Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2020–2021 учебный год. Заключительный этап

Задачи для 5 класса

Работа выполняется самостоятельно. Использование калькуляторов и других вычислительных средств, а также справочной литературы и интернета запрещено. В работе не должны содержаться фамилия и имя участника — вместо этого подпишите каждую страницу работы личным кодом.
Просим не публиковать условия и не обсуждать задачи в интернете до 15 апреля.

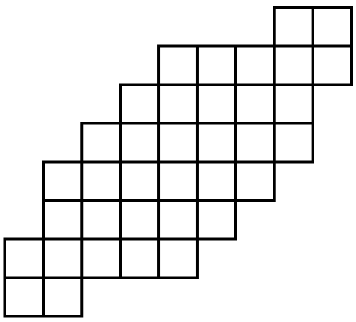
---

1. За один ход можно либо прибавить к числу одну из его цифр, либо вычесть из него одну из его цифр (например, из числа 142 можно получить $142 + 2 = 144$, $142 - 4 = 138$ и несколько других чисел).

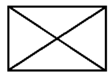
   а) Можно ли за несколько ходов получить из числа 2020 число 2021?

   б) Можно ли за несколько ходов получить из числа 1000 число 2021? (*А. А. Теслер*)

2. Покажите, как разрезать «конфетку» на восемь фигур двух видов (по четыре фигуры каждого вида) и собрать из этих восьми фигур квадрат. (Фигуры одного вида должны быть одинаковыми, то есть совпадать при наложении друг на друга, но они могут быть по-разному повёрнуты.) (*Л. С. Корешкова*)



3. В клетчатом прямоугольнике длиной 303 клетки и шириной 202 клетки провели две диагонали и покрасили все клетки, внутри которых они прошли. Сколько клеток оказалось закрашено? (*О. А. Пяйве, А. А. Теслер*)



4. В классе учатся 28 человек. На 8 марта каждый мальчик подарил каждой девочке один цветок — тюльпан, розу или нарцисс. Сколько было подарено роз, если известно, что их в 4 раза больше, чем нарциссов, но в 3 раза меньше, чем тюльпанов? (*А. А. Теслер*)

5. Однажды Валера вышел из дома, дошёл пешком до дачи, покрасил там 11 досок забора и вернулся домой через 2 часа после выхода. В другой раз Валера с Ольгой пошли на дачу вместе, вдвоём покрасили 9 досок забора (не помогая и не мешая друг другу), вместе ушли и вернулись домой через 3 часа после выхода. Сколько досок успеет покрасить Ольга в одиночку, если ей надо вернуться домой через час после выхода? Физические способности Валеры и Ольги, их трудолюбие и условия работы неизменны. (*В. П. Федотов*)

6. Назовём число *стройным*, если все цифры его десятичной записи различны и идут в порядке возрастания. Каких стройных чисел больше: четырёхзначных или пятизначных? (*В. П. Федотов*)

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2020–2021 учебный год. Заключительный этап

Задачи для 6 класса

Работа выполняется самостоятельно. Использование калькуляторов и других вычислительных средств, а также справочной литературы и интернета запрещено. В работе не должны содержаться фамилия и имя участника — вместо этого подпишите каждую страницу работы личным кодом.
Просим не публиковать условия и не обсуждать задачи в интернете до 15 апреля.

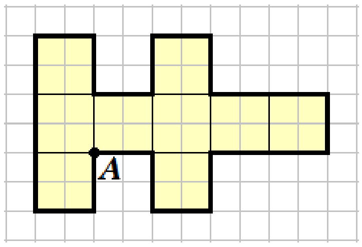
---

1. За один ход можно либо прибавить к числу одну из его цифр, либо вычесть из него одну из его цифр (например, из числа 142 можно получить $142 + 2 = 144$, $142 - 4 = 138$ и несколько других чисел).

   а) Можно ли за несколько ходов получить из числа 2020 число 2021?

