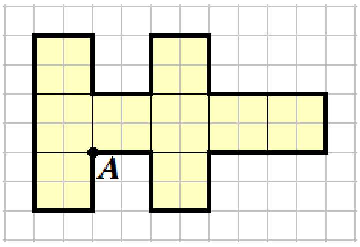
6. Назовём число *стройным*, если все цифры его десятичной записи различны и идут в порядке возрастания. Каких стройных чисел больше: четырёхзначных или пятизначных? (*В. П. Федотов*)

   **Решение.** Сопоставим каждому четырёхзначному числу пятизначное, состоящее из всех остальных ненулевых цифр в порядке возрастания (например, числу 1378 сопоставим 24569). Заметим, что получилось взаимно однозначное соответствие, поэтому таких чисел поровну.

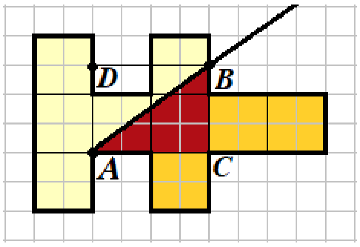
   **Критерии.** Понимание того, что ни в одном из чисел нет цифры 0, — 1 балл.

# Задачи для 6 класса

1. См. задачу 1 для 5 класса.
2. На клетчатом листе нарисована фигура. Проведите луч с началом в точке $A$, разрезающий её на две части равной площади. Покажите какой-нибудь узел сетки (кроме точки $A$), через который проходит луч, и объясните, почему площади двух частей равны. *(Л. С. Корешкова)*




**Решение.** На рисунке показан луч и узел $B$, через который он проходит. Заметим, что вся фигура состоит из 9 «больших» квадратов. Правая же часть состоит из трёх таких квадратов и треугольника $ABC$ (выделен красным), площадь которого составляет 1,5 квадрата (в чём легко убедиться, мысленно достроив его до прямоугольника $ACBD$, площадь которого — 3 квадрата). Итого площадь правой части равна 4,5 квадратам, то есть половине площади всей фигуры.




**Критерии.** Разрезано верно, но не обосновано — 2 балла.

3. См. задачу 4 для 5 класса.
4. См. задачу 5 для 5 класса.
5. См. задачу 6 для 5 класса.
6. На слёт «Plants VS Zombies» приехали несколько растений и зомби (всего не больше 20 существ), причём оказалось, что все существа разного роста. Растения всегда говорят правду тем, кто ниже их по росту, и врут тем, кто выше их. Зомби же, наоборот, врут более низким существам и говорят правду более высоким. При знакомстве каждый участник подошел к каждому и сказал либо «Я выше тебя», либо «Я ниже». Фраза «Я ниже» прозвучала 20 раз. Прощаясь, каждый должен был снова подойти к каждому и сказать «Я выше и я растение». Если какое-то существо не могло так сказать, то оно хлопало в ладоши. Раздалось 18 хлопков. Вычислите, сколько существ приехало на слёт, и расставьте их по росту. *(П. Д. Муленко)*

**Решение.** Пусть общее количество существ равно $n$, и ровно $z$ из них — зомби. При знакомстве растения говорят всем «Я выше тебя», а зомби всем «Я ниже». Каждый зомби сказал эту фразу всем, кроме себя, поэтому получаем $z(n-1) = 20$. По условию $n-1 < 20$, поэтому возможны варианты: $z = 2$, $n-1 = 10$; $z = 4$, $n-1 = 5$; $z = 5$, $n-1 = 4$ (большие $z$ невозможны, поскольку $z \leqslant n$).

Теперь изучим прощание. Когда растение обращается к тому, кто ниже его, оно должно говорить правду, и фраза «Я выше и я растение» — правда. Когда к тому, кто выше, — должно лгать, и эта фраза является ложью (первая её часть ложна). Для зомби эта фраза всегда ложна, поэтому оно может сказать её каждому, кто ниже их, но не может сказать тому, кто выше их. Значит, все хлопки проделывают зомби в отношении тех, кто выше их. Нетрудно видеть, что из трёх вариантов подходит только $z = 2, n = 11$ (иначе хлопков получается меньше 18). Из 11 существ зомби должны быть самым низким и третьим с конца по росту — только тогда получается $10 + 8 = 18$ хлопков (в остальных случаях либо $10 + 9$, либо не более 17).

**Ответ:** 11 существ; при упорядочении роста по возрастанию — ЗРЗРРРРРРРР.

**Критерии.** 3 балла, если участник смог определить, что зомби может быть 2, 4 или 5.

Снимаем 1 балл, если в решении явно не указано расположение существ по росту, но все остальное объяснено.

# Задачи для 7 класса

1. См. задачу 1 для 5 класса.

2. Можно ли в выражении $A\cdot 5^n + B\cdot 3^{n-1} + C$ подобрать натуральные коэффициенты $A$, $B$ и $C$ так, чтобы ни один из них не делился на 8, но результат при любом натуральном $n$ делился на 8? (*Л. С. Корешкова*)

   **Решение.** Да. Заметим, что $5^n$ даёт остаток 1 при делении на 4, а $3^{n-1}$ всегда нечётное. Поэтому можно взять $A = 2$, $B = 4$, $C = 2$.

   **Критерии.** Ответ «можно» без пояснения — 0 баллов. Не более одного балла, если один из коэффициентов кратен 8.

   Просто даны верные коэффициенты без пояснения — 3 балла; есть верные коэффициенты и попытка доказательства, что они подходят, не доведённая до конца (например, неполный перебор) — $\approx 5$ баллов.

