Международная физическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2020–2021 учебный год. Отборочный этап

Решения задач для 8 класса

8.1. В спиртовом термометре Реомюра интервал между температурами таяния льда 0°Re = = 0°C и кипения воды 80°Re = 100°C разделен не на 100 частей, как в термометре Цельсия, а на 80 частей.

Какова нормальная температура 36,6° человеческого тела в °Re? Ответ округлите до десятых.

(*Фольклор*)

Ответ: 29,3°Re.

Решение. Поскольку 80 градусов по шкале Реомюра соответствуют 100 градусам по шкале Цельсия, то один градус Реомюра соответствует 100/80 = 1,25 градуса Цельсия. Осталось поделить 36,6°C на 1,25:

$$\frac{36{,}6}{1{,}25} = 29{,}28 \approx 29{,}3^\circ\text{Re}.$$

8.2. Автомобиль имеет КПД = 0,2 и расходует 8 л бензина плотностью 700 кг/м^3 и удельной теплотой сгорания $4\cdot10^7$ Дж/кг на 100 км пути. Известно, что сила сопротивления для автомобиля растет прямо пропорционально скорости: $F = bv$, где $b = 16\ \frac{\text{Н}}{\text{м/с}}$.

Найдите скорость, при которой рассчитаны эти характеристики автомобиля. Ответ дайте в км/ч, округлив до целого числа. (*А. М. Минарский*)

Ответ: 101 км/ч.

Решение. Полезная работа автомобиля — это преодоление силы сопротивления $A = FL$. По условию $F = bv$, поэтому $A = bvL$. По определению КПД: $A = \eta Q = \eta mq = \eta V\rho q$. Приравнивая, получаем $bvL = \eta V\rho q$, откуда в СИ:

$$v = \frac{\eta V\rho q}{bL} = \frac{0{,}2\cdot 8\cdot 10^{-3}\cdot 700\cdot 4\cdot 10^7}{16\cdot 105} = 28\ \frac{\text{м}}{\text{с}} = 100{,}8\ \frac{\text{км}}{\text{ч}} \approx 103\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}.$$

8.3. Метеорит массой 22,5 миллиарда тонн со скоростью 20 км/с попадает в океан начальной температуры 20°C. Площадь океана 350 млн км^2, средняя глубина океана 3 км, удельная теплоемкость воды 4200 $\frac{\text{Дж}}{\text{кг·град}}$, удельная теплота парообразования воды $3{,}3\cdot10^6$ Дж/кг.

[1] На сколько «миллиградусов» (0,001°C) нагреется океан, если все тепло распределится равномерно?

[2] Какая максимальная масса (в миллиардах тонн) воды могла бы испариться из-за такого метеорита при неравномерном нагреве?

В обоих вопросах ответ округлите до целого числа. (*А. М. Минарский*)

Ответ: [1] 1 миллиградус; **[2]** любое число от 1210 до 1364 млрд. тонн.

Решение пункта [1]. Если тепло распределится по океану равномерно, то кинетическая энергия метеорита перейдёт в нагрев:

$$\frac{mv^2}{2} = cM\Delta T = c\rho hS\Delta T.$$

Подсчёт (в СИ) даёт (с учётом округления):

$$\Delta T = \frac{mv^2}{2c\rho hs} = \frac{22{,}5\cdot10^{12}\cdot(2\cdot10^4)^2}{2\cdot4200\cdot1000\cdot(3\cdot10^3)\cdot350\cdot10^6\cdot10^6} \approx 10^{-3}{}^\circ\text{C} = 1\ \text{миллиградус}.$$

Решение пункта [2]. При максимально неравномерном нагреве вся кинетическая энергия может

пойти на выкипание части океана массы M_1:

$$\frac{mv^2}{2} = cM_1\Delta T + q \cdot M_1.$$

Оценка снизу дает примерно $M_1 = 1210$ млрд. тонн, если считать, что массу M_1 надо ещё нагревать на $\Delta T = 100°\text{C}$. Оценка сверху же даёт $M_1 = 1364$ млрд. тонн, если вообще не учитывать нагрев части океана ($\Delta T = 0°\text{C}$), а только его выкипание.

Примечание. Таким образом, любой ответ в пункте **[2]** в диапазоне от 1210 до 1364 млрд. тонн засчитывается как верный.

8.4. В теплоизолированном сосуде в воде плавает кусок льда массой $m = 0{,}1$ кг, в который вмерзла свинцовая дробинка. Когда к льдинке подвели теплоту 20 кДж, она начала тонуть. Плотность льда 0,9 г/см^3, теплота плавления льда 340 кДж/кг, плотность свинца 11,3 г/см^3. Какова масса дробинки? Ответ дайте в граммах, округлив до целого числа. (*Фольклор*)

Ответ: 5 граммов.

Решение. В равновесии «вода — лёд» температура системы в точности $T = 0°\text{C}$, поэтому подведённое тепло идёт на плавление льда $Q = m_1 q$. Пусть масса дробинки m, начальная масса льдинки M. После того, как масса m_1 растаяла, средняя плотность стала равна плотности воды (это и означает, что система стала целиком погружаться в воду, то есть «начала тонуть»).

Объем льдинки стал

$$V_\text{л} = \frac{M - m_1}{\rho_\text{л}},$$

объем дробинки $V_\text{д} = m/\rho_\text{д}$, откуда

$$(V_\text{л} + V_\text{д}) \cdot \rho_\text{в} = M - m_1 + m \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{M - m_1}{\rho_\text{л}} + \frac{m}{\rho_\text{д}}\right) \cdot \rho_\text{в} = M - \frac{Q}{q} + m.$$

Подставив числа, решаем уравнение относительно m и находим после округления ответ $m = 5$ граммов.

8.5. В бассейне плавает лодка с человеком и массивными ядрами одинакового размера. Человек начинает выбрасывать ядра из лодки. Первое ядро упало в воду. Второе упало на край бассейна. Подцепив первое ядро веслом, человек смог достать его из воды в лодку.

Для каждого из 4 интервалов времени укажите, как меняется уровень воды в бассейне от времени (1 = не изменится, 2 = увеличится, 3 = уменьшится):

[1] Уровень после падения первого ядра в воду.

[2] Уровень после падения второго ядра на берег.

[3] Уровень после поднятия первого ядра на борт.

