Международная физическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2020–2021 учебный год. Заключительный этап

# Решения задач для 8 класса

**8.1.** У Вани было $m = 162$ г вкусной, но горячей для него ($T_1 = 55°$) каши. Веня, чтобы помочь брату, положил в кашу холодный ($T_2 = -10°$) рассыпчатый снежок объёма $V = 35$ см$^3$. В результате каша остыла до $T = 35°$. Каким был объём (практически невесомого) воздуха в снежке?

**Примечание:** плотность льда $\rho = 0{,}9$ г/см$^3$, теплоёмкость льда $c_л = 2100$ $\frac{Дж}{кг·град}$, воды $c_в = 4200$ $\frac{Дж}{кг·град}$, каши $c_к = 3500$ $\frac{Дж}{кг·град}$, удельная теплота плавления льда $\lambda = 336000$ Дж/кг. (*А. М. Минарский*)

**Ответ:** объём воздуха в снежке был 10 см$^3$.

**Решение.** Пусть масса снежка (то есть кристалликов льда в снежке) — $m_с$. Тепло, полученное от остывающей каши, идёт на нагрев льда в снежке, его плавление и нагрев полученной воды до конечной температуры. Пишем уравнение теплового баланса: $Q_{остывания} = Q_{нагрева}$, или

$$c_к m(T_1 - T) = c_л m_с(0° - T_2) + \lambda m_с + c_в m_с(T - 0°).$$

Подставляя данные из условий, получим из этого уравнения $m_с = 22{,}5$ г. Тогда объём льда в снежке $V_л = m_с/\rho = 25$ см$^3$, а объём воздуха $V_в = V - V_л = 10$ см$^3$.

**8.2.** Капля дождя имеет диаметр 2 мм и падает со скоростью около 5 м/с. Оцените, на какое расстояние за сутки «упадёт» облако, если оно состоит из капелек размера 0,01 мм.

Считайте, что восходящих или нисходящих потоков атмосферы возле облака нет. Известно, что сила сопротивления капле при её движении сквозь облако задаётся формулой $F = kRv$, где $R$ — радиус капли, $v$ — её скорость, а $k$ — коэффициент, который при заданной плотности атмосферы можно считать постоянным. (*А. М. Минарский*)

**Ответ:** облако упадёт на расстояние порядка 10 м.

**Решение.** На каплю из существенных сил действуют сила тяжести $mg$ и сила сопротивления воздуха. Капля при падении перестаёт разгоняться, когда эти силы уравновешиваются: $mg = kRv$. Напишем такое уравнение для капли дождя радиуса $R_1$ и капельки в облаке радиуса $R_2$:

$$\begin{cases} m_1 g = kR_1 v_1, \\ m_2 g = kR_2 v_2. \end{cases}$$

Поделив эти равенства друг на друга, получим

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{v_1}{v_2} \quad \Leftrightarrow \quad v_2 = \frac{m_2}{m_1} \cdot \frac{R_1}{R_2} \cdot v_1.$$

Плотности капель одинаковы, поэтому отношение их масс равно отношению их объёмов, пропорциональных радиусам в кубе:

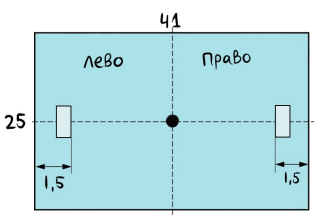
$$\frac{m_2}{m_1} = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3.$$

Поэтому скорость капельки облака

$$v_2 = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3 \cdot \frac{R_1}{R_2} \cdot v_1 = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 \cdot v_1 = \left(\frac{1}{200}\right)^2 \cdot v_1.$$

За время $t = 1$ сут $= 86400$ с капелька пролетит расстояние $t \cdot v_1 = 86400 \cdot (200)^{-2} \cdot 5 = 10{,}8$ м. Это и можно рассматривать как оценку расстояния, на которое «упадёт» облако.

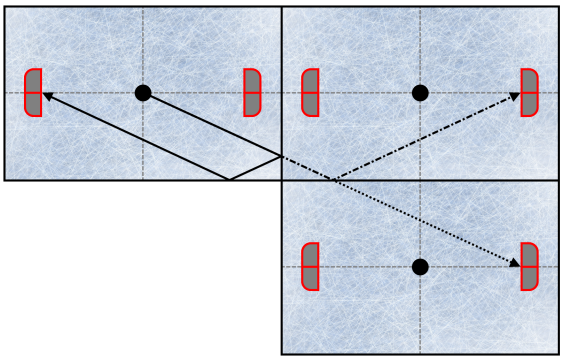
**8.3.** Паша ударил вправо по шайбе, располагавшейся в центре прямоугольной хоккейной площадки $a \times b = 41 \times 25$ м$^2$ (на рисунке изображены поле, ворота и шайба, вид сверху). Но шайба, заскользив по льду, не попала в правые ворота, а, каким-то образом отскочив от бортов, попала по кратчайшей траектории ровно в середину левых ворот. Какой длины путь проделала шайба?




**Примечание:** шайба не вращалась и от бортов отскакивала «правильно» — то есть угол подлёта шайбы был равен углу отскока; расстояние от центра ворот до борта $h = 1{,}5$ метра. (*А. М. Минарский*)

**Ответ:** кратчайшая траектория шайбы имеет длину 65 метров.

**Решение.** Траекторию при отражении шайбы от стенки можно изображать так, что шайба продолжает прямолинейное движение, а отражается хоккейное поле (см. рисунок). Отрезки истинной траектории, изображённой сплошной линией, отражениями можно совместить с участками прямой линии (пунктир).



Длина этой линии тогда определяется из теоремы Пифагора: по горизонтали шайба проходит половину длины поля и ещё целую длину минус расстояние от ворот до борта; то есть

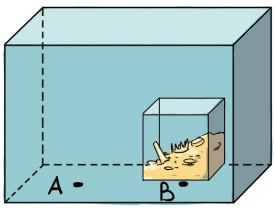
$$l_x = 0{,}5a + a - h = 20{,}5 + 41 - 1{,}5 = 60 \text{ метров.}$$

По вертикали шайба пройдёт ровно одну ширину поля, то есть $l_y = b = 25$ метров. Тогда

$$l^2 = l_x^2 + l_y^2 = 3600 + 625 = 4225 \quad \Rightarrow \quad l = 65 \text{ метров.}$$

**Примечание.** Возможны другие траектории, попадающие после удара вправо в левые ворота, но они соответствуют бóльшим горизонтальным или вертикальным перемещениям шайбы по «отражённым» полям, и тем самым длиннее истинной траектории.

**8.4.** Папа-кладоискатель нашёл герметично закрытый прямоугольный сундук с сокровищами (размеры сундука $a \times b \times h$, где $h$ — высота) и спрятал его на дне бассейна площади $S$, в котором аппаратура всегда поддерживает постоянное количество воды. Для контроля за кладом папа поставил на дне бассейна два датчика давления: в точке $A$ — просто на дне, и в точке $B$ — под сундуком. Первый датчик изначально показывал $P_A = P_1$, а второй — $P_B = P_2$. Сын кладоискателя ночью нырнул в бассейн, нашёл клад, открыл сундук и забрал из него столько драгоценностей, сколько смог унести. Утром датчики показали $P_A = P_3$ и $P_B = P_4$. Найдите массу драгоценностей, которые унёс сын.




**Примечание:** считайте, что под сундуком везде одинаковое давление. (*А. М. Минарский*)

**Ответ:** Масса унесённых сыном драгоценностей равна

$$\frac{(P_2 + P_3 - P_1 - P_4) \cdot ab}{g} + \frac{(P_1 - P_3) \cdot S}{g}.$$

**Решение.** Площадь дна, на которое действует давление $P_B$, равна площади сундука $ab$, а площадь дна, где действует давление $P_A$, равна $S - ab$. Поэтому общая сила, действующая на дно, сначала равнялась

$$F_0 = P_1 \cdot (S - ab) + P_2 \cdot ab,$$

а в конце

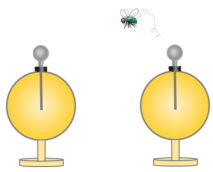
$$F_к = P_3 \cdot (S - ab) + P_4 \cdot ab.$$

Разность этих сил и даёт убыль общей силы давления на дно, которая равна силе тяжести унесённого груза:

$$mg = F_0 - F_к = P_1 \cdot (S - ab) + P_2 \cdot ab - P_3 \cdot (S - ab) - P_4 \cdot ab = (P_2 + P_3 - P_1 - P_4) \cdot ab + (P_1 - P_3) \cdot S.$$

Разделив это равенство на $g$, получим окончательный ответ.