   б) Можно ли за несколько ходов получить из числа 1000 число 2021? (*А. А. Теслер*)

2. На клетчатом листе нарисована фигура. Проведите луч с началом в точке A, разрезающий её на две части равной площади. Покажите какой-нибудь узел сетки (кроме точки A), через который проходит луч, и объясните, почему площади двух частей равны. (*Л. С. Корешкова*)



3. В классе учатся 28 человек. На 8 марта каждый мальчик подарил каждой девочке один цветок — тюльпан, розу или нарцисс. Сколько было подарено роз, если известно, что их в 4 раза больше, чем нарциссов, но в 3 раза меньше, чем тюльпанов? (*А. А. Теслер*)

4. Однажды Валера вышел из дома, дошёл пешком до дачи, покрасил там 11 досок забора и вернулся домой через 2 часа после выхода. В другой раз Валера с Ольгой пошли на дачу вместе, вдвоём покрасили 9 досок забора (не помогая и не мешая друг другу), вместе ушли и вернулись домой через 3 часа после выхода. Сколько досок успеет покрасить Ольга в одиночку, если ей надо вернуться домой через час после выхода? Физические способности Валеры и Ольги, их трудолюбие и условия работы неизменны. (*В. П. Федотов*)

5. Назовём число *стройным*, если все цифры его десятичной записи различны и идут в порядке возрастания. Каких стройных чисел больше: четырёхзначных или пятизначных? (*В. П. Федотов*)

6. На слёт «Plants VS Zombies» приехали несколько растений и зомби (всего не больше 20 существ), причём оказалось, что все существа разного роста. Растения всегда говорят правду тем, кто ниже их по росту, и врут тем, кто выше их. Зомби же, наоборот, врут более низким существам и говорят правду более высоким. При знакомстве каждый участник подошел к каждому и сказал либо «Я выше тебя», либо «Я ниже». Фраза «Я ниже» прозвучала 20 раз. Прощаясь, каждый должен был снова подойти к каждому и сказать «Я выше и я растение». Если какое-то существо не могло так сказать, то оно хлопало в ладоши. Раздалось 18 хлопков. Вычислите, сколько существ приехало на слёт, и расставьте их по росту. (*П. Д. Муленко*)

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2020–2021 учебный год. Заключительный этап

Задачи для 7 класса

Работа выполняется самостоятельно. Использование калькуляторов и других вычислительных средств, а также справочной литературы и интернета запрещено. В работе не должны содержаться фамилия и имя участника — вместо этого подпишите каждую страницу работы личным кодом.
Просим не публиковать условия и не обсуждать задачи в интернете до 15 апреля.

---

1. За один ход можно либо прибавить к числу одну из его цифр, либо вычесть из него одну из его цифр (например, из числа 142 можно получить $142 + 2 = 144$, $142 - 4 = 138$ и несколько других чисел).

   а) Можно ли за несколько ходов получить из числа 2020 число 2021?

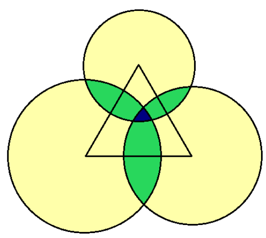
   б) Можно ли за несколько ходов получить из числа 1000 число 2021? (*А. А. Теслер*)

2. Можно ли в выражении $A \cdot 5^n + B \cdot 3^{n-1} + C$ подобрать натуральные коэффициенты A, B и C так, чтобы ни один из них не делился на 8, но результат при любом натуральном n делился на 8? (*Л. С. Корешкова*)

3. Однажды Валера вышел из дома, дошёл пешком до дачи, покрасил там 11 досок забора и вернулся домой через 2 часа после выхода. В другой раз Валера с Ольгой пошли на дачу вместе, вдвоём покрасили 8 досок забора (не помогая и не мешая друг другу), вместе ушли и вернулись домой через 3 часа после выхода. Сколько досок успеет покрасить Ольга в одиночку, если ей надо вернуться домой через полтора часа после выхода? Физические способности Валеры и Ольги, их трудолюбие и условия работы неизменны. (*В. П. Федотов*)

4. В клетчатом прямоугольнике 20210×1505 провели две диагонали и покрасили все клетки, внутри которых они прошли. Сколько клеток оказалось закрашено? (*О. А. Пяйве, А. А. Теслер*)