3. Однажды Валера вышел из дома, дошёл пешком до дачи, покрасил там 11 досок забора и вернулся домой через 2 часа после выхода. В другой раз Валера с Ольгой пошли на дачу вместе, вдвоём покрасили 8 досок забора (не помогая и не мешая друг другу), вместе ушли и вернулись домой через 3 часа после выхода. Сколько досок успеет покрасить Ольга в одиночку, если ей надо вернуться домой через полтора часа после выхода? Физические способности Валеры и Ольги, их трудолюбие и условия работы неизменны. (*В. П. Федотов*)

   **Решение.** *Это усложнённая версия задачи 5 для 5 класса.*

   Странный результат (вдвоём за большее время персонажи успели выполнить меньше работы) объясняется разным временем, затраченным на ходьбу, ведь скорость «совместной» ходьбы равна меньшей из скоростей путников. Во второй раз Валера работал не более чем $2\cdot\frac{8}{11}$ часов, значит, на путь они затратили хотя бы $3 - \frac{16}{11} = \frac{17}{11} > 1{,}5$ часов. Значит, за полтора часа Ольга не успеет даже дойти до дачи и вернуться.

   **Ответ:** 0 досок.

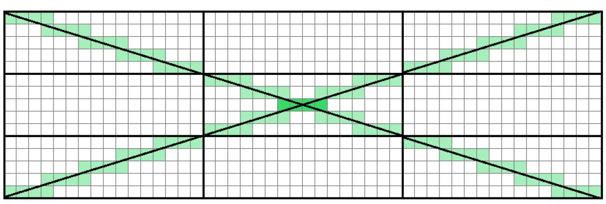
   **Критерии.** Только ответ — 0 баллов.

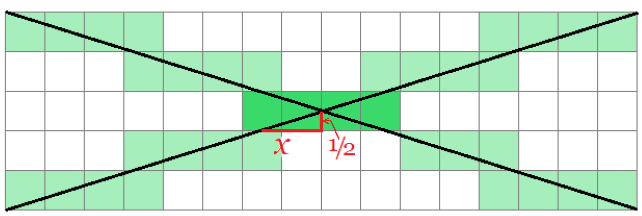
   Оцениваемые продвижения:
   1) Понимание того, что двое идут со скоростью более медленного из них (это сформулировано явно или используется в решении) — 1 балл.
   2) С учётом этого указано, что Ольга тратит на путь более часа (или хотя бы на час больше, чем Валера, или что-то подобное) — ещё +2 балла.
   3) Вычислено, что во втором случае Валера в одиночку справился бы с работой за 16/11 часа (или что он справился бы менее чем за 1,5 часа) — 2 балла (суммируются с продвижениями 1 и 2).

   Например, решение «Во втором случае они шли на 1 час дольше, значит, Ольга тратит на путь на час больше Валеры, значит, в третьем случае у неё будет максимум полчаса на работу, а дальше непонятно что делать» приносит 3 балла (продвижения 1 и 2).
   Решение типа «Во втором случае Валера в одиночку работал бы не более $2\cdot 8/11$ часов, а раз у них ушло больше времени, значит, Ольга мешала; а значит, в одиночку Ольга ничего не покрасит (или покрасит отрицательное количество досок)» приносит 2 балла (только продвижение 3).

4. В клетчатом прямоугольнике $20210 \times 1505$ провели две диагонали и покрасили все клетки, внутри которых они прошли. Сколько клеток оказалось закрашено?
   (*О. А. Пяйве, А. А. Теслер*)

   **Решение.** *Это усложнённая версия задачи 3 для 5 класса.*





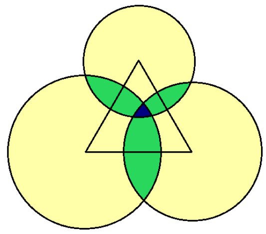
Сначала определим, сколько клеток пересекает одна диагональ. Заметим, что $20210 = 215 \cdot 94, 1505 = 215 \cdot 7$. Значит, диагональ проходит через 215 прямоугольников $94 \times 7$. В каждом из них она пересекает 93 вертикальных и 6 горизонтальных линии сетки (в несовпадающих точках), 99 точек пересечения делят её на 100 отрезков, то есть она пересекает 100 клеток. Всего получается 21500 клеток.

Две диагонали должны бы пересекать 43000 клеток, но среди этих клеток есть совпадающие (вблизи центра прямоугольника), которые посчитаны дважды. Узнаем, сколько их. Большая из координат центра целая, меньшая — полуцелая. Отношение сторон прямоугольника равно $94 : 7$, поэтому $x = \frac{1}{2} \cdot \frac{94}{7} \in (6; 7)$ (см. рисунок). Значит, общих клеток 14.

**Ответ:** 42986.

**Критерии.** Верно посчитано, сколько клеток пересекает каждая диагональ, но не учитывается, что некоторые из них совпадают, — 3 балла. Если сверх этого учитывается «центр», но неверно — от 4 баллов. Найден НОД чисел без дальнейших продвижений — 1 балл.

5. На плоскости нарисован равносторонний треугольник и три окружности с центрами в его вершинах, причём радиус каждой из окружностей меньше высоты треугольника. Точка плоскости красится в жёлтый цвет, если она лежит внутри ровно одной из окружностей; в зелёный, если внутри ровно двух; в синий, если внутри всех трёх. Оказалось, что жёлтая площадь равна 1000, зелёная 100, а синяя — 1. Найдите площадь треугольника. (*П. Д. Муленко*)



**Решение.** Сумма площадей трёх кругов равна $1000 + 2 \cdot 100 + 3 \cdot 1 = 1203$; сумма площадей трёх «линз» равна $100 + 3 \cdot 1 = 103$ («линза» — это пересечение двух кругов).

Площадь треугольника равна $S_1 - S_2 + S_3$, где
$S_1 = 1203/6$ — сумма площадей трёх 60-градусных секторов,
$S_2 = 103/2$ — сумма площадей половинок трёх «линз», лежащих внутри треугольника;
$S_3 = 1$ — площадь синей области.