**8.5.** В лаборатории стоит два одинаковых электрометра (по сути — два металлических шарика с приделанной к каждому стрелкой-индикатором количества заряда в условных единицах). Стрелка 1-го электрометра показывала 45 единиц заряда, 2-го — ноль. На 1-й электрометр села незаряженная, но электропроводящая муха, потом перелетела на 2-й электрометр, а затем взлетела, после чего 2-й электрометр показал 10 единиц заряда.



**[1]** Какой заряд при этом мог остаться у мухи?

**[2]** Какой заряд может быть у мухи, если она очень много раз будет летать с одного электрометра на другой?

**Примечание:** считайте, что заряд не стекает ни в воздух, ни куда-либо вовне. (*А. М. Минарский*)

**Ответ: [1]** 5 единиц, **[2]** 9 единиц или **[1]** 20 единиц, **[2]** 22,5 единицы.

**Решение пункта 1.** Поскольку размеры мухи и электрометра постоянны, то общий заряд системы «электрометр + муха» при взлёте мухи всегда распределяется в одинаковой пропорции: пусть муха уносит долю $x$ общего заряда, а на электрометре остаётся $1 - x$. Сначала общий заряд 1-го электрометра и мухи был 45 единиц, значит, у мухи был заряд $45x$ единиц. Это стало общим зарядом системы 2-го электрометра и мухи, и, взлетев во 2 раз, муха унесла $x \cdot 45x = 45x^2$ единиц, а на 2-м электрометре осталось $45x(1 - x)$

единиц. По условию на нём осталось 10 единиц:

$$45x(1-x)=10 \quad \Rightarrow \quad x_1=\frac{1}{3},\, x_2=\frac{2}{3}.$$

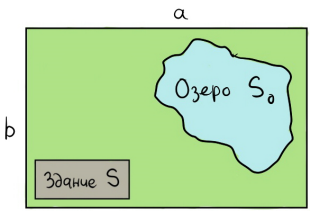
В первом случае на мухе осталось $45x_1^2=5$ единиц, во втором: $45x_2^2=20$ единиц заряда.

**Решение пункта 2.** Если муха летает туда сюда достаточно долго, заряд перестаёт переходить с мухи на электрометр или обратно, то есть отношения зарядов на мухе и на любом электрометре всегда $\frac{x}{1-x}$. Поэтому 1-й электрометр, муха и 2-й электрометр имеют, соответственно, заряды $(1-x)q$, $xq$ и $(1-x)q$, где $q$ — заряд системы «муха + любой электрометр». Общий заряд будет, как и прежде, 45 единиц, откуда

$$(1-x)q+xq+(1-x)q=45 \quad \Leftrightarrow \quad (2-x)q=45.$$

Подставляя $x_1=1/3$, получим $q=27$ единиц, и $xq=9$ единиц; а подставляя $x_2=2/3$, получим $q=33{,}75$ единицы и $xq=22{,}5$ единицы.

**8.6.** Огороженная территория лагеря «Формула Единства» представляла собой прямоугольник площади $a\times b=1{,}5\times 0{,}8$ км$^2$, на которой располагалось большое озеро площади $S_0=0{,}6$ км$^2$ и здание площади $S=0{,}1$ км$^2$. Некоторый день в лагере школьники объявили днём полной свободы — все вожатые ушли из лагеря, а школьники стали поступать как хотят.




Треть школьников осталась в здании, а остальные выбежали из него и стали бегать в произвольных направлениях со средней скоростью $V_1=10$ км/ч.

Если школьник добегал до здания или ограждения лагеря, он упруго отражался от него и бежал дальше с той же скоростью. Если школьник добегал до берега озера, он прыгал в него и плыл в случайном направлении со средней скоростью $V_0=2$ км/ч, и, когда доплывал до берега, вылезал и бежал в случайном направлении дальше снова со скоростью $V_1$.

Сколько, в среднем, школьников находилось в каждый момент дня свободы в озере, если всего их в лагере было 210? (*А. М. Минарский*)

**Ответ:** в среднем в озере находится 120 школьников.

**Решение.** Когда установится равновесие, количество школьников, каждый момент запрыгивающих в озеро, в среднем равно количеству школьников, вылезающих из него; при этом распределение школьников как по суше, так и по озеру случайно. Пусть концентрация бегающих школьников (их среднее число на единицу площади) равно $n_1$; поскольку площадь суши равна $ab-S_0-S$, то общее число бегающих школьников равно $N_1=n_1(ab-S_0-S)$. Если концентрация школьников в озере — $n_0$, тогда их среднее число $N_0=n_0S_0$.

По условию 2/3 школьников находятся вне здания, поэтому

$$N_1+N_0=n_1(ab-S_0-S)+n_0S_0=\frac{2}{3}\cdot N. \tag{8.6.1}$$

Число школьников, в единицу времени подбегающее к берегу озера (и прыгающих в него), пропорционально их концентрации на берегу $n_1$ и их скорости $V_1$, то есть это число пропорционально $n_1V_1$. Аналогично число школьников, подплывающих к берегу озера (и выбегающих на берег), пропорционально их концентрации в озере и их скорости плавания, то есть $n_0V_0$. Тем самым, при установлении равновесия, должны стать равными величины:

$$n_0V_0=n_1V_1. \tag{8.6.2}$$

Уравнения (8.6.1) и (8.6.2) позволяют найти неизвестные концентрации школьников $n_0$ и $n_1$. Например, учитывая, что скорость бега $V_1$ по условию в среднем в 5 раз больше скорости плавания $V_0$, получим, что концентрация детей в озере в 5 раз больше концентрации на суше: $n_0=5n_1$. Подставив это соотношение и все численные значения в (8.6.1), получаем:

$$n_1(1{,}5\cdot 0{,}8-0{,}6-0{,}1)+5n_1\cdot 0{,}6=\frac{2}{3}\cdot 210=140 \quad \Rightarrow \quad n_1=40\ \frac{\text{чел}}{\text{км}^2}.$$

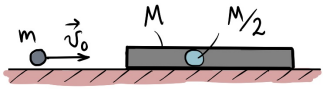
Поэтому

$$N_0=n_0S_0=5n_1S_0=5\cdot 40\cdot 0{,}6=120 \text{ человек}.$$

Международная физическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2020–2021 учебный год. Заключительный этап

# Решения задач для 9 класса

**9.1.** Железное ядро массы $m$ налетает со скоростью $v_0$ на торец полого цилиндра, внутри которого находится мягкий пластилиновый шарик. Масса цилиндра равна $M$, а шарика — $M/2$. Найдите скорость цилиндра после соударения с ядром, когда движение пластилинового шарика относительно цилиндра прекратится.




**Примечание:** соударение ядра с цилиндром абсолютно упругое; поверхность стола, на которой находится цилиндр, абсолютно гладкая. (*И. В. Демидов*)

**Ответ:** скорость цилиндра

$$v = \frac{4mv_0}{3(m+M)}.$$

**Решение.** Закон сохранения механической энергии работает до тех пор, пока пластилиновый шарик не начнёт двигаться относительно цилиндра (тогда произойдут потери энергии в результате трения и неупругого удара в торец стержня). то есть именно в момент удара ядра и стержня можно использовать закон сохранения энергии

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{Mu^2}{2} + \frac{mv'^2}{2},$$

и закон сохранения импульса

$$mv_0 = Mu + mv'$$

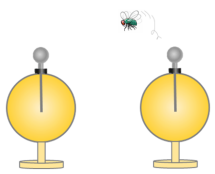
Откуда, исключая скорость ядра $v'$, нетрудно найти скорость оболочки цилиндра сразу после удара: $u = 2v_0(1 + M/m)$. Важно обратить внимание, что шарик не приклеен к цилиндру, так как если бы он был приклеен, то не имел бы форму шарика (пластилин был бы расплюснут по стенке цилиндра), и не смог бы двигаться относительно цилиндра (которое имеет место, согласно условиям задачи). Поэтому при ударе ядра о торец цилиндра, ядро взаимодействует только с цилиндром, а пластилиновый шарик, вследствие инерции, должен покоится относительно стола в момент удара (поэтому в законах сохранения нет вклада от пластилинового шарика).

Как только пластилиновый шарик начал движение относительно цилиндра, закон сохранения механической энергии перестаёт работать (так как будет присутствовать трение). Но можно воспользоваться воспользоваться законом сохранения импульса. В момент удара цилиндр будет двигаться со скоростью $u$, а пластилиновый шарик, вследствие инерции, будет неподвижен. Когда пластилиновый шарик и цилиндр будут лететь как одно целое (после внутренних соударений и остановки шарика вследствие трения), то у них будет общая скорость $v$. Поэтому

$$Mu = (1+\alpha)Mv \quad \Rightarrow \quad v = \frac{u}{1+\alpha} = \frac{2mv_0}{(1+\alpha)(m+M)},$$

где $\alpha = 1/2$.