5. На плоскости нарисован равносторонний треугольник и три окружности с центрами в его вершинах, причём радиус каждой из окружностей меньше высоты треугольника. Точка плоскости красится в жёлтый цвет, если она лежит внутри ровно одной из окружностей; в зелёный, если внутри ровно двух; в синий, если внутри всех трёх. Оказалось, что жёлтая площадь равна 1000, зелёная 100, а синяя — 1. Найдите площадь треугольника. (*П. Д. Муленко*)



6. На слёт «Plants VS Zombies» приехали несколько растений и зомби (всего не больше 20 существ), причём оказалось, что все существа разного роста. Растения всегда говорят правду тем, кто ниже их по росту, и врут тем, кто выше их. Зомби же, наоборот, врут более низким существам и говорят правду более высоким. При знакомстве каждый участник подошел к каждому и сказал либо «Я выше тебя», либо «Я ниже». Фраза «Я ниже» прозвучала 20 раз. Прощаясь, каждый должен был снова подойти к каждому и сказать «Я выше и я растение». Если какое-то существо не могло так сказать, то оно хлопало в ладоши. Раздалось 18 хлопков. Вычислите, сколько существ приехало на слёт, и расставьте их по росту. (*П. Д. Муленко*)

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2020–2021 учебный год. Заключительный этап

Задачи для 8 класса

Работа выполняется самостоятельно. Использование калькуляторов и других вычислительных средств, а также справочной литературы и интернета запрещено. В работе не должны содержаться фамилия и имя участника — вместо этого подпишите каждую страницу работы личным кодом.
Просим не публиковать условия и не обсуждать задачи в интернете до 15 апреля.

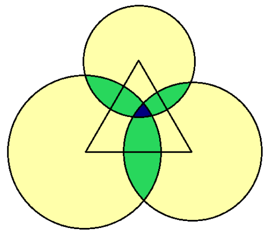
---

1. Можно ли в выражении $A\cdot 5^n+B\cdot 3^{n-1}+C$ подобрать натуральные коэффициенты A, B и C так, чтобы ни один из них не делился на 8, но результат при любом натуральном n делился на 8? (*Л. С. Корешкова*)

2. Сколько пятизначных чисел являются корнями уравнения $x=[\sqrt{x}+1][\sqrt{x}]$?
Символом $[a]$ обозначается целая часть числа a, то есть наибольшее целое число, не превосходящее a. (*О. А. Пяйве*)

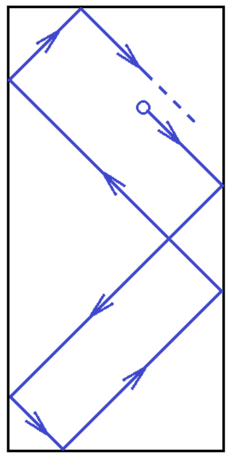
3. В параллелограмме $ABCD$ ($AB\neq BC$) из тупого угла B провели две высоты, BH и BK (основания высот лежат на сторонах параллелограмма и не совпадают с его вершинами). Треугольник BHK оказался равнобедренным. Укажите все возможные значения угла BAD. (*Л. С. Корешкова*)

4. На плоскости нарисован равносторонний треугольник и три окружности с центрами в его вершинах, причём радиус каждой из окружностей меньше высоты треугольника. Точка плоскости красится в жёлтый цвет, если она лежит внутри ровно одной из окружностей; в зелёный, если внутри ровно двух; в синий, если внутри всех трёх. Оказалось, что жёлтая площадь равна 1000, зелёная 100, а синяя — 1. Найдите площадь треугольника. (*П. Д. Муленко*)



5. На слёт «Plants VS Zombies» приехали несколько растений и зомби (всего не больше 20 существ), причём оказалось, что все существа разного роста. Растения всегда говорят правду тем, кто ниже их по росту, и врут тем, кто выше их. Зомби же, наоборот, врут более низким существам и говорят правду более высоким. При знакомстве каждый участник подошел к каждому и сказал либо «Я выше тебя», либо «Я ниже». Фраза «Я ниже» прозвучала 20 раз. Прощаясь, каждый должен был снова подойти к каждому и сказать «Я выше и я растение». Если какое-то существо не могло так сказать, то оно хлопало в ладоши. Раздалось 18 хлопков. Вычислите, сколько существ приехало на слёт, и расставьте их по росту. (*П. Д. Муленко*)