[4] Конечный уровень относительно первоначального. (*А. В. Сокол, А. М. Минарский*)

Ответ: [1] 3 (уменьшится); **[2]** 3 (уменьшится); **[3]** 2 (увеличится); **[4]** 3 (уменьшится).

Решение пункта [1]. Когда первое ядро лежало в лодке, оно (с помощью лодки) плавало, то есть вытесняло объем воды, равный по массе самому ядру, то есть $V_1 = m_\text{я}/\rho_\text{в}$. Когда оно упало в воду, оно стало вытеснять объем, равный собственному: $V_2 = m_\text{я}/\rho_\text{я}$. Поскольку $\rho_\text{я} > \rho_\text{в}$, то $V_\text{я} < V_\text{в}$, то есть ядро стало вытеснять меньше, и уровень *уменьшился.*

Решение пункта [2]. Когда второе ядро упало на край бассейна, оно вообще перестало вытеснять воду, так что уровень тоже *уменьшился.*

Решение пункта [3]. Когда первое ядро подняли на борт, оно стало снова вытеснять воду, равную собственной массе, то есть уровень *увеличился.*

Решение пункта [4]. Поскольку в конечном положении второе ядро лежит на краю бассейна и ничего не вытесняет, конечный уровень воды по сравнению с первоначальным *уменьшится.*

8.6. Два бегуна бегут друг за другом по кругу на спортивной площадке с постоянной скоростью. Каждые 12 минут первый обгоняет второго. Навстречу бегунам бежит пёс Рекс, который каждые 3 минуты встречается со вторым.

Через какой промежуток времени происходят встречи Рекса с первым? Ответ укажите в секундах, округлив до целого числа. (*Фольклор*)

Ответ: 144 секунды.

Решение. Будем измерять скорость бегунов (v_1 и v_2) и собаки (u) в оборотах в минуту. Поскольку первый обгоняет второго на 1 оборот за 12 минут, то

$$v_1 - v_2 = \frac{1}{12}.$$

Поскольку Рекс бежит навстречу второму и делает относительно него оборот за 3 минуты, то их скорость сближения:

$$u + v_2 = \frac{1}{3}.$$

Сложив эти выражения, найдём скорость Рекса относительно первого:

$$u + v_1 = u + v_2 + v_1 - v_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12}.$$

Значит, время, за которое Рекс делает оборот относительно первого и встречает его снова, равно $12/5$ минуты $= 144$ секунды.

8.7. Два одинаковых сообщающихся сосуда, соединенных мягкой трубкой, наполнены водой и установлены на горизонтальном столе. На дно одного из сосудов кладут кубик, кубик полностью покрывается водой. Масса кубика $m = 100$ г, его плотность $\rho = 2{,}5$ г/см^3. Площадь дна каждого сосуда равна 20 см^2.

[1] На сколько изменится давление первого сосуда на стол?

[2] На сколько изменится давление второго сосуда на стол?

Ответы укажите в паскалях, округлив до целого числа.

Примечание: ускорение свободного падения считайте равным $g = 10$ Н/кг.

(*А. В. Сокол, А. М. Минарский*)

Ответ: [1] 100 Па; **[2]** 400 Па или **[1]** 400 Па; **[2]** 100 Па.

Решение пункта [1]. Поскольку плотность кубика больше плотности воды, то он тонет и вытесняет объём равный самому себе:

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{100}{2{,}5} = 40 \text{ см}^3.$$

Поскольку сосуды сообщаются, то уровень в них повысится на одинаковую величину:

$$h = \frac{V}{2s} = \frac{40}{2 \cdot 20} = 1 \text{ см} = 0{,}01 \text{ м}.$$

В одном из сосудов, где нет груза, давление возрастет на

$$\rho_в g h = 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot 10 \frac{\text{Н}}{\text{кг}} \cdot 0{,}01 \text{ м} = 100 \text{ Па}.$$

Решение пункта [2]. Поскольку сосуды соединены мягкой трубкой, то давление груза на дно второго сосуда, никак не влияет на давление первого на стол. Общая сила давления сосудов на дно возросла на силу тяжести положенного груза:

$$F = mg = 0{,}1 \text{ кг} \cdot 10 \frac{\text{Н}}{\text{кг}} = 1 \text{ Н}.$$

Сила давления в сосуде, где нет груза, возросла на $F_1 = \rho_в g h \cdot S = 100$ Па $\cdot\, 0{,}002$ м$^2 = 0{,}2$ Н. Значит, сила давления на стол сосуда с грузом возросла на $F_2 = F - F_1 = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$ Н. А добавочное давление сосуда с грузом будет равно

$$\frac{F_2}{S} = \frac{0{,}8}{0{,}002} = 400 \text{ Па}.$$

Примечание. Так как в задаче не было указано, в каком именно сосуде находится груз, одинаково засчитываются как ответы 100 Па и 400 Па, так и 400 Па и 100 Па.

8.8. В цехе для закалки деталей стоит чан с водой объёмом 100 л при температуре $T_1 = 30°$C. В чан опускают железную заготовку массой 10 кг при температуре 500°C. Через некоторое время часть воды из чана испарилась и температура воды стала равной $T_2 = 34°$C.
Какая масса воды испарилась? Ответ укажите в граммах, округлив до целого числа.
Примечание: удельная теплоёмкость воды 4200 $\frac{\text{Дж}}{\text{кг·град}}$, её удельная теплота парообразования при температуре кипения 2,3 МДж/кг, а удельная теплоёмкость железа 460 $\frac{\text{Дж}}{\text{кг·град}}$. (*А. В. Сокол*)
Ответ: 180 граммов.
Решение. Некоторая масса m воды нагрелась до $T_{\text{кип}} = 100°$C и испарилась, а остальная $(M-m)$ приобрела температуру $T_2 = 34°$C. Тем самым вода забрала тепло

$$cm(T_{\text{кип}} - T_1) + Lm + c(M-m)(T_2 - T_1).$$

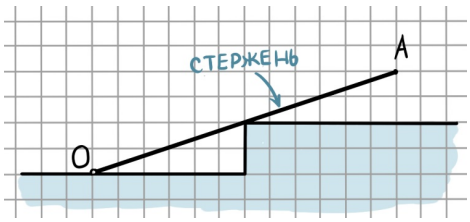
Столько же тепла отдало железо, остывшее до температуры T_2. Пишем уравнение теплового баланса:

$$C_ж m_ж (T_ж - T_2) = cm(T_{\text{кип}} - T_1) + Lm + c(M-m)(T_2 - T_1).$$

Решая это уравнение относительно m, найдём массу испарившейся воды:

$$460 \cdot 10 \cdot (500 - 34) = 4200 \cdot m \cdot (100 - 30) + 2{,}3 \cdot 10^6 \cdot m + 4200(100 - m)(34 - 30),$$
$$2143600 = 294000 \cdot m + 2300000 \cdot m + 1680000 - 16800 \cdot m,$$
$$463600 = 2577200 \cdot m \quad \Rightarrow \quad m \approx 0{,}180 \text{ кг} = 180 \text{ г}.$$