**9.2.** В лаборатории стоит два одинаковых электрометра (по сути — два металлических шарика с приделанной к каждому стрелкой-индикатором количества заряда в условных единицах). Стрелка 1-го электрометра показывала 45 единиц заряда, 2-го — ноль. На 1-й электрометр села незаряженная, но электропроводящая муха, потом перелетела на 2-й электрометр, а затем взлетела, после чего 2-й электрометр показал 10 единиц заряда.



**[1]** Какой заряд при этом мог остаться у мухи?

**[2]** Какой заряд может быть у мухи, если она очень много раз будет летать с одного электрометра на другой?

**Примечание:** считайте, что заряд не стекает ни в воздух, ни куда-либо вовне. (*А. М. Минарский*)

**Ответ:** **[1]** 5 единиц, **[2]** 9 единиц или **[1]** 20 единиц, **[2]** 22,5 единицы.

**Решение пункта 1.** Поскольку размеры мухи и электрометра постоянны, то общий заряд системы «электрометр + муха» при взлёте мухи всегда распределяется в одинаковой пропорции: пусть муха уносит долю $x$ общего заряда, а на электрометре остаётся $1 - x$. Сначала общий заряд 1-го электрометра и мухи был 45 единиц, значит, у мухи был заряд $45x$ единиц. Это стало общим зарядом системы 2-го электрометра и мухи, и, взлетев во 2 раз, муха унесла $x \cdot 45x = 45x^2$ единиц, а на 2-м электрометре осталось $45x(1 - x)$

единиц. По условию на нём осталось 10 единиц:

$$45x(1-x)=10 \quad \Rightarrow \quad x_1=\frac{1}{3},\, x_2=\frac{2}{3}.$$

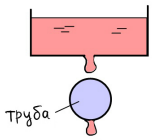
В первом случае на мухе осталось $45x_1^2=5$ единиц, во втором: $45x_2^2=20$ единиц заряда.

**Решение пункта 2.** Если муха летает туда сюда достаточно долго, заряд перестаёт переходить с мухи на электрометр или обратно, то есть отношения зарядов на мухе и на любом электрометре всегда $\frac{x}{1-x}$. Поэтому 1-й электрометр, муха и 2-й электрометр имеют, соответственно, заряды $(1-x)q$, $xq$ и $(1-x)q$, где $q$ — заряд системы «муха + любой электрометр». Общий заряд будет, как и прежде, 45 единиц, откуда

$$(1-x)q+xq+(1-x)q=45 \quad \Leftrightarrow \quad (2-x)q=45.$$

Подставляя $x_1=1/3$, получим $q=27$ единиц, и $xq=9$ единиц; а подставляя $x_2=2/3$, получим $q=$ $=33{,}75$ единицы и $xq=22{,}5$ единицы.

**9.3.** Из сосуда падают одинаковые капли жидкости, нагретой до температуры 50°. Эти капли попадают на цилиндрическую трубу, у которой начальная температура 0°C, а масса и удельная теплоёмкость равна массе и удельной теплоёмкости жидкости в сосуде. Чему равна конечная температура трубы, когда вся жидкость вытечет из сосуда, если известно, что вытекло $N=100$ капель?




**Примечание:** капли падают настолько редко, что на трубе может находиться одновременно только одна капля); теплообмен происходит очень быстро; тепловыми потерями пренебрегите. (*И. В. Демидов*)

**Ответ:** $\theta\approx 31{,}5$°C.

**Решение.** Рассмотрим уравнение теплового баланса для первой капли: $c\Delta m(\theta_1-T_1)+cM(\theta_1-T_0)=0$, где $\Delta m$ — масса капли, $T_1$ — температура жидкости в сосуде, $T_0=0$°C — начальная температура трубы, $M$ — масса трубы. Отсюда находим конечную температуру трубы, после того, как на ней побывала первая капля: $\theta_1=\Delta mT_1/(\Delta m+M)$. так как начальная масса жидкости в сосуде равна массе трубы, и всего вытечет $N$ капель, то можно записать $\Delta m=m/N$, поэтому $\theta_1=T_1/(1+N)$. После второй капли, труба будет иметь температуру

$$\theta_2=\frac{\Delta mT_1+M\theta_1}{\Delta m+M}=\frac{T_1+N\theta_1}{1+N},$$

или подставляя сюда $\theta_1$, найдём

$$\theta_2=\frac{T_1}{1+N}\left(1+\frac{N}{1+N}\right).$$

Начиная с $\theta_3$ появляется гипотеза, что после $k$-й капли температура трубы будет определяться выражением

$$\theta_k=\frac{T_1}{1+N}\left(1+\frac{N}{1+N}+\frac{N^2}{(1+N)^2}+...+\frac{N^{k-1}}{(1+N)^{k-1}}\right)$$

Доказать это можно с помощью метода математической индукции: пусть есть выражение для $\theta_k$, нужно показать, что аналогичное выражение будет справедливо для $\theta_{k+1}$. А это нетрудно получить, используя уравнение теплового баланса

$$\theta_{k+1}=\frac{T_1+N\theta_k}{1+N}.$$

Для решения задачи нам нужно посчитать $\theta_N$. Для этого воспользуемся формулой для суммы геометрической прогрессии:

$$S=\frac{1-q^{N+1}}{1-q},$$

где $q=N/(1+N)$. Получим в итоге

$$\theta_N=\frac{T_1}{1+N}\frac{1-N^N/(1+N)^N}{1-N/(1+N)}=T_1\left[1-\left(\frac{N}{1+N}\right)^N\right]$$

На калькуляторе можно найти, что $\theta_N\approx 31.5$°C.

**Примечание:** Данную задачу можно решить значительно проще, не прибегая к вычислению суммы геометрической прогрессии, если заметить, что $\theta_1$ можно привести к виду

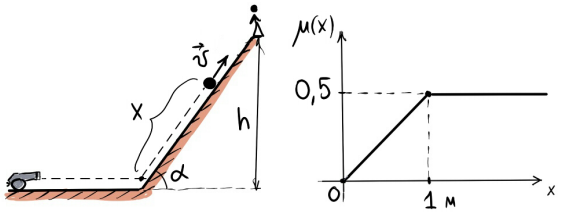
$$\theta_1=T_1\left(1-\frac{1}{1+1/N}\right)$$

К такому выражению проще всего придти, если подставлять $\Delta m=m/N$, а не $m=N\Delta m$. Представляя конечные температуры трубы в таком виде, нетрудно будеть заметить, что для $k$-й капли справедливо

$$\theta_k=T_1\left(1-\frac{1}{(1+1/N)^k}\right)$$

Откуда автоматически получаем $\theta_N$.

**9.4.** Пушка стреляет ядром в наклонную (под углом $\alpha = 30°$) сверхпрочную горку. Удар ядра о горку абсолютно неупругий. В результате удара поверхность ядра, контактирующая с горкой, слегка размягчилась, но по мере скольжения ядра вдоль горки она остывает и твердеет. Экспериментально установлено, что при этом коэффициент трения скольжения зависит от пройденного расстояния вдоль горки так, как показано на рисунке.




Какой высоты $h$ должна быть горка, чтобы к человеку, находящемуся на вершине горки, ядро «приехало» с нулевой скоростью? Начальная скорость ядра $v_0 = 100$ м/с, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с$^2$.