Действительно, при таком подсчёте каждая жёлтая область внутри треугольника посчитана 1 раз, каждая зелёная: $2 - 1 = 1$ раз, синяя область: $3 - 3 + 1 = 1$ раз.

Итого получаем $\dfrac{1203}{6} - \dfrac{103}{2} + 1 = \dfrac{1203 - 309 + 6}{6} = \dfrac{900}{6} = 150$.

**Ответ:** 150.

**Критерии.** За ошибки в формуле включений-исключений — не более 3 баллов.

6. См. задачу 6 для 6 класса.

# Задачи для 8 класса

1. См. задачу 2 для 7 класса.

2. Сколько пятизначных чисел являются корнями уравнения $x = [\sqrt{x} + 1][\sqrt{x}]$? Символом $[a]$ обозначается целая часть числа $a$, то есть наибольшее целое число, не превосходящее $a$. (*О. А. Пяйве*)

**Решение.** Обозначим $n = [\sqrt{x}]$, тогда $[\sqrt{x} + 1] = [\sqrt{x}] + 1 = n + 1$, то есть $x = n(n + 1)$.

Все числа вида $x = n(n + 1)$ подходят, поскольку для них $n < \sqrt{x} < n + 1$, то есть $[\sqrt{x}]$ действительно равно $n$.

Осталось посчитать пятизначные числа такого вида. Заметим, что $99 \cdot 100 < 10\,000 < 100 \cdot 101$, $315 \cdot 316 < 100\,000 < 316 \cdot 317$, то есть $x$ пятизначное при $n$ от 100 до 315 включительно.

**Ответ:** 216 чисел.

**Критерии.** Не менее 3 баллов, если участник ищет числа вида $n(n+1)$; не менее 4 баллов, если он нашёл число 315 в качестве «верхней границы».

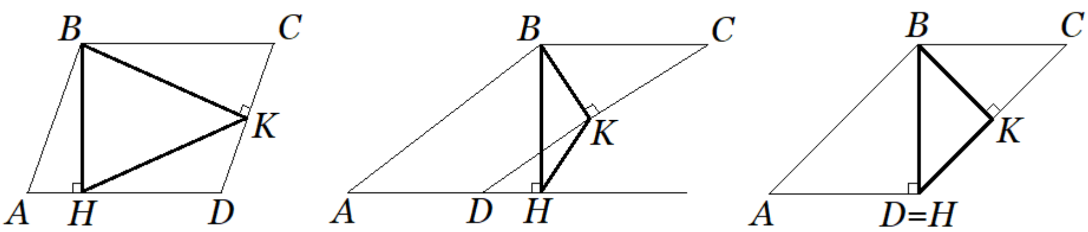
5 баллов — ответ отличается от верного на 1 в любую сторону.

6 баллов — верное решение и ответ, но нечёткое объяснение: например, не доказано (или даже не упомянуто), что все числа вида $n(n+1)$ действительно подходят.

3. В параллелограмме $ABCD$ ($AB \neq BC$) из тупого угла $B$ провели две высоты, $BH$ и $BK$ (основания высот лежат на сторонах параллелограмма и не совпадают с его вершинами). Треугольник $BHK$ оказался равнобедренным. Укажите все возможные значения угла $BAD$.
*(Л. С. Корешкова)*

**Решение.** Поскольку стороны параллелограмма не равны, то и высоты его не равны (например, исходя из формулы площади), то есть $BH \neq BK$. Это значит, что в треугольнике $BHK$ сторона $KH$ равна одной из двух других. Будем для определённости считать, что $KH = BK$, причём $H \in AD$, $K \in CD$.

Обозначим угол $KBH$ через $\alpha$ (он острый, поскольку в треугольнике $BKH$ таких угла два), тогда $\angle ABH = 90^\circ - \alpha$, а искомый $\angle BAH = 90^\circ - \angle ABH = \alpha$.




Посмотрим, при каких $\alpha$ точки $K$ и $H$ лежат на сторонах $AD$ и $CD$. Будем считать, что нам дан $\triangle BKH$ и мы строим по нему параллелограмм. Нужно, чтобы отрезок $HK$ находился внутри прямых углов $BKD$ и $BHD$, то есть углы $= 180^\circ - 2\alpha$ и $\angle BHK = \alpha$ должны быть острыми. Это выполняется при $45^\circ < \alpha < 90^\circ$. (На рисунке показано, как будет выглядеть параллелограмм при различных значениях $\alpha$.)
Кроме того, поскольку $BH \neq BK$, то $\alpha \neq 60^\circ$.

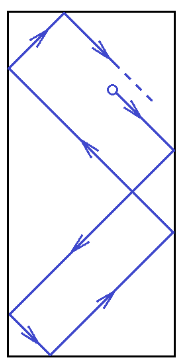
**Ответ:** любой угол в диапазоне $(45^\circ; 90^\circ)$, кроме $60^\circ$.

**Критерии.** Только верный ответ — 1 балл.
Не исключён угол $60^\circ$ — минус 1 балл. Не исключены углы, меньшие $45^\circ$ — минус 2 балла.

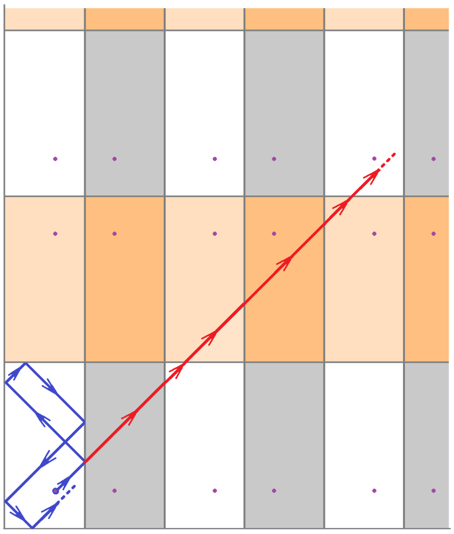
4. См. задачу 5 для 7 класса.