8.9. Массивный однородный стержень массой 20 кг, который закреплён в точке O и может вращаться вокруг неё, лежит, опираясь на ступеньку (см. рисунок с масштабной сеткой с квадратными клетками).



Какую минимальную силу нужно приложить к концу стержня A, чтобы её можно было приподнять? Ответ дайте в Ньютонах, округлив до целого числа.
Примечание: ускорение свободного падения считайте равным $g = 10$ Н/кг. (*И. В. Демидов*)
Ответ: 95 Н.
Решение. На рассматриваемый стержень действуют четыре внешние силы:

- сила тяжести mg (приложенная к середине стержня, т.к. он однородный),
- сила реакции опоры N_1 в месте соприкосновения стержня со ступенькой,
- сила реакции опоры N_2 в месте крепления к шарниру в точке O,
- сила F, которая прикладывается к точке A стержня, чтобы его приподнять.

Будем считать, что стержень чуть-чуть приподнят, поэтому контакт стержня со ступенькой отсутствует и $N_1 = 0$.
Для решения задачи воспользуемся правилом моментов. Поскольку нам неизвестно, как направлена и чему равна сила N_2, лучше всего записать баланс моментов относительно точки O. Тогда

получим

$$mgl_1 = Fl_2 \quad \Rightarrow \quad F = mg\frac{l_1}{l_2}, \tag{8.9.1}$$

где l_1 и l_2 — плечи сил mg и F. Мы знаем, что сила тяжести mg приложена к середине стержня и направлена вертикально вниз, поэтому плечо этой силы фиксировано и равно расстоянию от точки O до линии действия силы, т.е. до ступеньки. Из рисунка получаем, что l_1 равно 6 клеточкам, и если в одной клеточке x метров, то получаем, что $l_1 = 6x$ м.

Но мы не знаем как направлена сила F (знаем лишь ее точку приложения), следовательно не можем точно сказать, чему равно плечо l_2. Меняя направление силы F, мы будем получать различные l_2, и, согласно (8.9.1) различные значения модуля F. При этом, чем больше плечо l_2, тем меньше будет F. Нетрудно сообразить, что максимальное плечо l_2 достигается в том случае, когда сила F направлена перпендикулярно стержню. В данном случае, l_2 будет равно длине стержня. По теореме Пифагора найдем, что длина стержня равна $L = 4\sqrt{10}x$ м. Значит

$$F_{\min} = mg\frac{l_1}{L} = 20 \cdot 10\frac{6}{4\sqrt{10}} = 94{,}87 \text{ Н} \approx 95 \text{ Н}.$$

8.10. Три друга: Винни Пух, Пятачок и ослик Иа-Иа решили отправиться в поход от домика Совы до Высокого-Превысокого дуба. Каждый из них идёт с постоянной скоростью. Иа-Иа ходит медленно, поэтому он решил отправится заранее и дошёл до дуба ровно за 3 часа. Когда ослик прошёл ровно одну треть пути, его обогнал Пятачок, а ещё через полчаса его обогнал Винни-Пух. Известно, что Винни-Пух и Пятачок стартовали одновременно, Пятачок всё время бежал, поэтому его скорость была в 1,5 раза больше скорости Винни-Пуха.

[1] Во сколько раз Пятачок бежал быстрее, чем шёл Иа-Иа?

[2] Сколько времени (в часах) Винни-Пух потратил на дорогу?

[3] Сколько времени (в часах) Пятачку пришлось ждать ослика под Высоким-Превысоким дубом?

Все ответы дайте с точностью до десятых. (*А. М. Минарский, Н. А. Богословский*)

Ответ: [1] в 2,5 раза; **[2]** 1,8 часа; **[3]** 1,2 часа.

Решение пункта [1]. Для удобства пронумеруем Пятачка, Винни-Пуха и ослика Иа в соответствии с их скоростями. Пятачку, как самому быстрому, присвоим номер 1, Винни-Пуху — номер 2, а ослику, как самому медленному — номер 3.

Давайте запишем равенство путей, который прошли Пятачок и Иа к моменту встречи. Получим

$$v_3 t_{\text{вст}} = v_1(t_{\text{вст}} - \tau),$$

где $t_{\text{вст}}$ — время движения ослика до встречи с Пятачком, τ — время, через которое начнет двигаться Пятачок, после того, как ослик направился к дубу.

После того как Пятачок догнал ослика, через время $\Delta t = 0{,}5$ ч, его догонит Винни-Пух (который стартовал одновременно с Пятачком). Запишем равенство путей, которые прошли Винни-Пух и Иа к моменту их встречи:

$$v_3(t_{\text{вст}} + \Delta t) = v_2(t_{\text{вст}} - \tau + \Delta t).$$

Удобно время измерять в часах, а скорости — в км/ч. Из условия задачи нам известно, что ослик Иа дойдет до дуба за 3 часа, но Пятачок его догнал, когда он прошёл лишь треть пути. Поскольку ослик движется равномерно, то это означает, что Пятачок догонит ослика через 1 час после того как ослик начал идти к дубу. Таким образом, $t_{\text{вст}} = 1$ ч. Учитывая, что скорость Пятачка в 1,5

раза больше скорости Винни-Пуха, т.е. $v_1 = 1{,}5v_2$, мы получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} v_3 = v_1(1-\tau), \\ 1{,}5v_3 = \dfrac{v_1}{1{,}5}(1{,}5-\tau), \end{cases} \tag{8.10.1}$$