(*И. В. Демидов*)

**Ответ:** $h \approx 201$ м.

**Решение.** Так как ядро соударяется неупруго, то составляющая скорости, перпендикулярная горке, исчезает. Поэтому исходный запас кинетической энергии при движении вдоль горки равен $m(v_0 \cos\alpha)^2/2$. Эта энергия тратится на работу против силы тяжести и силы трения скольжения. Работа силы тяжести это $A_{\text{тяж}} = -mgh$. Работа силы трения вычисляется труднее, так как коэффициент трения переменный. Если ядро проедет менее 1 м, то сила трения пропорциональна пройденному пути

$$F_{\text{тр}} = \mu_0 \cdot \frac{x}{l} \cdot mg\cos\alpha,$$

где $l = 1$ м и $\mu_0 = 0{,}1$, что очень похоже на силу упругости с эффективной жёсткостью $k = \mu_0 mg\cos\alpha/l$, поэтому работа здесь вычисляется как $kx^2/2$. Если же ядро проедет более 1 метра, то нужно ещё будет добавить обычное произведение силы на перемещение (отсчитываемого от $x = 1$ м). Используя теорему об изменении кинетической энергии, легко получается уравнение на $h$. При этом, если ядро проедет меньше метра ($x < l$), то получится квадратное уравнение:

$$\frac{mv_0^2\cos^2\alpha}{2} = mgh + \frac{\mu_0 mg\cos\alpha}{2}\left(\frac{h}{\sin\alpha}\right)^2,$$

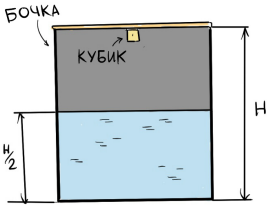
а если ядро проедет больше метра ($x > l$), то будет линейное уравнение:

$$\frac{mv_0^2\cos^2\alpha}{2} = mgh + \frac{\mu_0 mgl\cos\alpha}{2} + \mu_0 mg\cos\alpha\left(\frac{h}{\sin\alpha} - l\right).$$

Какое из данных уравнений следует использовать? Достаточно посмотреть на цифры, данные в условии. Скорость ядра довольно большая, и равна 100 м/с, угол наклона горки всего 30°, а коэффициент трения поверхности горки не слишком большой. Разумеется, что при таких параметрах задачи, ядро проедет больше одного метра, и поэтому нужно использовать второе уравнение. Поскольку оно линейное относительно $h$, то решается элементарно, и мы получаем

$$h = \frac{v_0^2\cos^2\alpha + \mu_0 gl\cos\alpha}{2g(1 + \mu_0\cot\alpha)} \approx 201 \text{ м}.$$

**9.5.** Теплоизолированная цилиндрическая бочка высоты $H = 1$ м наполовину заполнена водой, а к верхней крышке изнутри приклеен лёгкий кубик. По крышке несильно ударили, из-за чего кубик отклеился и упал в воду. Найдите, сколько выделилось в системе тепла, после того как колебания воды прекратятся.




**Примечание:** плотность воды — 1 г/см$^3$, средняя плотность кубика — 0,5 г/см$^3$, сторона кубика $a = 4$ см; считайте, что бочка настолько широкая, что уровень воды после падения кубика практически не изменился. (*И. В. Демидов*)

**Ответ:** $Q = mg(H/2 - 3a/4)$.

**Решение.** Изначально у кубика была потенциальная энергия $mg(H - a/2)$, а у воды — $MgH/4$, то есть суммарно

$$E_1 = Mg\frac{H}{4} + mg\left(H - \frac{a}{2}\right).$$

Затем кубик упал, с течением времени колебания в системе прекратились, и у кубика потенциальная энергия стала равной $mgH/2$. Действительно, так как плотность кубика в два раза меньше плотности воды, то лишь половина объёма кубика будет погружена в воду, поэтому его центр масс находится на уровне воды в бочке. И так как в условии указано, что изменением уровня воды можно пренебречь (бочка широкая), то высота, на которой находится центр кубика, равна $H/2$. Чтобы теперь найти потенциальную энергию воды, нужно заметить, что из неё «вырезали» объём, равный половине объёма кубика, и распределили этот объём по поверхности воды тонкой «плёнкой» (которая представляет собой слой вытесненной воды, но так как изменение уровня воды в бочке пренебрежимо мало, то получается очень тонкий слой, как

бы «плёнка»). Масса этой «плёнки» равна массе кубика по закону Архимеда. Найдём теперь потенциальную энергию воды. Потенциальная энергия «плёнки» равна $mgH/2$, потенциальная энергия остального объёма воды (с учётом «вырезанного» объёма) равна

$$Mg\frac{H}{4} + (-m)g\left(\frac{H}{2} - \frac{a}{4}\right),$$

где $a/4$ — расстояние от центра тяжести погружённого объёма кубика до поверхности жидкости (четверть стороны кубика). Складывая все потенциальные энергии (и кубика и воды) вместе, найдём

$$E_2 = Mg\frac{H}{4} + mg\left(\frac{H}{2} + \frac{a}{4}\right).$$

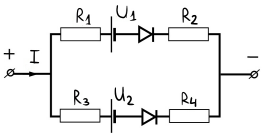
По закону сохранения энергии имеем

$$E_{\text{мех}} + U = \text{const},$$

где $E_{\text{мех}}$ — механическая энергия системы, $U$ — внутренняя энергия системы. Отсюда следует, что изменение внутренней энергии (то есть выделившееся количество теплоты), есть

$$Q = \Delta U = E_1 - E_2 = mg\left(\frac{H}{2} - \frac{3a}{4}\right).$$

**9.6.** Имеется схема, состоящая из четырёх резисторов $R_1 = R_2 = 2$ Ом, $R_3 = 1$ Ом, $R_4 = 3$ Ом, двух идеальных батареек (то есть их сопротивление равно нулю) с напряжениями $U_1 = 1$ В и $U_2 = 2$ В и двух идеальных диодов. Постройте график зависимости общей силы тока $I$ в зависимости от подаваемого на схему напряжения $U$.



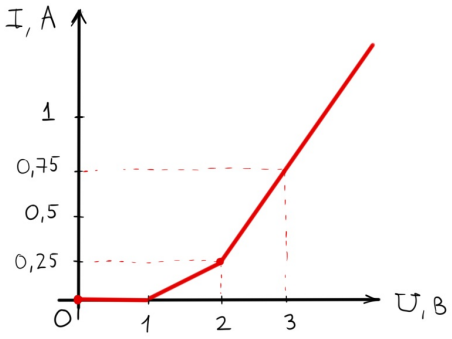

**Примечание:** Идеальным диодом называют устройство, которое пропускает ток только в одном направлении (и это направление указано «стрелкой» диода). (*И. В. Демидов*)

**Решение.** Согласно условию задачи, диоды будут пропускать ток, если он течёт через них слева направо. Но каждая из батареек, которые имеются в цепи, пытается (на своём участке цепи) направлять ток справа налево. Поскольку $U_2 > U_1$, то при отсутствующем внешнем напряжении, ток в схеме должен был бы идти по часовой стрелке. Поскольку при этом нижний диод его не будет пропускать, то тока в цепи не будет (если диод не пропускает ток, то он эквивалентен разрыву цепи). Значит, при $U = 0$ В имеем $I = 0$ А.

Подадим на схему внешнее напряжение $U > 0$ В. Если бы диодов не было, то на верхнем участке цепи протекал бы ток $I_1 = \frac{U-U_1}{R_1+R_2}$, а на нижнем — $I_2 = \frac{U-U_2}{R_3+R_4}$. При этом если токи положительны, то они текут слева направо, а если отрицательны, то справа налево. Теперь вернём диоды в цепь. В соответствии с тем, что диоды будут пропускать токи, если они текут слева направо, мы получаем, что при $U < U_1$, ток в цепи отстутствует (так как $I_1 < 0$, и $I_2 < 0$), если $U_1 < U < U_2$, то только верхний диод пропускает ток (так как $I_1 > 0$ и $I_2 < 0$), и если $U > U_2$, то оба диода пропускают ток (так как $I_1 > 0$ и $I_2 > 0$). Поскольку суммарный ток есть $I = I_1 + I_2$, то мы получаем следующую зависимость $I(U)$:

1) $I(U) = 0$ при $U < U_1$,
2) $I(U) = (U - U_1)/(R_1 + R_2) = (U - 1)/4$ при $U_1 < U < U_2$,
3) $I(U) = (U - U_1)/(R_1 + R_2) + (U - U_2)/(R_3 + R_4) = (2U - 3)/4$ при $U > U_2$.

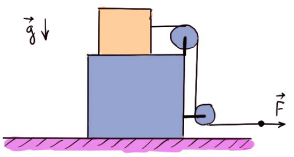
Соответствующий график приведён на рисунке.



Международная физическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2020–2021 учебный год. Заключительный этап

# Решения задач для 10 класса

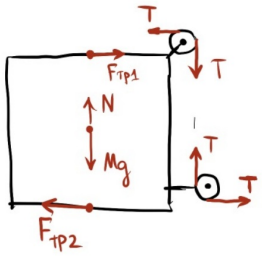
**10.1.** На схеме, изображённой на рисунке, тянут за невесомую и нерастяжимую нить вправо с некоторой силой $F$. Масса большого кубика в два раза больше маленького. Каким должен быть минимальный коэффициент трения между кубиками $\mu_1$, чтобы было возможно сдвинуть с места большой кубик? Коэффициент трения между большим кубиком и полом равен $\mu_2$.