5. См. задачу 6 для 6 класса.

6. Дан прямоугольник размером $2021 \times 4300$. В какой-то точке внутри него стоит бильярдный шар. Его запускают по прямой, образующей угол $45^\circ$ со сторонами прямоугольника. Достигая стороны, шар отражается также под углом $45^\circ$; если шар попадает в угол, то выходит из него по той же линии, по которой вошёл. (Пример начала пути шара показан на рисунке.)
а) Для любой ли точки верно, что если выпустить из неё шар по таким правилам, он вернётся туда ещё раз?
б) Допустим, что стартуя в некоторой точке $A$, шар через некоторое время в неё возвращается. Какое максимальное количество ударов о бортики он может совершить, прежде чем впервые вернётся в точку $A$? *(О. А. Пяйве)*



**Решение.**



Размножим прямоугольник многократными отражениями относительно его сторон. В соседних столбцах (строках) копии прямоугольника будут ориентированы по-разному, но при сдвиге на чётное число столбцов и чётное число строк ориентация совпадёт с изначальной. Теперь можно считать, что, коснувшись бортика, шар переходит в следующую копию прямоугольника, но продолжает идти по той же прямой. Нас интересует момент, когда шар придёт в одну из копий исходной точки.

а) Введём систему координат так, чтобы один из углов доски имел координаты $(0, 0)$, горизонтальная сторона была короче вертикальной, а в начале движения шара обе координаты увеличивались.

Если координаты начальной точки $(x_0, y_0)$, то произвольная точка на пути имеет координаты $(x_0+a, y_0+a)$. Сдвиг на $a = \text{НОК}(2021\cdot2, 4300\cdot2)$ по каждой координате приводит нас в копию исходной точки, поскольку мы сдвинулись на чётное количество сторон прямоугольника в каждом направлении.

б) Заметим, что $2021 = 43 \cdot 47$, $4300 = 43 \cdot 100$, поэтому $\text{НОК}(2021 \cdot 2, 4300 \cdot 2) = 2 \cdot 43 \cdot 47 \cdot 100$. Сдвиг на $a = 2\cdot43\cdot47\cdot100$ по каждой координате соответствует сдвигу на $2\cdot100$ сторон длины 2021 вправо и на $2 \cdot 47$ сторон длины 4300 вверх. Значит, сдвиг суммарно на 294 прямоугольника вправо и вверх приведёт нас в копию исходной точки. Каждый переход в следующий прямоугольник соответствует одному удару шарика, значит, совпадение произойдёт после 294 ударов.

Заметим, что совпадение с копией исходной точки в прямоугольнике, ориентированном как исходный, не может произойти раньше, поскольку для этого $a$ должно делиться как на $2 \cdot 2021$, так и на $2 \cdot 4300$. Но количество ударов до первого совпадения может оказаться меньше по одной из следующих двух причин:

- траектория проходит через угол (тогда два удара «склеиваются» в один);
- шар попадает в исходную точку в одной из копий, ориентированных *иначе*, чем исходный прямоугольник.

Приведём пример, когда такого не происходит: пусть $x_0 = \sqrt{3}$, $y_0 = \sqrt{2}$. Через угол траектория не пройдёт, поскольку для этого $x - y$ должно быть целым, в то время как оно всегда равно $\sqrt{3} - \sqrt{2}$. Изучим вопрос о копиях точки в «отражённых» прямоугольниках. Координаты копий исходных точек всегда принимают значения вида $(2021k \pm x_0, 4300l \pm y_0)$, где выбор знаков зависит от чётности $k$ и $l$, причём в «отражённых» прямоугольниках хотя бы один из знаков — минус. Пусть, например, $x_0 + a = 2021k - x_0$, тогда $(a + 2\sqrt{2})$ — целое число. По второй координате в зависимости от знака получим, что $a$ или $(a + 2\sqrt{3})$ — целое число, но это невозможно.

**Ответ:** а) да; б) 294 удара.

**Критерии.** Пункт а — 2 балла пункт, б — 5 баллов. Правильный ответ на пункт б — 1 балл.

## Задачи для 9 класса

1. В классе учатся 28 человек. На 8 марта каждый мальчик подарил каждой девочке один цветок — тюльпан, розу или нарцисс. Сколько было подарено роз, если известно, что их в 4 раза больше, чем нарциссов, но в 10 раз меньше, чем тюльпанов? (*А. А. Теслер*)

**Решение.** *Это усложнённая версия задачи 4 для 5 класса.*

Обозначим количество нарциссов $x$, тогда роз $4x$, а тюльпанов $40x$, значит, всего цветов $45x$. Количество цветов равно произведению числа мальчиков на число девочек. Если мальчиков $m$, то $m(28-m)$ кратно 45. Оба множителя на 3 делиться не могут, значит, один из них делится на 9, а второй на 5. Единственный вариант — $18 \cdot 10$. Значит, $45x = 180$, то есть $x = 4$, а искомое количество роз $4x = 16$.

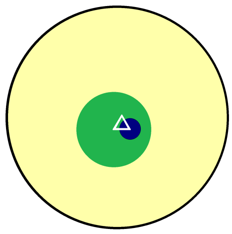
**Ответ:** 16 роз.

**Критерии.** Неполное переборное решение — не более 4 баллов.

2. См. задачу 2 для 8 класса.