Разделив первое уравнение на второе, скорости сокращаются, и мы получаем уравнение на τ: $(1{,}5)^2(1-\tau) = (1{,}5-\tau)$, откуда находим $\tau = 0{,}6$ часа (или 36 минут). Т.е. Пятачок и Винни-Пух начали свое движение, спустя 36 минут после того, как ослик направился к дубу.
Теперь мы можем подставить найденное $\tau = 0{,}6$ ч в любое из уравнений (8.10.1) и найти отношение скорости Пятачка к скорости Иа. Например, поставив в первое уравнение, найдем

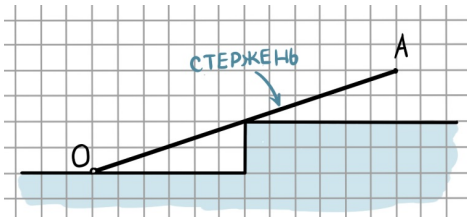
$$\frac{v_1}{v_3} = \frac{1}{1-\tau} = 2.5$$

т.е. Пятачок двигался к дубу в 2,5 раза быстрее, чем ослик Иа.
Решение пункта [2]. Поскольку скорость Винни-Пуха в 1,5 раза меньше скорости Пятачка ($v_1 = 1{,}5v_2$), то, подставив сюда v_2, мы найдём $v_2 = \frac{5}{3}v_3$. Значит, если Ослик дошел до дуба за 3 часа, Винни-Пух потратит в 5/3 раз меньшее время, т.е. 1,8 часа.
Решение пункта [3]. Аналогично, если Пятачок движется в 2,5 раза быстрее ослика, то и дойдет он до дуба в 2,5 раза быстрее, т.е. за 1,2 часа. Посчитаем, сколько времени он будет ждать ослика у дуба. Пятачок начал свое движение спустя $\tau = 0{,}6$ часа после того как ослик пошел к дубу, значит, когда Пятачок придёт к дубу, пройдет 1,8 часа, и ослику останется идти до дуба 1,2 часа (т.к. суммарно время его движения равно 3 часам). Значит Пятачок будет ждать ослика 1,2 часа.

Международная физическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2020–2021 учебный год. Отборочный этап

Решения задач для 9 класса

9.1. Массивный однородный стержень массой 20 кг, который закреплён в точке O и может вращаться вокруг неё, лежит, опираясь на ступеньку (см. рисунок с масштабной сеткой с квадратными клетками).



Какую минимальную силу нужно приложить к концу стержня A, чтобы её можно было приподнять? Ответ дайте в Ньютонах, округлив до целого числа.

Примечание: ускорение свободного падения считайте равным $g = 10$ Н/кг. (*И. В. Демидов*)

Ответ: 95 Н.

Решение. На рассматриваемый стержень действуют четыре внешние силы:

- сила тяжести mg (приложенная к середине стержня, т.к. он однородный),
- сила реакции опоры N_1 в месте соприкосновения стержня со ступенькой,
- сила реакции опоры N_2 в месте крепления к шарниру в точке O,
- сила F, которая прикладывается к точке A стержня, чтобы его приподнять.

Будем считать, что стержень чуть-чуть приподнят, поэтому контакт стержня со ступенькой отсутствует и $N_1 = 0$.

Для решения задачи воспользуемся правилом моментов. Поскольку нам неизвестно, как направлена и чему равна сила N_2, лучше всего записать баланс моментов относительно точки O. Тогда получим

$$mgl_1 = Fl_2 \quad \Rightarrow \quad F = mg\frac{l_1}{l_2}, \tag{9.1.1}$$

где l_1 и l_2 — плечи сил mg и F. Мы знаем, что сила тяжести mg приложена к середине стержня и направлена вертикально вниз, поэтому плечо этой силы фиксировано и равно расстоянию от точки O до линии действия силы, т.е. до ступеньки. Из рисунка получаем, что l_1 равно 6 клеточкам, и если в одной клеточке x метров, то получаем, что $l_1 = 6x$ м.

Но мы не знаем как направлена сила F (знаем лишь ее точку приложения), следовательно не можем точно сказать, чему равно плечо l_2. Меняя направление силы F, мы будем получать различные l_2, и, согласно (9.1.1) различные значения модуля F. При этом, чем больше плечо l_2, тем меньше будет F. Нетрудно сообразить, что максимальное плечо l_2 достигается в том случае, когда сила F направлена перпендикулярно стержню. В данном случае, l_2 будет равно длине стержня. По теореме Пифагора найдем, что длина стержня равна $L = 4\sqrt{10}x$ м. Значит

$$F_{\min} = mg\frac{l_1}{L} = 20 \cdot 10\frac{6}{4\sqrt{10}} = 94{,}87 \text{ Н} \approx 95 \text{ Н}.$$

9.2. Имеется 2020 одинаковых пронумерованных шариков, температуры которых изменяются в соответствии с арифметической прогрессией: $T_1 = T$, $T_2 = 2T$, $T_3 = 3T$, …, $T_{2020} = 2020T$ (величина T измеряется в цельсиях). Все шарики поместили в теплоизолированный сосуд с пренебрежимо малой теплоемкостью.

Какая температура (в градусах) будет у шариков через достаточно большой промежуток времени, если известно, что если бы в сосуде были только два шарика с номерами 1000 и 2000, то они будут иметь установившуюся температуру 1800°C? Ответ округлите до целого числа. (*И. В. Демидов*)

Ответ: 1213°C.

Решение. Для решения задачи воспользуемся уравнением теплового баланса, который запишем

в виде

$$Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_{2020} = 0.$$

Как известно, при такой записи уравнения теплового баланса в каждом слагаемом нужно вычитать из конечной температуры начальную. Обозначив конечную температуру всей системы как ϑ, для любого i-го шарика мы можем записать $Q_i = cm(\vartheta - T_i)$. Тогда, сокращая теплоемкость и массу шарика, мы получим

$$2020\vartheta - (T_1 + T_2 + \cdots + T_{2020}) = 0. \tag{9.2.1}$$

Давайте подробнее распишем, чему равно выражение в круглых скобках:

$$T_1 + T_2 + \cdots + T_{2020} = (1 + 2 + \cdots + 2020)\, t = \frac{2020(1+2020)}{2} t^*. \tag{9.2.2}$$