6. Дан прямоугольник размером 2021×4300. В какой-то точке внутри него стоит бильярдный шар. Его запускают по прямой, образующей угол 45° со сторонами прямоугольника. Достигая стороны, шар отражается также под углом 45°; если шар попадает в угол, то выходит из него по той же линии, по которой вошёл. (Пример начала пути шара показан на рисунке.)
а) Для любой ли точки верно, что если выпустить из неё шар по таким правилам, он вернётся туда ещё раз?
б) Допустим, что стартуя в некоторой точке A, шар через некоторое время в неё возвращается. Какое максимальное количество ударов о бортики он может совершить, прежде чем впервые вернётся в точку A? (*О. А. Пяйве*)



Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2020–2021 учебный год. Заключительный этап

Задачи для 9 класса

Работа выполняется самостоятельно. Использование калькуляторов и других вычислительных средств, а также справочной литературы и интернета запрещено. В работе не должны содержаться фамилия и имя участника — вместо этого подпишите каждую страницу работы личным кодом.
Просим не публиковать условия и не обсуждать задачи в интернете до 15 апреля.

---

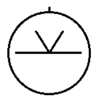
1. В классе учатся 28 человек. На 8 марта каждый мальчик подарил каждой девочке один цветок — тюльпан, розу или нарцисс. Сколько было подарено роз, если известно, что их в 4 раза больше, чем нарциссов, но в 10 раз меньше, чем тюльпанов? *(А. А. Теслер)*

2. Сколько пятизначных чисел являются корнями уравнения $x = [\sqrt{x} + 1][\sqrt{x}]$?
Символом $[a]$ обозначается целая часть числа a, то есть наибольшее целое число, не превосходящее a. *(О. А. Пяйве)*

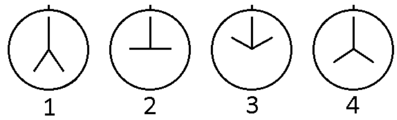
3. На плоскости нарисован равносторонний треугольник и три окружности с центрами в его вершинах. Точка плоскости красится в жёлтый цвет, если она лежит внутри ровно одной из окружностей; в зелёный, если внутри ровно двух; в синий, если внутри всех трёх. Может ли жёлтая площадь равняться 100, зелёная 10, а синяя — 1? *(П. Д. Муленко, А. А. Теслер)*

4. На плоскости даны такие четыре точки A, B, C, D, что $AB = BC = CD$, $BD = DA = AC$. Найдите углы четырёхугольника с вершинами в этих точках. *(А. А. Теслер)*

5. У волшебных часов, кроме обычной пары стрелок, есть вторая пара, которая в каждый момент времени симметрична первой относительно вертикальной оси. По фотографии часов невозможно определить, какие стрелки настоящие. Кроме этого, по волшебным часам (как и по обычным) нельзя отличить утро от вечера. Поэтому одной и той же фотографии часов могут соответствовать несколько разных времён (например, 1:15, 10:45 и 22:45 на фотографии выглядят так, как показано справа).



Робот делает несколько фотографий часов в течение одних суток (от 0:00 до 24:00). Он запоминает порядок, в котором сделаны фотографии, но не время их выполнения. Иногда по такой серии снимков можно определить, во сколько именно сделаны некоторые из них; такие снимки будем называть *определёнными*. Если же для снимка (даже с учётом остальных снимков серии) есть несколько моментов, когда он мог быть сделан, то он *неопределённый*.
Например, в серии снимков, показанных справа, снимок №2 определённый (он сделан в 9:00), а вот снимок №4 неопределённый (он мог быть сделан как в 16:00, так и в 20:00).