3. На плоскости нарисован равносторонний треугольник и три окружности с центрами в его вершинах. Точка плоскости красится в жёлтый цвет, если она лежит внутри ровно одной из окружностей; в зелёный, если внутри ровно двух; в синий, если внутри всех трёх. Может ли жёлтая площадь равняться 100, зелёная 10, а синяя — 1? (*П. Д. Муленко, А. А. Теслер*)

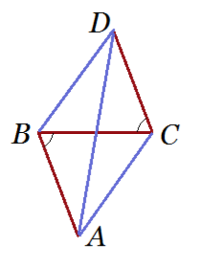
**Решение.** Да. Например, выберем радиусы кругов так, что их площади равны 1, 11 и 111; а сторону треугольника $a$ сделаем достаточно маленькой (например, $a \leqslant \frac{1}{2}$). Докажем, что меньший круг всегда лежит внутри большего (из этого получится, что площади всех цветных частей правильные).



В самом деле, заметим, что радиус даже наименьшего из кругов больше $a$. Выберем какие-нибудь два круга, и пусть радиус меньшего из них равен $r$, а большего $R$; тогда $R > 3r$. Расстояние от центра большего круга до любой точки меньшего не превосходит $a + 2r < 3r < R$, то есть всякая точка меньшего круга лежит внутри большего.

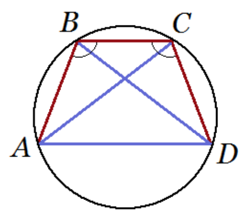
4. На плоскости даны такие четыре точки $A, B, C, D$, что $AB = BC = CD$, $BD = DA = AC$. Найдите углы четырёхугольника с вершинами в этих точках. (*А. А. Теслер*)

**Решение.** Углы $\angle ABC$ и $\angle DCB$ равны в силу равенства треугольников $ABC$ и $DCB$.





а) Если вершины $A$ и $D$ по разные стороны от прямой $BC$, то эти углы накрест лежащие. Значит, отрезки $AB$ и $CD$ параллельны и равны, и $ABDC$ — параллелограмм. Но тогда каждый его угол острый, поскольку является углом при основании равнобедренного треугольника ($\angle A$ — в треугольнике $ABC$, $\angle B$ — в $\triangle ABD$). Такое невозможно.



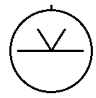


б) Пусть $A$ и $D$ лежат по одну сторону от $BC$. Расстояния от точек $A$ и $D$ до $BC$ равны, так как $\triangle ABC = \triangle DCB$; значит, $AD \parallel BC$. Получается, что это трапеция с основаниями $AD$ и $BC$, причём равнобокая (случай $AD = BC$ невозможен, поскольку тогда все шесть отрезков равны, а таких четырёхугольников не бывает). Впишем её в окружность. Пусть, не умаляя общности, $BC < AD$. Дуги $AB$, $BC$ и $CD$ стянуты равными хордами (и не пересекаются); обозначим градусную меру каждой из них $\alpha$. Тогда дуга $AD$ равна дуге $AC$, то есть $2\alpha$. Получаем $5\alpha = 360^\circ$, а углы трапеции равны $2\alpha, 2\alpha, 3\alpha, 3\alpha$ как вписанные.

**Ответ:** $72^\circ, 72^\circ, 108^\circ, 108^\circ$.

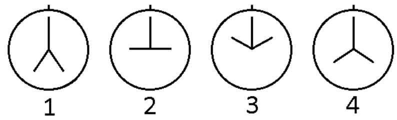
**Критерии.** 3 балла — доказательство, что это не параллелограмм.
4 балла — разбор случая с трапецией и правильно найденные углы.

5. У волшебных часов, кроме обычной пары стрелок, есть вторая пара, которая в каждый момент времени симметрична первой относительно вертикальной оси. По фотографии часов невозможно определить, какие стрелки настоящие. Кроме этого, по волшебным часам (как и по обычным) нельзя отличить утро от вечера. Поэтому одной и той же фотографии часов могут соответствовать несколько разных времён (например, 1:15, 10:45 и 22:45 на фотографии выглядят так, как показано справа).



Робот делает несколько фотографий часов в течение одних суток (от 0:00 до 24:00). Он запоминает порядок, в котором сделаны фотографии, но не время их выполнения. Иногда по такой серии снимков можно определить, во сколько именно сделаны некоторые из них; такие снимки будем называть *определёнными*. Если же для снимка (даже с учётом остальных снимков серии) есть несколько моментов, когда он мог быть сделан, то он *неопределённый*.

Например, в серии снимков, показанных справа, снимок №2 определённый (он сделан в 9:00), а вот снимок №4 неопределённый (он мог быть сделан как в 16:00, так и в 20:00).




Пусть есть серия из 100 фотографий, сделанных в течение одних суток, никакие две из которых не выглядят одинаково, и ни одна из них не сделана в 0:00, 6:00, 12:00, 18:00 или 24:00. Какое минимальное количество неопределённых фотографий может быть среди них?

(*А. А. Теслер*)

**Решение.** См. решение задачи 6 для 10 класса.

Вместо последнего абзаца решения задачи 6 для 10 класса достаточно привести какой-нибудь пример с тремя неопределёнными фотографиями и доказать, что их ровно три. Например, такой: пусть первые три фото сделаны в 5:50, 11:40, 17:30, а остальные в промежутке от 20:00 до 23:00. Тогда по виду фотографий можно установить, что первая из них сделана не ранее 5:50, а значит, вторая — не ранее 11:40, а значит, третья — не ранее 17:30, и наконец, остальные после 18:00, где для них остаётся только один вариант, то есть они определённые.

**Ответ:** 3.

**Критерии.** 1 балл за приведённый пример, где ровно 3 неопределённых фотографии, +ещё один балл, если доказано, что пример корректен.

1 балл за формулировку утверждения «каждой фотографии соответствует четыре возможных времени: $t, 12-t, 12+t, 24-t$».