Подставляя (9.2.2) в (9.2.1), мы получим

$$\vartheta = \frac{2021}{2} t.$$

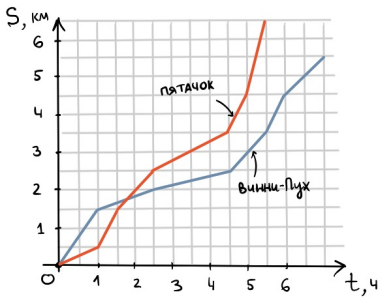
Чтобы найти t воспользуемся тем, что если бы в сосуде были шарики с номерами 1000 и 2000, то установившаяся температура будет равна $\vartheta = 1800°\text{C}$. Записав для этой ситуации уравнение теплового баланса, получим

$$cm(\vartheta - T_{1000}) + cm(\vartheta - T_{2000}) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\vartheta = T_{1000} + T_{2000}$$

или $2\vartheta = 3000t$, отсюда найдем $t = 18/15$. Теперь осталось подставить величину t в формулу (9.2.2):

$$\vartheta = \frac{2021 \cdot 18}{2 \cdot 15} = 1212{,}6°\text{C} \approx 1213°\text{C}.$$

9.3. На рисунке представлен график пройденного Винни-Пухом и Пятачком пути от времени.



[1] Кто из них смог в некоторый момент времени достичь наибольшей средней скорости за прошедшую часть времени прогулки? Если Винни-Пух, то напишите «В», иначе укажите «П».

[2] Чему равно это максимальное значение средней скорости? Ответ дайте в км/ч, округлив до десятых. (*И. В. Демидов*)

Ответ: [1] В; **[2]** 1,5 км/ч.

Решение. Средняя скорость равна отношению длины пути, пройденного телом, ко времени, за которое этот путь был пройден. Т.е. чтобы посчитать среднюю скорость Винни-Пуха или Пятачка в какой-нибудь момент времени прогулки t_A, нужно взять на графике точку, соответствующую этому времени, и разделить пройденный путь S_A на время t_A. Можно заметить, что отношение S_A/t_A — это есть угловой коэффициент наклона прямой, проходящей через рассматриваемую точку графика и начала координат. Чем больше S_A/t_A, тем больше средняя скорость, и тем больше угловой коэффициент прямой. Значит, чтобы найти максимальную среднюю скорость, нужно найти такую прямую, проходящую через начало координат, которая будет касаться графика $S(t)$ сверху. Угловой коэффициент этой прямой численно будет равен максимальной средней скоро-

* В данном равенстве было использовано правило вычисления суммы арифметической прогрессии: число членов в этой прогрессии равно 2020, а сумма первого и последнего члена прогрессии равна $2020 + 1$.

сти. Проводя такие прямые для графиков Пятачка и Винни-Пуха видно, что Винни-Пух достиг большеё средней скорости, причем ее значение равно скорости Пуха в первый час прогулки, т.е. 1,5 км/ч.

9.4. На тележке, движущейся по инерции, находится ленивый Незнайка и два одинаковых мешка яблок. Тележка едет относительно медленно, со скоростью 3 м/с. Незнайке было лень толкать тележку, поэтому он подумал и решил, что может выкинуть часть яблок, тем самым уменьшив общую массу тележки (все равно он так много яблок не съест). Тогда, решил он, по закону сохранения импульса, при уменьшении массы тележки ее скорость должна возрасти. Поэтому он взял мешок яблок, и разом выкинул их в направлении, перпендикулярном движению тележки.

За какое время (в секундах) Незнайка доедет до конечного пункта, если ему осталось ехать 12 км? Ответ округлите до целого числа.

Примечание: Суммарная масса Незнайки и тележки равна 25 кг, а масса одного мешка яблок равна 5 кг. Трения нет. (*И. В. Демидов*)

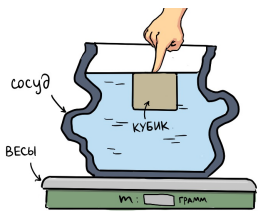
Ответ: 4000 секунд.

Решение. На рассматриваемую систему, состоящую из тележки, Незнайки и яблок, действуют сила тяжести и сила реакции опоры со стороны рельс. Но в направлении движения тележки эти силы не действуют, следовательно, в направлении движения тележки импульс системы будет сохраняться. Обозначим общую массу тележки с одним мешком яблок и Незнайкой за M, массу мешка яблок, который Незнайка выкинет — за m, начальную скорость тележки — как v. Тогда, по закону сохранения импульса (записанного в проекции на направление движения тележки), имеем

$$(M+m)v = Mu + mv, \tag{9.4.1}$$

где u — новая скорость тележки. Самое важное здесь то, что у мешка яблок, который выкинул Незнайка перпендикулярно движению тележки, проекция скорости на направление движения тележки равна самой скорости тележки v (т.к. яблоки ехали вместе с тележкой, а когда Незнайка их выкинул то он не изменил их составляющей скорости вдоль тележки). Тогда из (9.4.1) нетрудно видеть, что $u = v$. Таким образом, план Незнайки провалился: он уменьшил массу тележки (и лишился мешка яблок), но при этом не изменил ее скорости движения. Время движения тележки составит $\tau = S/v = 4000$ секунд.

9.5. На весах стоит сосуд произвольной формы с водой, в которой плавает деревянный кубик. Плотность воды $\rho_в = 1$ г/см^3, дерева $\rho_д = 0{,}7$ г/см^3, сторона кубика $a = 10$ см.



На сколько изменятся показания весов, если теперь надавить на кубик так, чтобы он полностью скрылся под водой (не погружая при этом палец в воду)? Ответ дайте в килограммах, округлив до десятых. (*И. В. Демидов*)

Ответ: 0,3 кг.

Решение. При погружении кубика уровень воды в сосуде поднимается, и поэтому гидростатическое давление на стенки сосуда и дно — увеличивается. Но при таком подходе к задаче возникает непреодолимая трудность: найти как изменится уровень воды в сосуде, а также изменение силы давления, действующей на сосуд, невозможно, т.к. сосуд имеет неизвестную произвольную форму. Поэтому нужно подойти к задаче иначе.