Пусть есть серия из 100 фотографий, сделанных в течение одних суток, никакие две из которых не выглядят одинаково, и ни одна из них не сделана в 0:00, 6:00, 12:00, 18:00 или 24:00. Какое минимальное количество неопределённых фотографий может быть среди них? *(А. А. Теслер)*

6. Найдите все вещественные решения системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} = \dfrac{32}{y^5} + \dfrac{48}{y^3} + \dfrac{17}{y} - 15, \\ \dfrac{1}{y} = \dfrac{32}{z^5} + \dfrac{48}{z^3} + \dfrac{17}{z} - 15, \\ \dfrac{1}{z} = \dfrac{32}{x^5} + \dfrac{48}{x^3} + \dfrac{17}{x} - 15. \end{cases}$$

(А. Б. Владимиров)

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2020–2021 учебный год. Заключительный этап

Задачи для 10 класса

Работа выполняется самостоятельно. Использование калькуляторов и других вычислительных средств, а также справочной литературы и интернета запрещено. В работе не должны содержаться фамилия и имя участника — вместо этого подпишите каждую страницу работы личным кодом.
Просим не публиковать условия и не обсуждать задачи в интернете до 15 апреля.

---

1. Можно ли в выражении $A \cdot 5^n + B \cdot 3^{n-1} + C$ подобрать натуральные коэффициенты A, B и C так, чтобы ни один из них не делился на 8, но результат при любом натуральном n делился на 8? (*Л. С. Корешкова*)

2. Дан треугольник ABC. O_1 — центр его вписанной окружности; O_2 — центр окружности, касающейся стороны BC и продолжений двух других сторон треугольника ABC. На дуге BO_2 описанной окружности треугольника O_1O_2B отмечена такая точка D, что угол BO_2D вдвое меньше угла BAC. M — середина дуги BC описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что точки D, M, C лежат на одной прямой. (*О. А. Пяйве*)

3. Однажды Валера вышел из дома, дошёл пешком до дачи, покрасил там 11 досок забора и вернулся домой через 2 часа после выхода. В другой раз Валера с Ольгой пошли на дачу вместе, вдвоём покрасили 8 досок забора (не помогая и не мешая друг другу), вместе ушли и вернулись домой через 3 часа после выхода. Сколько досок успеет покрасить Ольга в одиночку, если ей надо вернуться домой через полтора часа после выхода? Физические способности Валеры и Ольги, их трудолюбие и условия работы неизменны. (*В. П. Федотов*)

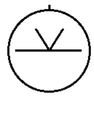
4. Найдите все вещественные решения системы уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x-997} + \sqrt{y-932} + \sqrt{z-796} = 100, \\ \sqrt{x-1237} + \sqrt{y-1121} + \sqrt{3045-z} = 90, \\ \sqrt{x-1621} + \sqrt{2805-y} + \sqrt{z-997} = 80, \\ \sqrt{2102-x} + \sqrt{y-1237} + \sqrt{z-932} = 70. \end{cases}$$

(*Л. С. Корешкова, А. А. Теслер*)

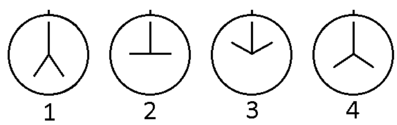
5. Соревнование по *бегу на непредсказуемую дистанцию* проводится следующим образом. На круглой беговой дорожке длиной 1 километр случайным образом (с помощью вращающейся стрелки) выбираются две точки A и B, после чего спортсмены бегут из A в B по более короткой дуге. Найдите *медианное значение* длины этой дуги, то есть такое m, что длина дуги будет превышать m с вероятностью ровно 50%. (*А. А. Теслер*)

6. У волшебных часов, кроме обычной пары стрелок, есть вторая пара, которая в каждый момент времени симметрична первой относительно вертикальной оси. По фотографии часов невозможно определить, какие стрелки настоящие. Кроме этого, по волшебным часам (как и по обычным) нельзя отличить утро от вечера. Поэтому одной и той же фотографии часов могут соответствовать несколько разных времён (например, 1:15, 10:45 и 22:45 на фотографии выглядят так, как показано справа).