6. Найдите все вещественные решения системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} = \dfrac{32}{y^5} + \dfrac{48}{y^3} + \dfrac{17}{y} - 15, \\ \dfrac{1}{y} = \dfrac{32}{z^5} + \dfrac{48}{z^3} + \dfrac{17}{z} - 15, \\ \dfrac{1}{z} = \dfrac{32}{x^5} + \dfrac{48}{x^3} + \dfrac{17}{x} - 15. \end{cases}$$

(*А. Б. Владимиров*)

**Решение.** Пусть $F(t) = 32t^5 + 48t^3 + 17t - 15$. Тогда система имеет вид $F\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{x}$, $F\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{y}$, $F\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{z}$. Из этого следует, что $F\left(F\left(F\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right) = \frac{1}{x}$. Заметим, что $F(0{,}5) = 0{,}5$ и функция $F(t) - t$ строго возрастает. Значит, если $t > 0{,}5$, то $t < F(t) < F(F(t)) < F(F(F(t)))$, и аналогично при $t < 0{,}5$ $\quad F(t) > F(F(F(t)))$. Но это значит, что $\frac{1}{x} = 0{,}5$, и исходная система имеет единственное решение $x = y = z = 2$.

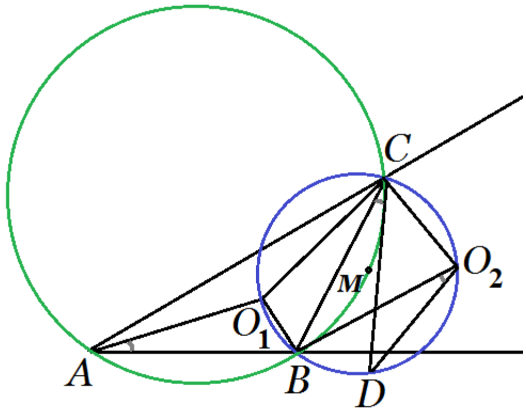
**Критерии.** За нахождение решения даётся 1 балл. 3 балла за решение в предположении $x = y = z$. Если не доказана единственность решения у $F(t) = t$, то снимается 2 балла.

# Задачи для 10 класса

1. См. задачу 2 для 7 класса.

2. Дан треугольник $ABC$. $O_1$ — центр его вписанной окружности; $O_2$ — центр окружности, касающейся стороны $BC$ и продолжений двух других сторон треугольника $ABC$. На дуге $BO_2$ описанной окружности треугольника $O_1O_2B$ отмечена такая точка $D$, что угол $BO_2D$ вдвое меньше угла $BAC$. $M$ — середина дуги $BC$ описанной окружности треугольника $ABC$. Докажите, что точки $D$, $M$, $C$ лежат на одной прямой. (*О. А. Пяйве*)

   **Решение.**

   Заметим, что углы $O_1BO_2$ и $O_1CO_2$ прямые (как углы между биссектрисами смежных углов), поэтому $B$, $O_1$, $C$, $O_2$ лежат на одной окружности, и $\angle BCD = \angle BO_2D = \frac{1}{2}\angle BAC$. Но угол $BCM$ тоже равен $\frac{1}{2}\angle BAC$ (поскольку опирается на половину дуги $BC$), так что точки $D$, $M$, $C$ лежат на одной прямой.

3. См. задачу 3 для 7 класса.

4. Найдите все вещественные решения системы уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x-997} + \sqrt{y-932} + \sqrt{z-796} = 100, \\ \sqrt{x-1237} + \sqrt{y-1121} + \sqrt{3045-z} = 90, \\ \sqrt{x-1621} + \sqrt{2805-y} + \sqrt{z-997} = 80, \\ \sqrt{2102-x} + \sqrt{y-1237} + \sqrt{z-932} = 70. \end{cases}$$

(*Л. С. Корешкова, А. А. Теслер*)

   **Ответ:** $x = y = z = 2021$.

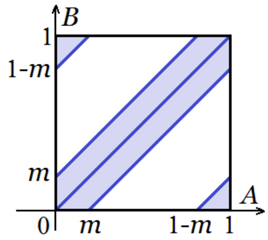
   **Решение.** Сначала докажем, что решение единственно, если оно существует. Пусть $(x_1, y_1, z_1)$ и $(x_2, y_2, z_2)$ два различных решения и, не умаляя общности, $x_1 \leqslant x_2$. Тогда возможны четыре варианта: $y_1 \leqslant y_2$ и $z_1 \leqslant z_2$ (причём хотя бы одно из трёх неравенств строгое); $y_1 \leqslant y_2$ и $z_1 > z_2$; $y_1 > y_2$ и $z_1 \leqslant z_2$; $y_1 > y_2$ и $z_1 > z_2$. Каждый случай противоречит соответствующему уравнению по соображениям монотонности.

   Само решение можно подобрать, если предположить, что оно целое и все корни извлекаются в целых числах. Например, пусть $x = 1621 + a^2 = 1237 + b^2$ для целых $a, b \geqslant 0$, тогда $(b+a)(b-a) = 384$; если перебрать все варианты $a$, то видно, что только при $a = 20$ остальные корни извлекаются. Ещё можно заметить, что некоторые корни выглядят похоже (например, $\sqrt{x-997}$ и $\sqrt{z-997}$), поэтому удобно было бы искать решение, где $x = y = z$. После этого числа 1121, 1621, 2102 могут помочь угадать ответ.

   **Критерии.** 2 балла за нахождение решения (проверять вычислениями, что оно подходит, или както мотивировать его нахождение не требуется); 5 баллов за доказательство единственности.