Когда кубик погружен в воду, на него действует выталкивающая сила Архимеда $F_A = \rho_в g V_{погр}$ со стороны воды (где $\rho_в$ — плотность воды, $V_{погр}$ — погруженный объем). Но тогда, по третьему закону Ньютона, на воду со стороны кубика действует сила F, которая по модулю равна силе Архимеда, но уже направлена вниз. Далее это сила передается сосуду. Т.е. при добавлении кубика в воду, на стенки сосуда будет помимо веса воды, действовать еще сила $F = \rho_в g V_{погр}$ (далее эта

сила передается от сосуда к весам). На самом деле, эта сила F и учитывает тот самый прирост гидростатического давления, о котором шла речь в начале.

При дополнительном погружении кубика, масса воды и масса сосуда не изменяются, поэтому изменение показания весов будет вызвано лишь изменением силы F. Значит, изменение показания весов, это есть $\Delta F = \rho_{\text{в}} g \Delta V_{\text{погр}}$, где $\Delta V_{\text{погр}} = V_{\text{погр}_2} - V_{\text{погр}_1}$. Конечный погруженный объем просто равен объему кубика $V_{\text{погр}_2} = a^3$, а начальный погруженный объем определяется из баланса сил: $\rho_{\text{д}} a^3 g = \rho_{\text{в}} V_{\text{погр}_1} g$. Таким образом, мы получаем

$$\Delta F = \rho_{\text{в}} g a^3 \left(1 - \frac{\rho_{\text{д}}}{\rho_{\text{в}}}\right) = g a^3 \left(\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{д}}\right) \quad \Rightarrow \quad \Delta F = 10 \cdot 0{,}1^3 \left(1000 - 700\right) = 3 \text{ Н}.$$

Чтобы перейти от силы к массе, нужно разделить на g, тогда найдем $\Delta m = a^3 \left(\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{д}}\right) = 0{,}3$ кг.

9.6. Муля пошёл в поход и взял с собой палатку и спальный мешок. Вечером было тепло и Муля заснул на улице. Ночью стало холодать и при температуре воздуха $T_1 = 18°\text{C}$ Муля начал замерзать и перебрался в пустую палатку и лёг там тоже без спальника. Когда температура воздуха на улице опустилась до $T_2 = 14°\text{C}$ он стал замерзать в палатке. Тогда он вылез из палатки, залез в спальный мешок и стал спать дальше. Когда температура воздуха опустилась до $T_3 = 9°\text{C}$ Муля опять начал замерзать. Тогда он в спальном мешке перебрался обратно в палатку.

[1] При какой температуре воздуха T_4 (в градусах) он начнет замерзать в спальном мешке в палатке? Ответ округлите до целого числа.

[2] Сколько минимум человек должны спать в такой палатке в таких спальных мешках, чтобы они не замерзали при температуре на улице, равной $T_0 = 0°$?

Считайте, что человек во время сна выделяет тепло с некоторой постоянной скоростью, причем эта скорость не зависит от температуры окружающей среды.

(*А. М. Минарский, Н. А. Богословский*)

Ответ: [1] $T_4 = 5°\text{C}$; **[2]** 3 человека.

Решение пункта [1]. Исходя из условия задачи мы знаем, что Муля без спального мешка замерзает при температуре $T_1 = 18°\text{C}$. Значит, если Муля переберется в палатку, то чтобы он в ней замерз, температура в палатке должна опустится до значения T_1. Муля «работает» как батарея отопления, и каждую секунду выделяет некоторое количество теплоты. Давайте его тепловую мощность обозначим как P. С другой стороны, тепло уходит из палатки через ее стенки, и согласно закону Ньютона-Рихмана, мощность тепловых потерь пропорциональна разности температур в палатке и на улице, т.е. $P_{\text{потери}} = \alpha(T_1 - T_2)$, где T_2 — температура воздуха вне палатки, α — коэффициент пропорциональности, зависящий от площади поверхности палатки, ее материала. Температура на улице изменяется достаточно медленно, поэтому будем считать, что температура внутри палатки успевает установиться так, что количество теплоты, которое выделяет Муля в единицу времени, равно количеству теплоты, которое теряется через стенки палатки в единицу времени, т.е.

$$P = \alpha(T_1 - T_2). \tag{9.6.1}$$

Далее Муля надевает спальный мешок, и теперь он замерзает, если температура окружающего воздуха опускается до значения $T_3 = 9°\text{C}$. Значит, если он лежит в палатке, то чтобы он замерз в спальном мешке, температура воздуха в палатке должна опустится до значения T_3. Тогда в этом случае мы можем записать

$$P = \alpha(T_3 - T_4), \tag{9.6.2}$$

где T_4 — искомая температура воздуха вне палатки. Сравнивая (9.6.1) и (9.6.2), мы получаем $T_1 - T_2 = T_3 - T_4$, отсюда $T_4 = T_3 - (T_1 - T_2) = 5°\text{C}$.

Решение пункта [2]. Посмотрим теперь, сколько человек должно спать в палатке в таких же спальных мешках, чтобы не замерзать в ней при температуре воздуха вне палатки $T_0 = 0°\text{C}$.

Обозначим число людей как n. Тогда, их общая тепловая мощность равна nP. Приравнивая теперь эту тепловую мощность к мощности потерь через стенки палатки, мы получим

$$nP = \alpha(T_3 - T_0).$$

Мы можем в этом уравнении отношение P/α заменить на $T_3 - T_4$ из (9.6.2) (или же $T_1 - T_2$ из (9.6.1)). Тогда найдем

$$n = \frac{T_3 - T_0}{T_3 - T_4} = 2{,}25.$$

Таким образом, в палатке должно быть минимум 3 человека.

9.7. Обозначим через M массу Луны, R — радиус Луны, $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{кг}^2}$ — гравитационную постоянную. По какой формуле можно оценить давление в центре Луны?

А: $p \approx G/MR^2$; **Б:** $p \approx R/GM$; **В:** $p \approx GM^2/R^4$; **Г:** $p \approx GM/R^2$; **Д:** $p \approx GMR^2$.

(*И. В. Демидов*)

Ответ: В.

Решение. Данную задачу можно решить, используя метод размерностей. Действительно, если у нас имеется какая-то физическая формула, то размерность выражений по обе стороны равенства в этой формуле, должна быть одинаковой. Рассмотрим, например, формулу $S = vt$. Слева стоит длина пути, которая измеряется в метрах, а справа — произведение скорости на время, что по размерности равно $\text{м} \cdot \text{с}/\text{с} = \text{м}$, т.е. снова метры. Это также означает, что мы не можем записать $S = v/t$ или $S = t/v$, т.к. у таких формул размерности слева и справа уже будут не совпадать.