**Примечание:** блоки невесомые, трение в осях отсутствует. (*И. В. Демидов*)

**Ответ:** $3\mu_2$.

**Решение.** Уравнение движения для большого кубика (см. рисунок) можно записать в виде

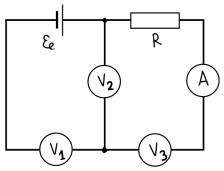



$$Ma = \mu_1 mg - \mu_2(m+M)g$$

(заметим, что сюда не входит сила $F$, так как силы натяжения нитей сокращаются при рассмотрении большого кубика). Тогда, чтобы кубик можно было сдвинуть, необходимо условие

$$\mu_1 > \mu_2\left(1+\frac{M}{m}\right) = 3\mu_2.$$

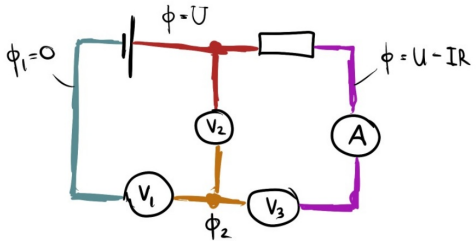
**10.2.** Схема состоит из идеальной батарейки с ЭДС $U = 5$ В, идеального амперметра, трёх вольтметров и резистора с сопротивлением 10 Ом (см. рисунок). Чему равны показания вольтметров $V_1$ и $V_2$, если амперметр показывает значение 0,1 А, а вольтметр $V_3$ показывает 1,5 В?




**Примечание:** провода идеальные. (*И. В. Демидов*)

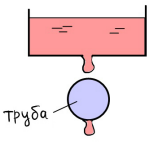
**Ответ:** Оба вольтметра покажут 2,5 В.

**Решение.** Так как провода идеальные, то они имеют постоянный потенциал. Пусть самый левый участок провода, соединяющий $V_1$ и батарейку, имеет нулевой потенциал $\varphi_1 = 0$ В (на рисунке этот провод обозначен синим). Тогда при переходе через батарейку потенциал увеличится на $U = 5$ В (и этот потенциал имеет «тройник» из проводов, соединяющих батарейку, резистор и $V_2$, на рисунке обозначен красным).




При переходе через резистор потенциал падает и равен $U - IR$, где $I = 0{,}1$ А — ток через резистор, который измеряет амперметр. Так как амперметр идеальный, то изменения потенциала не происходит. Далее обозначим потенциал «тройника» из проводов, соединяющих все вольтметры, через $\varphi_2$ (на рисунке обозначено оранжевым). Так как вольтметры показывают разность потенциалов проводов к которым они подключены, то получим $U_1 = \varphi_2$, $U_2 = U - \varphi_2$ и $U_3 = U - IR - \varphi_2$. Подставляя данные задачи, получим $U_1 = \varphi_2 = 2{,}5$ В, $U_2 = 2{,}5$ В.

**10.3.** Из сосуда падают одинаковые капли жидкости, нагретой до температуры 50°. Эти капли попадают на цилиндрическую трубу, у которой начальная температура 0°C, а масса и удельная теплоёмкость равна массе и удельной теплоёмкости жидкости в сосуде. Чему равна конечная температура трубы, когда вся жидкость вытечет из сосуда, если известно, что вытекло $N = 100$ капель?




**Примечание:** капли падают настолько редко, что на трубе может находиться одновременно только одна капля); теплообмен происходит очень быстро; тепловыми потерями пренебрегите. (*И. В. Демидов*)

**Ответ:** $\theta \approx 31{,}5$°C.

**Решение.** Рассмотрим уравнение теплового баланса для первой капли: $c\Delta m(\theta_1 - T_1) + cM(\theta_1 - T_0) = 0$, где $\Delta m$ — масса капли, $T_1$ — температура жидкости в сосуде, $T_0 = 0$°C — начальная температура трубы, $M$ — масса трубы. Отсюда находим конечную температуру трубы, после того, как на ней побывала первая капля: $\theta_1 = \Delta m T_1/(\Delta m + M)$. так как начальная масса жидкости в сосуде равна массе трубы, и всего вытечет $N$ капель, то можно записать $\Delta m = m/N$, поэтому $\theta_1 = T_1/(1+N)$. После второй капли, труба будет иметь температуру

$$\theta_2 = \frac{\Delta m T_1 + M\theta_1}{\Delta m + M} = \frac{T_1 + N\theta_1}{1+N},$$

или подставляя сюда $\theta_1$, найдём

$$\theta_2 = \frac{T_1}{1+N}\left(1 + \frac{N}{1+N}\right).$$

Начиная с $\theta_3$ появляется гипотеза, что после $k$-й капли температура трубы будет определяться выражением

$$\theta_k = \frac{T_1}{1+N}\left(1 + \frac{N}{1+N} + \frac{N^2}{(1+N)^2} + ... + \frac{N^{k-1}}{(1+N)^{k-1}}\right)$$

Доказать это можно с помощью метода математической индукции: пусть есть выражение для $\theta_k$, нужно показать, что аналогичное выражение будет справедливо для $\theta_{k+1}$. А это нетрудно получить, используя уравнение теплового баланса

$$\theta_{k+1} = \frac{T_1 + N\theta_k}{1+N}.$$

Для решения задачи нам нужно посчитать $\theta_N$. Для этого воспользуемся формулой для суммы геометрической прогрессии:

$$S = \frac{1-q^{N+1}}{1-q},$$

где $q = N/(1+N)$. Получим в итоге

$$\theta_N = \frac{T_1}{1+N}\frac{1-N^N/(1+N)^N}{1-N/(1+N)} = T_1\left[1 - \left(\frac{N}{1+N}\right)^N\right]$$

На калькуляторе можно найти, что $\theta_N \approx 31.5°\text{C}$.

**Примечание:** Данную задачу можно решить значительно проще, не прибегая к вычислению суммы геометрической прогрессии, если заметить, что $\theta_1$ можно привести к виду

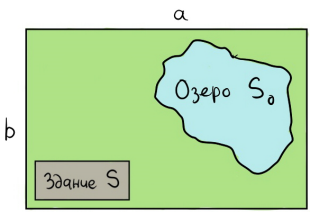
$$\theta_1 = T_1\left(1 - \frac{1}{1+1/N}\right)$$

К такому выражению проще всего придти, если подставлять $\Delta m = m/N$, а не $m = N\Delta m$. Представляя конечные температуры трубы в таком виде, нетрудно будеть заметить, что для $k$-й капли справедливо

$$\theta_k = T_1\left(1 - \frac{1}{(1+1/N)^k}\right)$$

Откуда автоматически получаем $\theta_N$.

**10.4.** Огороженная территория лагеря «Формула Единства» представляла собой прямоугольник площади $a \times b = 1{,}5 \times 0{,}8$ км$^2$, на которой располагалось большое озеро площади $S_0 = 0{,}6$ км$^2$ и здание площади $S = 0{,}1$ км$^2$. Некоторый день в лагере школьники объявили днём полной свободы — все вожатые ушли из лагеря, а школьники стали поступать как хотят.




Треть школьников осталась в здании, а остальные выбежали из него и стали бегать в произвольных направлениях со средней скоростью $V_1 = 10$ км/ч.

Если школьник добегал до здания или ограждения лагеря, он упруго отражался от него и бежал дальше с той же скоростью. Если школьник добегал до берега озера, он прыгал в него и плыл в случайном направлении со средней скоростью $V_0 = 2$ км/ч, и, когда доплывал до берега, вылезал и бежал в случайном направлении дальше снова со скоростью $V_1$.

Сколько, в среднем, школьников находилось в каждый момент дня свободы в озере, если всего их в лагере было 210? (*А. М. Минарский*)

**Ответ:** в среднем в озере находится 120 школьников.

**Решение.** Когда установится равновесие, количество школьников, каждый момент запрыгивающих в озеро, в среднем равно количеству школьников, вылезающих из него; при этом распределение школьников как по суше, так и по озеру случайно. Пусть концентрация бегающих школьников (их среднее число на единицу площади) равно $n_1$; поскольку площадь суши равна $ab - S_0 - S$, то общее число бегающих школьников равно $N_1 = n_1(ab - S_0 - S)$. Если концентрация школьников в озере — $n_0$, тогда их среднее число $N_0 = n_0 S_0$.