5. Соревнование по *бегу на непредсказуемую дистанцию* проводится следующим образом. На круглой беговой дорожке длиной 1 километр случайным образом (с помощью вращающейся стрелки) выбираются две точки $A$ и $B$, после чего спортсмены бегут из $A$ в $B$ по более короткой дуге. Найдите *медианное значение* длины этой дуги, то есть такое $m$, что длина дуги будет превышать $m$ с вероятностью ровно 50%. (*А. А. Теслер*)

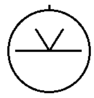
**Решение.** Выберем на дорожке начало отсчёта и положительное направление, тогда пары $(A, B)$ можно отождествить с парами чисел из $[0, 1)$ (при измерении в километрах). Вероятность того, что $(A, B)$ принадлежит некоторому подмножеству $[0, 1) \times [0, 1)$, равна площади этого подмножества. Длина короткой дуги равна $|A - B|$ при $|A - B| \leqslant \frac{1}{2}$ и $(1 - |A - B|)$ иначе. Область, где эта длина не превосходит числа $0 \leqslant m \leqslant \frac{1}{2}$, показана на рисунке, её площадь равна $2m$. При $m = 0{,}25$ получаем вероятность 50%.




*Другое решение.* Пусть точка $A$ выбрана как угодно. Заметим, что с вероятностью 50% точка $B$ принадлежит полуокружности с серединой $A$ — а это равносильно тому, что длина дуги не больше 250 м.

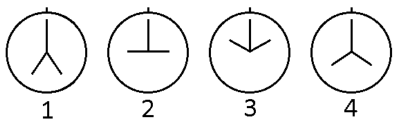
**Ответ:** $m = 250$ м.

6. У волшебных часов, кроме обычной пары стрелок, есть вторая пара, которая в каждый момент времени симметрична первой относительно вертикальной оси. По фотографии часов невозможно определить, какие стрелки настоящие. Кроме этого, по волшебным часам (как и по обычным) нельзя отличить утро от вечера. Поэтому одной и той же фотографии часов могут соответствовать несколько разных времён (например, 1:15, 10:45 и 22:45 на фотографии выглядят так, как показано справа).



Робот делает несколько фотографий часов в течение одних суток (от 0:00 до 24:00). Он запоминает порядок, в котором сделаны фотографии, но не время их выполнения. Иногда по такой серии снимков можно определить, во сколько именно сделаны некоторые из них; такие снимки будем называть *определёнными*. Если же для снимка (даже с учётом остальных снимков серии) есть несколько моментов, когда он мог быть сделан, то он *неопределённый*.

Например, в серии снимков, показанных справа, снимок №2 определённый (он сделан в 9:00), а вот снимок №4 неопределённый (он мог быть сделан как в 16:00, так и в 20:00).




Пусть есть серия из 100 фотографий, сделанных в течение одних суток, никакие две из которых не выглядят одинаково, и ни одна из них не сделана в 0:00, 6:00, 12:00, 18:00 или 24:00. Сколько неопределённых фотографий может быть среди них? (*А. А. Теслер*)

**Ответ:** 3 или 100.

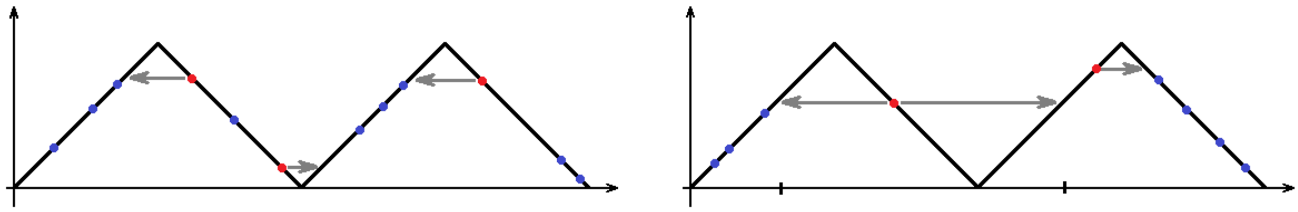
**Решение.** Сначала заметим, что для каждой фотографии множество возможных значений времени имеет вид $\{t;\ 12 - t;\ 12 + t;\ 24 - t\}$ $(0 < t < 6)$.

Рассмотрим следующие фотографии: $A$ — та, которая сделана ближе всего к 6:00; $B$ — сделанная ближе всего к 12:00; $C$ — сделанная ближе всего к 18:00.

Если все эти фотографии различны, то каждую из них можно «симметрично отразить» относительно соответствующего момента времени (например, если первая фотография сделана в 5:50, то она же могла бы быть сделана и в 6:10, что не влияет на корректность последовательности времён). Значит, имеем как минимум три неопределённых фотографии.

Если же какие-то две из них совпадают, то существует 12-часовой промежуток, в который сделана только одна фотография (та самая, которая совпадает): например, если она сделана в момент $6 + t_1 = 12 - t_2$, то на промежутке от $6 - t_1$ до $12 + t_2$ других фотографий нет. Тогда можно уместить все фотографии в период с 0:00 до 12:00, а можно с 12:00 до 24:00, то есть все фотографии неопределённые.

Схематично эти варианты показаны на графиках. По горизонтали — реальное время создания фотографий; по вертикали — минимальное время, при котором часы выглядят как на фото; красным выделены снимки $A, B, C$, а стрелками показана их «неопределённость».



Докажем, что в случае, когда не все фотографии неопределённые, неопределённых фотографий всего три. Действительно, три выбранных фотографии $(A, B, C)$ различны. Тогда для каждой из них есть лишь два возможных времени: если у какой-то из них (например, $A$) хотя бы три возможных момента времени, то между крайними такими моментами не меньше 12 часов, что позволяет уместить все кадры в 12-часовой промежуток (а значит, все снимки неопределённые). Заметим, что все фотографии, сделанные до снимка $A$, обязательно сделаны до 6:00 (так как остальные допустимые для них времена позже, чем оба допустимых времени для фото $A$). Аналогично устанавливаем, что фото, идущие между снимками $A$ и $B$, сделаны между 6 и 12 часами (иначе они либо сняты раньше, чем обе возможности для $A$, либо позже, чем обе возможности для $B$), фото между $B$ и $C$ — между 12 и 18 часами, и наконец, фото, идущие после $C$, сняты позже 18 часов. Итак, все остальные снимки оказались определёнными.