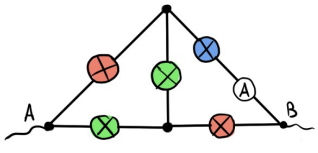
Давление имеет размерность $\text{Па} = H/\text{м}^2$. Следовательно, нам нужно из трех величин M [кг], R [м] и G [$\text{Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2$] составить такую комбинацию, которая дает $H/\text{м}^2$. Нетрудно видеть, что правильная комбинация имеет вид GM^2/R^4.

Другое решение. Другой способ получить данную формулу — это через определение давления как отношения силы к площади, на которую эта сила действует. Давайте мысленно разобьем Луну на две половинки. Эти половинки притягиваются друг к другу за счет гравитационной силы и контактируют по площади $\pi R^2 \sim R^2$. Согласно закону всемирного тяготения, сила притяжения между двумя телами одинаковой массы M, находящихся на расстоянии друг от друга R, равна $F = GM^2/R^2$. В нашем случае данную формулу использовать не совсем корректно, т.к. она годится лишь для расчета притяжения материальных точек или же шариков, чем не являются наши половинки. Но для оценки, мы можем использовать эту формулу, подставив сюда массы половинок $M/2 \sim M$, и считая, что центры масс этих половинок находятся друг от друга на расстоянии порядка радиуса Луны R. Разделив силу на площадь, мы получаем следующую оценку для давления: $p \sim GM^2/R^4$.

Отметим, что эта формула дает лишь оценку давления (довольно грубую), которое нельзя считать в точности равным давлению в центре Луны.

Примечание. Метод размерностей и метод оценок очень полезны в физике. Пользуясь здравыми соображениями, можно получать различные функциональные зависимости или же оценки самых разных физических явлений. Почитать об этих методах можно, например, в журнале Квант: «Метод размерностей помогает решать задачи» (Брук Ю., Стасенко А.) и «Задачи-оценки» (Меледин Г.).

9.8. Незнайка собрал небольшую гирлянду, как показано на рисунке ниже. У красной лампочки сопротивление в 2 раза больше, чем у зелёной, а у синей — в 2 раза больше, чем у красной. Когда схему подключили к источнику постоянного напряжения 120 В, то идеальный амперметр показал 0,1 А. Незнайка пошёл вешать гирлянду на свою дверь, и случайно подключил её к другому источнику напряжения, в результате все красные лам-



почки перегорели и амперметр стал показывать в 2 раза большее значение, чем раньше.

[1] Чему равно сопротивление зелёной лампочки (в Ом)?

[2] Чему равно новое значение напряжения (в вольтах), которое Незнайка подал на схему?

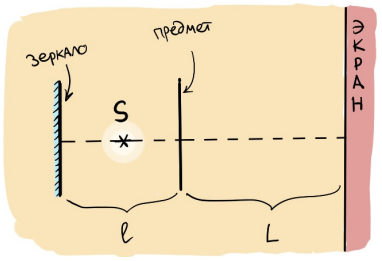
Оба ответа округлите до целого числа. (*И. В. Демидов*)

Ответ: [1] 200 Ом; **[2]** 240 В.

Решение пункта [1]. Схема, которую собрал Незнайка, представляет собой мостовую схему, которую мы нарисовали ниже в более привычном виде. При этом мост сбалансирован, т.е. отношение сопротивлений левой пары лампочек (верхней на нижнюю), такое же как у правой пары. Таким образом, ток через зеленую лампочку в центре не течет и она не будет гореть. Тогда мы легко можем найти сопротивление зеленой лампочки. Для этого рассмотрим верхнюю ветвь цепи AB. Напряжение между точками A и B равно $U_1 = 120$ В, а амперметр показывает $I_1 = 0{,}1$ А. Тогда по закону Ома получим $U_1 = I_1(R_к + R_с) = 6I_1R_з$, отсюда $R_з = 200$ Ом.

Решение пункта [2]. Далее Незнайка на цепь подает новое напряжение U_2 и красные лампочки перегорают. Тогда мостовая схема «превращается» в три последовательно соединенных резистора. По закону Ома получим $U_2 = I_2(2R_з+R_с) = 6I_2R_з$. Так как амперметр теперь показывает значение 0,2 А, мы получаем $U_2 = 240$ В.

9.9. Точечный источник света S находится посередине между непрозрачным диском радиуса $R = 10/\sqrt{\pi}$ см и плоским зеркалом в форме круга того же радиуса (см. рисунок).



[1] Найдите площадь полной тени на экране (в см^2), если расстояние от диска до экрана $L = 15$ см и расстояние от диска до зеркала $l = 5$ см.

[2] Найдите площадь области на экране (в см^2), где видно изображение источника в зеркале, но сам источник не видно.

Оба ответа округлите до целого числа.

Примечание: диск и зеркало параллельны экрану, а их центры лежат на одном перпендикуляре к зеркалу (на рисунке обозначен пунктиром). (*И. В. Демидов*)

Ответ: [1] 900 см^2; **[2]** 4000 см^2.

Решение пункта [1]. Если бы зеркала не было, то задача решалась бы очень просто. Зеркало усложняет задачу тем, что лучи света, идущие от точечного источника света S к зеркалу, отражаются от него и снова направляются к предмету и экрану, тем самым уменьшая область тени на экране.

Давайте для начала найдем изображение S' точки S в зеркале и область его видимости. Чтобы найти изображение точки S, нужно эту точку симметрично отразить относительно плоскости зеркала, таким образом, изображение будет находится на расстоянии $d = 2{,}5$ см от зеркала. А чтобы найти область видимости, необходимо построить два луча, которые исходят из изображения S' и проходят через края зеркала (на рисунке изображены пунктиром). Между этими лучами будут находится все отраженные лучи от зеркала (которые испустил источник S). Если мы выйдем за пределы области видимости, то изображение S' будет не видно.