По условию 2/3 школьников находятся вне здания, поэтому

$$N_1 + N_0 = n_1(ab - S_0 - S) + n_0 S_0 = \frac{2}{3}\cdot N. \qquad (10.4.1)$$

Число школьников, в единицу времени подбегающее к берегу озера (и прыгающих в него), пропорционально их концентрации на берегу $n_1$ и их скорости $V_1$, то есть это число пропорционально $n_1 V_1$. Аналогично число школьников, подплывающих к берегу озера (и выбегающих на берег), пропорционально их концентрации в озере и их скорости плавания, то есть $n_0 V_0$. Тем самым, при установлении равновесия, должны

стать равными величины:

$$n_0V_0 = n_1V_1. \tag{10.4.2}$$

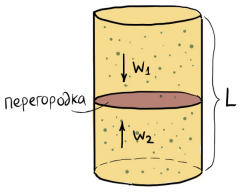
Уравнения (10.4.1) и (10.4.2) позволяют найти неизвестные концентрации школьников $n_0$ и $n_1$. Например, учитывая, что скорость бега $V_1$ по условию в среднем в 5 раз больше скорости плавания $V_0$, получим, что концентрация детей в озере в 5 раз больше концентрации на суше: $n_0 = 5n_1$. Подставив это соотношение и все численные значения в (10.4.1), получаем:

$$n_1(1{,}5 \cdot 0{,}8 - 0{,}6 - 0{,}1) + 5n_1 \cdot 0{,}6 = \frac{2}{3} \cdot 210 = 140 \quad \Rightarrow \quad n_1 = 40 \ \frac{\text{чел}}{\text{км}^2}.$$

Поэтому

$$N_0 = n_0S_0 = 5n_1S_0 = 5 \cdot 40 \cdot 0{,}6 = 120 \text{ человек}.$$

**10.5.** В цилиндрическом сосуде высотой $L$ и площади основания $S$ находится $N$ молекул газа. Исследователям удалось создать «несимметрично-пропускающий» тонкий и лёгкий поршень-перегородку. При пролёте сверху вниз молекулы с вероятностью $w_1 = 2/3$ пролетают сквозь перегородку, а с вероятностью $1 - w_1$ — отскакивают от неё. А молекулы, подлетающие снизу, с вероятностью $w_2 = 1/3$ пролетают через перегородку, а с вероятностью $1 - w_2$ — отскакивают. Подвижную перегородку из такого материала поместили внутрь сосуда, и поставили сверху небольшой по размеру груз $M$.




Где окажется перегородка спустя долгое время? Температура системы — $T$.

(*А. М. Минарский, И. В. Демидов*)

**Ответ:** $h = NkT/Mg$—$L$:

- если $NkT/Mg < L$, то равновесия в «подвешенном состоянии» не достигается и поршень лежит на дне сосуда $h = 0$;
- если $NkT/Mg > 2L$, то равновесия в «подвешенном состоянии» не достигается и поршень прижат к верхней стенке сосуда $h = L$.

**Решение.** Пусть концентрации молекул в верхней части сосуда $n_1$ в нижней $n_2$. Количество молекул, пролетающих сквозь перегородку в единицу времени, пропорционально концентрации, средней скорости подлёта молекул и вероятности полёта сквозь перегородку $w$, то есть $nvw$. При наступлении равновесия эти количества молекул (пролетающих снизу и сверху) равны. Поскольку температура в обеих частях одинакова, то и средние скорости одинаковы. Поэтому устанавливается ситуация:

$$n_1w_1 = n_2w_2. \tag{10.5.1}$$

Давление определяется отражёнными молекулами, поэтому вместо формулы $P = nkT$ мы будем иметь формулу

$$P = nkT(1\text{–}w). \tag{10.5.2}$$

Разность сил давления равна силе тяжести груза, поэтому, с учётом (10.5.1) и (10.5.2):

$$F_2\text{–}F_1 = (P_2\text{–}P_1)S = (n_2\text{–}n_1)kTS = Mg. \tag{10.5.3}$$

Если поршень остановится на высоте $h$, то объём нижней части сосуда будет $hS$, а верхней — $(L - h)S$, поэтому полное число молекул:

$$n_2hS + n_1(L - h)S = N. \tag{10.5.4}$$

Из уравнений (10.5.1) и (10.5.3) можно найти концентрации

$$n_1 = \frac{Mgw_2}{kTS(w_1 - w_2)} = 2\frac{Mg}{kTS},$$

$$n_2 = \frac{Mgw_1}{kTS(w_1 - w_2)} = \frac{Mg}{kTS}$$

(мы учли значения вероятностей $w_1 = 2/3$ и $w_2 = 1/3$), подставляя которые в уравнение (10.5.4), найдём высоту $h$:

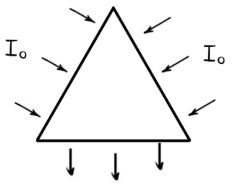
$$h = \frac{NkT}{Mg} - L.$$

Это и есть ответ, который теперь нужно проанализировать. Если (при достаточно малом числе молекул $N$ или их температуре T или большой массе груза M) это число меньше нуля, то значит, равновесия в «подвешенном состоянии» не достигается и поршень лежит на дне сосуда $h = 0$. Если (при достаточно большом числе молекул $N$ или их температуре T или малой массе груза M), это число больше $L$, то равновесия в «подвешенном состоянии» не достигается и поршень прижат к верхней стенке сосуда $h = L$.

**Примечание:** строго говоря, перегородок, с разной вероятностью пропускающих одинаковые молекулы в противоположных направлениях, не существует. Это противоречит 2-му началу термодинамики и

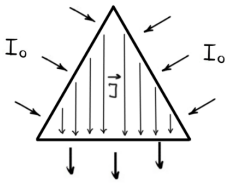
принципу не-убывания энтропии. Поэтому задача является чисто теоретической и экспериментально не воспроизводима.

**10.6.** В пластину в форме треугольной призмы толщиной $h = 1$ мм, основание которой — равносторонний треугольник со стороной 10 см, ток подаётся равномерно через две боковые грани (на каждую по $I_0 = 1$ А), а отводится через третью, тоже равномерно по всей её длине. Через треугольные основания призмы ток не проходит. Какая тепловая мощность выделяется в пластине, если удельное сопротивление её материала равно 1 Ом · м? (*А. В. Савельев, С. Н. Сашов*)




**Ответ:** $P \approx 1732$ Вт.

**Решение.** Для картины токов, изображённой на рисунке, картина внутреннего тока будет однородной: $j(x,y,z) = \text{const}$ (на рисунке отмечена с учётом направления). Плотность тока, по определению, есть отношение силы тока к поперечной площади, через которую ток течёт: $j = 2I/\sigma = 2I/ah$.




Если через какой-то проводящий участок длины $L$ и поперечной площади $S$ течёт ток $I$, то согласно закону Джоуля-Ленца в нём выделяется мощность

$$P = I^2R = (jS)^2\rho L/S = j^2\rho SL = j^2\rho V.$$

Итак, $j^2\rho$ есть мощность тепловыделения на единицу объёма вещества. Для картины токов, изображённой на рисунке, общая мощность тепловыделения будет

$$P = j^2\rho V = \left(\frac{2I}{ha}\right)^2 \cdot \rho \cdot hS = \frac{4I^2}{(ha)^2} \cdot \rho \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}I^2\rho}{h}.$$

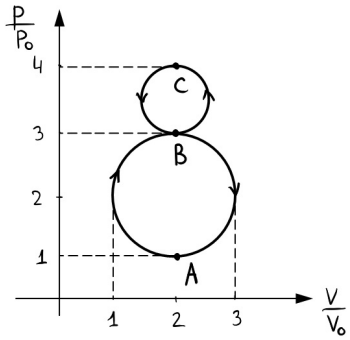
Если подставить $I = I_0$, то получим $P = 1000\sqrt{3} \approx 1732$ Вт.

Международная физическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2020–2021 учебный год. Заключительный этап

# Решения задач для 11 класса

**11.1.** Газ совершает цикл $A \to B \to C \to B \to A$ в виде восьмёрки, состоящей из двух окружностей, радиусы которых относятся как $2:1$. Найдите среднюю мощность совершаемой газом работы, если $p_0 = 10^5$ Па, $V_0 = 1$ м$^3$, и указанный цикл совершается за один час.

(*И. В. Демидов, А. М. Минарский*)




**Ответ:** $\langle P \rangle \approx 65.4$ Вт.

**Решение.** Сначала нужно найти работу, совершённую газом. Нетрудно видеть, что при вычислении работы, весь цикл можно представить в виде суммы двух круговых циклов. Работа газа в каждом цикле равна площади внутри соответствующего кружка, но с учётом верного знака: в нижнем кружке работа газа положительна, а в верхнем — отрицательна. Это следует из того, что:

- работа газа положительна, если его объём увеличивается, и отрицательна, если объём уменьшается;
- работа, вычисленная по верхней дуге данной окружности по модулю будет больше, чем работа, вычисленная по нижней дуге той же окружности.