**Критерии.** По одному баллу за доказательство возможностей 3 и 100. За доказательство того, что меньше 3 быть не может, даётся 2 балла.

# Задачи для 11 класса

1. Петя печатает на экране компьютера пять цифр, среди которых нет нулей. Каждую секунду компьютер убирает начальную из цифр, а в конец дописывает последнюю цифру суммы четырёх оставшихся цифр. (Например, если Петя введёт 12345, то через секунду получит 23454, потом 34546 и так далее. Но он может ввести и не 12345, а какие-то другие пять цифр.) В какой-то момент Петя останавливает процесс. Какова минимально возможная сумма пяти цифр, которые могут оказаться в этот момент на экране? (*А. А. Теслер*)

   **Ответ:** 2.

   **Решение.** Запись 00000 на экране появиться не может, поскольку она может получиться только из 00000. Запись из четырёх нулей и единицы тоже не может, поскольку тогда последняя цифра не равна остатку от деления суммы четырёх первых на 10.

   А вот сумма цифр 2 возможна. Например, «обратным ходом» можно найти пример получения записи 00011 (или 10001):

   $00011 \leftarrow 10001 \leftarrow 91000 \leftarrow 09100 \leftarrow 00910 \leftarrow 20091 \leftarrow 72009 \leftarrow 17200 \leftarrow 01720 \leftarrow 40172 \leftarrow 24017 \leftarrow 52401 \leftarrow 95240 \leftarrow 89524$.

   **Критерии.** 5 баллов за пример, 2 балла за доказательство невозможности меньших сумм.

2. См. задачу 2 для 10 класса.

3. См. задачу 6 для 9 класса.

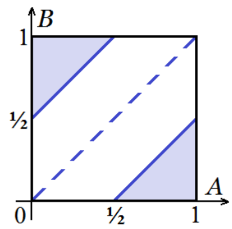
4. Территория Тридесятого царства состоит из всех целых чисел. Княжеством будем называть множество вида $\{ak + b | k \in \mathbb{Z}\}$, где $a \neq 0$ и $b$ — некие целые числа (то есть бесконечную в обе стороны арифметическую прогрессию). Царь хочет разделить всю территорию царства, кроме чисел 3 и 10, на бесконечное количество непересекающихся княжеств. Возможно ли это? (*А. А. Теслер*)

**Решение.** Да. Будем отдельно разбивать чётные числа и нечётные, тогда надо дважды разбить прогрессию без одной точки. Покажем, как это сделать для нечётных: поместим нечётное число $x$ в княжество $s$, если $x-3$ кратно $2^s$, но не кратно $2^{s+1}$. Для чётных аналогично.

**Критерии.** Если удалось разделить всё царство, кроме конечного семейства чисел, то даётся 5 баллов.

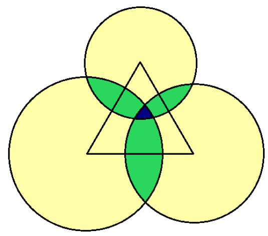
5. Соревнование по *бегу на непредсказуемую дистанцию* проводится следующим образом. На круглой беговой дорожке случайным образом (с помощью вращающейся стрелки) выбираются две точки $A$ и $B$, после чего спортсмены бегут из $A$ в $B$ по более короткой дуге. Зритель купил билет на стадион и хочет, чтобы спортсмены пробежали мимо его места (тогда он сможет сделать удачную фотографию). Какова вероятность, что это случится?
(*А. А. Теслер*)

**Решение.** Отождествим каждую точку дорожки с её расстоянием до зрителя по часовой стрелке. Тогда пары $(A, B)$ можно отождествить с парами чисел из $[0, 1)$ (при измерении в километрах). При этом вероятность того, что $(A, B)$ принадлежит некоторому подмножеству $[0, 1) \times [0, 1)$, равна площади этого подмножества. Нас интересует множество таких $(A, B)$, что $|A - B| > \frac{1}{2}$ (в этом случае кратчайшая дуга проходит через 0), это пара треугольников общей площадью $\frac{1}{4}$.




**Ответ:** $\frac{1}{4}$.

6. На плоскости нарисован равносторонний треугольник и три окружности с центрами в его вершинах, причём радиус каждой из окружностей меньше высоты треугольника. Точка плоскости красится в жёлтый цвет, если она лежит внутри ровно одной из окружностей; в зелёный, если внутри ровно двух; в синий, если внутри всех трёх. Оказалось, что жёлтая площадь равна 1000, зелёная 100, а синяя — 1. Что больше: сторона треугольника или суммарная длина зелёных отрезков, лежащих на сторонах треугольника? (*П. Д. Муленко, А. А. Теслер*)



**Решение.** Докажем, что сторона больше. Пусть $r_1, r_2, r_3$ — радиусы окружностей, $a$ — сторона треугольника. Нужно доказать, что $(r_1 + r_2 - a) + (r_2 + r_3 - a) + (r_3 + r_1 - a) < a$, то есть $r_1 + r_2 + r_3 < 2a$. Тогда сумма площадей кругов равна 1203, а площадь треугольника $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = 150$ (см. задачу 5 для 7 класса).

По неравенству Коши $(r_1 + r_2 + r_3)^2 \leqslant 3(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)$, так что остаётся доказать, что

$$\sqrt{\frac{3 \cdot 1203}{\pi}} < 2\sqrt{\frac{4}{\sqrt{3}} \cdot 150}.$$

Возведём обе части в квадрат и домножим их на $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$, после чего применим цепочку очевидных неравенств

$$1203\sqrt{3} < 1203 \cdot 2 = 2406 < 2480 = 800 \cdot 3{,}1 < 800\pi.$$

**Критерии.** За нахождение площади треугольника (или его стороны) даётся 3 балла.