Робот делает несколько фотографий часов в течение одних суток (от 0:00 до 24:00). Он запоминает порядок, в котором сделаны фотографии, но не время их выполнения. Иногда по такой серии снимков можно определить, во сколько именно сделаны некоторые из них; такие снимки будем называть *определёнными*. Если же для снимка (даже с учётом остальных снимков серии) есть несколько моментов, когда он мог быть сделан, то он *неопределённый*.

Например, в серии снимков, показанных справа, снимок №2 определённый (он сделан в 9:00), а вот снимок №4 неопределённый (он мог быть сделан как в 16:00, так и в 20:00).



Пусть есть серия из 100 фотографий, сделанных в течение одних суток, никакие две из которых не выглядят одинаково, и ни одна из них не сделана в 0:00, 6:00, 12:00, 18:00 или 24:00. Сколько неопределённых фотографий может быть среди них? (*А. А. Теслер*)

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2020–2021 учебный год. Заключительный этап

Задачи для 11 класса

Работа выполняется самостоятельно. Использование калькуляторов и других вычислительных средств, а также справочной литературы и интернета запрещено. В работе не должны содержаться фамилия и имя участника — вместо этого подпишите каждую страницу работы личным кодом.
Просим не публиковать условия и не обсуждать задачи в интернете до 15 апреля.

---

1. Петя печатает на экране компьютера пять цифр, среди которых нет нулей. Каждую секунду компьютер убирает начальную из цифр, а в конец дописывает последнюю цифру суммы четырёх оставшихся цифр. (Например, если Петя введёт 12345, то через секунду получит 23454, потом 34546 и так далее. Но он может ввести и не 12345, а какие-то другие пять цифр.) В какой-то момент Петя останавливает процесс. Какова минимально возможная сумма пяти цифр, которые могут оказаться в этот момент на экране? (*А. А. Теслер*)

2. Дан треугольник ABC. O_1 — центр его вписанной окружности; O_2 — центр окружности, касающейся стороны BC и продолжений двух других сторон треугольника ABC. На дуге BO_2 описанной окружности треугольника O_1O_2B отмечена такая точка D, что угол BO_2D вдвое меньше угла BAC. M — середина дуги BC описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что точки D, M, C лежат на одной прямой. (*О. А. Пяйве*)

3. Найдите все вещественные решения системы уравнений
$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} = \dfrac{32}{y^5} + \dfrac{48}{y^3} + \dfrac{17}{y} - 15, \\ \dfrac{1}{y} = \dfrac{32}{z^5} + \dfrac{48}{z^3} + \dfrac{17}{z} - 15, \\ \dfrac{1}{z} = \dfrac{32}{x^5} + \dfrac{48}{x^3} + \dfrac{17}{x} - 15. \end{cases}$$
(*А. Б. Владимиров*)

4. Территория Тридесятого царства состоит из всех целых чисел. Княжеством будем называть множество вида $\{ak + b | k \in \mathbb{Z}\}$, где $a \neq 0$ и b — некие целые числа (то есть бесконечную в обе стороны арифметическую прогрессию). Царь хочет разделить всю территорию царства, кроме чисел 3 и 10, на бесконечное количество непересекающихся княжеств. Возможно ли это? (*А. А. Теслер*)

5. Соревнование по *бегу на непредсказуемую дистанцию* проводится следующим образом. На круглой беговой дорожке случайным образом (с помощью вращающейся стрелки) выбираются две точки A и B, после чего спортсмены бегут из A в B по более короткой дуге. Зритель купил билет на стадион и хочет, чтобы спортсмены пробежали мимо его места (тогда он сможет сделать удачную фотографию). Какова вероятность, что это случится? (*А. А. Теслер*)

6. На плоскости нарисован равносторонний треугольник и три окружности с центрами в его вершинах, причём радиус каждой из окружностей меньше высоты треугольника. Точка плоскости красится в жёлтый цвет, если она лежит внутри ровно одной из окружностей; в зелёный, если внутри ровно двух; в синий, если внутри всех трёх. Оказалось, что жёлтая площадь равна 1000, зелёная 100, а синяя — 1. Что больше: сторона треугольника или суммарная длина зелёных отрезков, лежащих на сторонах треугольника? (*П. Д. Муленко, А. А. Теслер*)