В безразмерных единицах площадь верхнего кружка равна $\pi r^2 = \pi/4$ (где $r = 1/2$ — радиус верхнего кружка), а нижнего — $\pi$. Следовательно, безразмерная работа газа за весь цикл равна

$$a = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

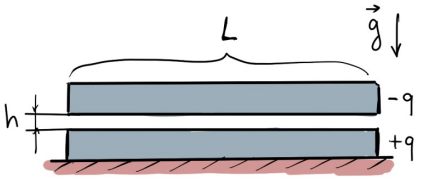
Так как определение работы есть

$$\delta A = p\,\mathrm{d}V = p_0 V_0 \cdot \frac{p}{p_0}\,\mathrm{d}\frac{V}{V_0} = p_0 V_0\,\delta a,$$

то мы получаем, что $A = 3\pi/4 \cdot p_0 V_0 \approx 2{,}4 \cdot 10^5$ Дж. Средняя мощность за цикл есть $\langle P \rangle = A/t$, где $t = 1$ час (или 3600 секунд). Подставляя числа, получаем ответ $\langle P \rangle \approx 65.4$ Вт.

**11.2.** На столе удерживают толстую квадратную металлическую плиту с зарядом $q$ и массой $M$ со сторонами $L \times L$. Над плитой помещают такую же плиту, но с зарядом $-q$, при этом между плитами остаётся небольшой зазор $h$, много меньший размеров плит. До какой максимальной скорости разгонится верхняя плита до соударения с нижней, если плиты предоставить самим себе? Ускорение свободного падения равно $g$.

(*И. В. Демидов*)




**Ответ:** если $q^2/\varepsilon_0 SM \leqslant g$, то максимальная скорость до соударения равна

$$v_{\max} = \sqrt{2\left(g + \frac{q^2}{\varepsilon_0 SM}\right)h},$$

иначе

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 SMh}{q^2}}\left(g + \frac{q^2}{2\varepsilon_0 SM}\right).$$

**Решение.** Так как плиты металлические, то заряд распределится по поверхности плит (чтобы внутри не было электрического поля). При этом, так как заряды противоположные, то весь заряд будет скапливаться на обращённых друг к другу поверхностях плит, при этом распределение заряда должно быть равномерным (как у конденсатора). Поскольку $h$ мало, то можно считать, что электрическое взаимодействие плит эквивалентно взаимодействию бесконечных плоскостей с зарядами $\pm q$. Значит, электрическая сила, действующая на каждую плиту $qE = q^2/\varepsilon_0 S$, где $S = L^2$ — площадь обращённых друг к другу поверхностей плит (отметим, что по правилу суперпозиции, итоговое поле $E$ есть векторная сумма полей, которые создают плиты в отдельности, поэтому нужно использовать формулу $E = q/\varepsilon_0 S$, а не $E = q/2\varepsilon_0 S$). Также на плиты действует сила тяжести $Mg$. Таким образом, верхняя плита будет падать с ускорением

$$a_1 = g + \frac{q^2}{\varepsilon_0 SM},$$

а нижняя — будет подниматься с ускорением

$$a_2 = \frac{q^2}{\varepsilon_0 SM} - g \quad \text{при} \quad \frac{q^2}{\varepsilon_0 SM} > g.$$

При этом, если $q^2/\varepsilon_0 SM \leqslant g$, то нижняя плита будет покоиться. Так как ускорение плиты постоянно, то максимальная скорость до соударения есть $v_{\max} = \sqrt{2a_1 h}$, или

$$v_{\max} = \sqrt{2\left(g + \frac{q^2}{\varepsilon_0 SM}\right) h}.$$

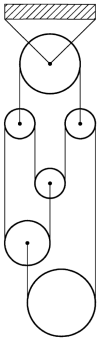
Если $q^2/\varepsilon_0 SM > g$, то нижняя плита будет двигаться навстречу верхней. Время, через которое плиты столкнутся, равно

$$t = \sqrt{\frac{2h}{a_1 + a_2}},$$

и поэтому максимальная скорость верхней плиты перед соударением будет равна $v_{\max} = a_1 t$, или

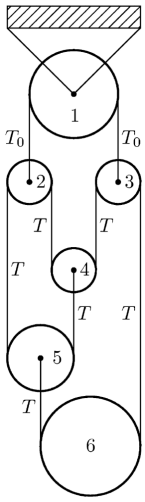
$$v_{\max} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 SMh}{q^2}} \left(g + \frac{q^2}{2\varepsilon_0 SM}\right).$$

**11.3.** Система, схематически (без соблюдения масштаба) изображённая на рисунке, находится в равновесии. Обе нити невесомые, все их свободные участки вертикальны. Все блоки являются однородными дисками одинаковой толщины и могут вращаться без трения. Найдите отношение массы нижнего блока к массе верхнего блока при условии одинаковой плотности всех блоков, кроме нижнего. (*А. В. Чудновский*)



**Ответ:** 8/9.

**Решение.** Из невесомости нитей и способности блоков вращаться без трения следует, что силы натяжения нитей постоянны вдоль каждой из них. Обозначим через $T$ и $T_0$ силы натяжения соответственно нижней и верхней нитей, а через $R_1$, $R_2$, $R_3$, $R_4$, $R_5$ и $R_6$ — радиусы подвижных блоков с соответствующими номерами (см. рис. ниже).




Блоки 2 и 3 находятся в равновесии под действием одинаковых сил натяжения нитей ($2T$ вниз и $T_0$ вверх), значит, они имеют одинаковые массы, откуда с учётом равенства их плотностей и толщин следует равенство $R_2 = R_3$.

Блоки 4 и 5 находятся в равновесии под действием одинаковых сил натяжения нитей ($2T$ вверх и $T$ вниз), значит, они имеют одинаковые массы, откуда с учётом равенства их плотностей и толщин следует равенство $R_4 = R_5$.

Из условия вертикальности всех свободных участков нитей (то есть их параллельности между собой) можно записать систему уравнений

$$\begin{cases} 2R_1 = R_2 + 2R_4 + R_3, \\ 2R_2 + R_4 = 2R_5, \\ 2R_3 + R_4 + R_5 = 2R_6, \end{cases}$$

откуда находим соотношения $R_6/R_5 = 1{,}5$ и $R_1 = R_6$.

Из сравнения условий равновесия блоков 5 и 6 получим отношение их масс: $m_6/m_5 = 2$. Обозначив через $h$ общую для всех блоков толщину, найдём отношение плотностей:

$$\frac{\rho_6}{\rho_5} = \frac{m_6}{\pi R_6^2 h} : \frac{m_5}{\pi R_5^2 h} = \frac{m_6}{m_5} \cdot \frac{R_5^2}{R_6^2} = \frac{8}{9}.$$

Полученное ранее равенство $R_1 = R_6$ означает, что верхний и нижний блоки имеют одинаковые размеры, поэтому искомое отношение их масс равно отношению плотностей:

$$\frac{m_6}{m_1} = \frac{\rho_6}{\rho_1} = \frac{\rho_6}{\rho_5} = \frac{8}{9} \approx 0{,}89.$$

**11.4.** В однородном магнитном поле вращается по круговой орбите электрон. Индукцию поля медленно (за время, во много раз превышающее период обращения) увеличивают на 6%. На сколько, примерно, процентов изменится радиус орбиты электрона? (*А. М. Минарский*)

**Ответ:** Радиус орбиты электрона уменьшится приблизительно на 3%.

**Решение.** Поскольку изменение магнитного поля происходят очень медленно, можно считать, что в течение одного оборота электрон вращается почти по окружности (ощутимое изменение радиуса орбиты электрона происходит через достаточно большое число оборотов). Тогда в течение одного оборота можем

записать

$$ma_{\text{цс}} = qvB \quad \Rightarrow \quad \frac{mv^2}{R} = qvB \quad \Rightarrow \quad R = \frac{mv}{qB},$$

так как сила Лоренца перпендикулярна скорости электрона и поэтому не совершает работы, может создаться ложное впечатление, что изменение радиуса орбиты будет происходит только за счёт изменения индукции $B$ в полученной формуле, а скорость будет оставаться постоянной. Однако это не так. Ведь всякое изменение магнитного поля будет сопровождаться появлением вихревого электрического поля $E$, которое будет изменять скорость электрона. Увеличение магнитного поля и магнитного потока порождает ЭДС и кольцевое электрическое поле, по величине равное:

$$\varepsilon = 2\pi RE = \pi R^2 \cdot \frac{\Delta B}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{R}{2} \cdot \frac{\Delta B}{\Delta t},$$

где $\Delta t = 2\pi m/qB$ — время обращения электрона по орбите (так как магнитное поле изменяется незначительно, на рассматриваемом интервале времени, то можно считать, что оно изменяется линейно).

Поскольку вращение заряда в магнитном поле можно рассматривать как кольцевой ток, то по правилу правой руки нетрудно найти, что такой ток создаёт собственное магнитное поле, противо-направленное внешнему. По правилу Ленца, электрическое поле поле так должно воздействовать на электрон, чтобы при росте внешнего магнитного поле его скорость увеличивалась. Тогда собственное магнитное поле, порождённое движением электрона по орбите, будет усиливаться, и там самым «ослаблять» рост внешнего поля (так как они взаимно вычитаются). Таким образом, электрическое поле направлено против движения электрона и ускоряет его.

Изменение кинетической энергии за один оборот электрона будет равно работе электрического поля:

$$\Delta E_{\text{кин}} = (2\pi R)qE = q\pi R^2 \cdot \frac{\Delta B}{\Delta t}.$$

Подставив сюда $R$ и $\Delta t$, найдём

$$\frac{\Delta E_{\text{кин}}}{\Delta t} = \frac{E_{\text{кин}}}{B} \cdot \frac{\Delta B}{\Delta t}.$$

Отсюда следует, что $E_{\text{кин}}/B = \text{const}$, или $v^2/B = \text{const}$, а выражая скорость электрона через радиус орбиты $R$, получим $BR^2 = \text{const}$. Это и есть искомое выражение, из которого следует, что увеличение магнитного поля приводит к уменьшению радиуса орбиты электрона. Однако $R$ изменяется не как $B^{-1}$, а как $B^{-1/2}$, то есть медленнее, что вызвано увеличением скорости электрона с одновременным увеличением магнитного поля.

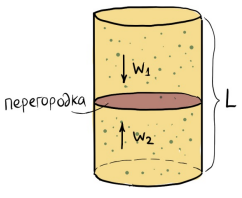
Пусть исходное поле было равно $B$, после увеличения на 6% оно стало равным 1,06 $B$, тогда

$$\frac{(R+\Delta R)^2}{R^2} = \frac{1}{1{,}06} \quad \Rightarrow \quad R + \Delta R \approx 0{,}97R.$$

Значит $\Delta R \approx -0{,}03R$, то есть радиус орбиты электрона уменьшился приблизительно на 3%.

**Примечание:** В физике существует понятие адиабатического инварианта, то есть величины, которая сохраняется тем точнее, чем медленнее («адиабатичнее») изменяются физические параметры системы. Для движения заряженной частицы в магнитном поле такой «почти сохраняющейся» величиной является $p_\perp^2/B$, где $p_\perp$ — это компонента импульса заряженной частицы, перпендикулярная магнитному полю. (Само поле B может за долгое время измениться сильно, но если оно менялось медленно, то отношение $p_\perp^2/B$ не изменится).

**11.5.** В цилиндрическом сосуде высотой $L$ и площади основания $S$ находится $N$ молекул газа. Исследователям удалось создать «несимметрично-пропускающий» тонкий и лёгкий поршень-перегородку. При пролёте сверху вниз молекулы с вероятностью $w_1 = 2/3$ пролетают сквозь перегородку, а с вероятностью $1 - w_1$ — отскакивают от неё. А молекулы, подлетающие снизу, с вероятностью $w_2 = 1/3$ пролетают через перегородку, а с вероятностью $1 - w_2$ — отскакивают. Подвижную перегородку из такого материала поместили внутрь сосуда, и поставили сверху небольшой по размеру груз $M$.




Где окажется перегородка спустя долгое время? Температура системы — $T$.

(*А. М. Минарский, И. В. Демидов*)

**Ответ:** $h = NkT/Mg$—$L$:

- если $NkT/Mg < L$, то равновесия в «подвешенном состоянии» не достигается и поршень лежит на дне сосуда $h = 0$;
- если $NkT/Mg > 2L$, то равновесия в «подвешенном состоянии» не достигается и поршень прижат к верхней стенке сосуда $h = L$.

**Решение.** Пусть концентрации молекул в верхней части сосуда $n_1$ в нижней $n_2$. Количество молекул,

пролетающих сквозь перегородку в единицу времени, пропорционально концентрации, средней скорости подлёта молекул и вероятности полёта сквозь перегородку $w$, то есть $nvw$. При наступлении равновесия эти количества молекул (пролетающих снизу и сверху) равны. Поскольку температура в обеих частях одинакова, то и средние скорости одинаковы. Поэтому устанавливается ситуация:

$$n_1 w_1 = n_2 w_2. \tag{11.5.1}$$

Давление определяется отражёнными молекулами, поэтому вместо формулы $P = nkT$ мы будем иметь формулу

$$P = nkT(1–w). \tag{11.5.2}$$

Разность сил давления равна силе тяжести груза, поэтому, с учётом (11.5.1) и (11.5.2):

$$F_2–F_1 = (P_2–P_1)S = (n_2–n_1)kTS = Mg. \tag{11.5.3}$$

Если поршень остановится на высоте $h$, то объём нижней части сосуда будет $hS$, а верхней — $(L-h)S$, поэтому полное число молекул:

$$n_2 hS + n_1(L-h)S = N. \tag{11.5.4}$$

Из уравнений (11.5.1) и (11.5.3) можно найти концентрации

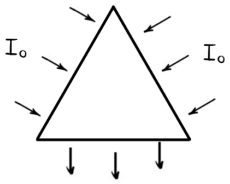
$$n_1 = \frac{Mgw_2}{kTS(w_1-w_2)} = 2\frac{Mg}{kTS},$$
$$n_2 = \frac{Mgw_1}{kTS(w_1-w_2)} = \frac{Mg}{kTS}$$

(мы учли значения вероятностей $w_1 = 2/3$ и $w_2 = 1/3$), подставляя которые в уравнение (11.5.4), найдём высоту $h$:

$$h = \frac{NkT}{Mg} - L.$$

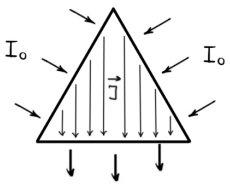
Это и есть ответ, который теперь нужно проанализировать. Если (при достаточно малом числе молекул $N$ или их температуре T или большой массе груза M) это число меньше нуля, то значит, равновесия в «подвешенном состоянии» не достигается и поршень лежит на дне сосуда $h = 0$. Если (при достаточно большом числе молекул $N$ или их температуре T или малой массе груза M), это число больше $L$, то равновесия в «подвешенном состоянии» не достигается и поршень прижат к верхней стенке сосуда $h = L$.
**Примечание:** строго говоря, перегородок, с разной вероятностью пропускающих одинаковые молекулы в противоположных направлениях, не существует. Это противоречит 2-му началу термодинамики и принципу не-убывания энтропии. Поэтому задача является чисто теоретической и экспериментально не воспроизводима.

**11.6.** В пластину в форме треугольной призмы толщиной $h = 1$ мм, основание которой — равносторонний треугольник со стороной 10 см, ток подаётся равномерно через две боковые грани (на каждую по $I_0 = 1$ А), а отводится через третью, тоже равномерно по всей её длине. Через треугольные основания призмы ток не проходит. Какая тепловая мощность выделяется в пластине, если удельное сопротивление её материала равно 1 Ом · м? *(А. В. Савельев, С. Н. Сашов)*




**Ответ:** $P \approx 1732$ Вт.

**Решение.** Для картины токов, изображённой на рисунке, картина внутреннего тока будет однородной: $j(x,y,z) = \text{const}$ (на рисунке отмечена с учётом направления). Плотность тока, по определению, есть отношение силы тока к поперечной площади, через которую ток течёт: $j = 2I/\sigma = 2I/ah$.




Если через какой-то проводящий участок длины $L$ и поперечной площади $S$ течёт ток $I$, то согласно закону Джоуля-Ленца в нём выделяется мощность

$$P = I^2R = (jS)^2\rho L/S = j^2\rho SL = j^2\rho V.$$

Итак, $j^2\rho$ есть мощность тепловыделения на единицу объёма вещества. Для картины токов, изображённой на рисунке, общая мощность тепловыделения будет

$$P = j^2\rho V = \left(\frac{2I}{ha}\right)^2 \cdot \rho \cdot hS = \frac{4I^2}{(ha)^2} \cdot \rho \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}I^2\rho}{h}.$$

Если подставить $I = I_0$, то получим $P = 1000\sqrt{3} \approx 1732$ Вт.