Чтобы найти область полной тени на экране, построим из точки S два луча SA и SB, проходящие через края диска, и аналогичное построение сделаем для точки S' (лучи $S'C$ и $S'F$). Понятно, что если мы находимся между точками C и D, то мы не видим ни источник света S, ни его изображение в зеркале (они закрыты предметом). В силу того, что источник света и его изображение находятся на одной прямой с центром диска (который параллелен экрану), то область тени на экране есть круг, диаметр которого равен длине отрезка CD. Из подобия треугольников SCD и $S'CD$ получаем, что отрезок CD во столько раз больше диаметра диска, во сколько раз расстояние

от S' до экрана больше расстояния от S' до диска. Таким образом, получаем, что

$$CD = \frac{(2R)\cdot(L+l+d)}{l+d} = \frac{60}{\sqrt{\pi}} \text{ см.}$$

Значит, площадь тени на экране равна $S_1 = \pi\cdot(CD)^2/4 = 900$ см^2.

Решение пункта [2]. Найдем теперь площадь области на экране, где видно изображение источника в зеркале, но не видно сам источник. Эти области находятся между точками A и C, и между D и B. Действительно, если рассмотреть любую точку в этих областях, то здесь можно соединить прямой эту точку с изображением S', но нельзя соединить с S. Из симметрии задачи следует, что данные области образуют кольцо. Чтобы найти площадь этого кольца, мы из большего круга, диаметром AB вычтем площадь тени (круг с диаметром CD), получим

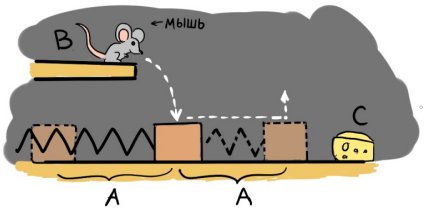
$$S_2 = \pi\frac{(AB)^2-(CD)^2}{4}.$$

Величину отрезка AB можно получить из подобия треугольников SAB и SEF, т.е.

$$AB = \frac{(2R)(L+l/2)}{l/2} = \frac{140}{\sqrt{\pi}} \text{ см.}$$

Тогда получаем $S_2 = 4000$ см^2.

9.10. Мышке нужно перебраться с выступа B к сыру C, однако внизу ей мешает кубик на пружинке, который совершает гармонические колебания без трения с амплитудой A. Мышка разогналась и прыгнула с выступа на кубик, попав на него, когда он проходил своё положение равновесия. При этом в момент падения горизонтальная проекция скорости мышки была такой же, как и у кубика. Затем, когда кубик достиг своего крайнего положения, она слегка подпрыгнула вертикально вверх и приземлилась уже на пол, продолжив путь к сыру.



[1] Как изменилась полная механическая энергия пружины и кубика (относительно исходного состояния, когда мышка была на выступе), когда мышка приземлилась на кубик и только начинает на нём «ехать»?

[2] Как изменилась полная механическая энергия пружины и кубика (относительно исходного состояния, когда мышка была на выступе), когда мышка «приехала» на кубике в крайнюю точку колебания?

[3] Какой станет амплитуда колебаний кубика после того, как на нём побывала мышка, если известно, что изначально $A = 8$ см, а масса кубика составляет 80% массы мышки? Выразите искомую величину в сантиметрах и укажите в качестве ответа её численное значение с округлением до двух значащих цифр.

Для первых двух вопросов укажите «не изменится» (1), «увеличится» (2) или уменьшится (3).

(*И. В. Демидов, А. М. Минарский*)

Ответ: [1] 1; **[2]** 2; **[3]** 12 см.

Решение пункта [1]. Мышка на выступе разгоняется и прыгает на кубик, причем приземляется на него, когда он проходит свое положение равновесие. Так как мышка при падении на кубик имеет ту же горизонтальную составляющую скорости, что и кубик, то оказавшись на кубике она не затормозит и не ускорит его. Поэтому при прохождении положения равновесия как у кубика было $Mv_{\max}^2/2$, так и осталось при падении мышки (здесь $v_{\max}$ — скорость кубика при прохождении положения равновесия). Потенциальная энергия пружины в этом положении равна нулю. Значит полная механическая энергия пружины и кубика не изменилась и равна $Mv_{\max}^2/2$, когда мышка

приземлилась на кубик и только начинает на нём «ехать».

Решение пункта [2]. Но полная механическая энергия всей системы, т.е. кубика, пружины и мышки будет равна $(M+m)v_{\max}^2/2$, т.е. больше на $mv_{\max}^2/2$. Когда мышка «приезжает» на кубике в крайнюю точку колебаний кубика (кубик и мышка останавливаются), вся эта энергия превращается в потенциальную энергию пружины. Следовательно, полная механическая энергия кубика и пружины увеличивается.

Решение пункта [3]. Важно отметить, что когда мышка спрыгивает с кубика вертикально вверх, тем самым не изменяя горизонтальной скорости кубика, то она не меняет и полной механической энергии пружины и кубика (которая теперь больше на величину $mv_{\max}^2/2$, по сравнению с ситуацией, когда мышки не было). И после того, как мышка спрыгнет с кубика, он теперь будет совершать колебания с большей амплитудой A'.

По закону сохранения механической энергии, мы имеем

$$\frac{Mv_{\max}^2}{2}+\frac{mv_{\max}^2}{2}=\frac{kA'^2}{2} \quad \Rightarrow \quad A'=v_{\max}\sqrt{\frac{M+m}{k}}.$$

В случае без мышки мы имеем $Mv_{\max}^2/2=kA^2/2$, т.е. $A=v_{\max}\sqrt{M/k}$. Исключая $v_{\max}$, мы найдем новую амплитуду колебаний кубика

$$A'=A\sqrt{\frac{M+m}{M}}.$$

Подставляя сюда $A=8$ см и $M=0{,}8m$, мы найдем $A=12$ см.

Примечание. В данной задаче продемонстрировано явление параметрического резонанса. Резонанс называется параметрическим, если он вызван не внешней периодической силой, а периодическим изменением какого-нибудь параметра системы. В данной случае таким параметром является масса. Действительно, если бы кубик мог магическим образом увеличивать свою массу при прохождении положения равновесия, и возвращаться к исходному состоянию в крайних положениях колебаний, то с течением времени амплитуда колебаний бы увеличилась, т.е. в системе наблюдался бы резонанс. Известный пример параметрического резонанса — это раскачивание на качелях с помощью приседаний. В данном случае человек и качели можно представить как математический маятник, длина которого периодически изменяется. Подробнее о параметрическом резонансе можно почитать статье в журнале Квант «Что такое параметрический резонанс?» (Варламов А. А., Черноуцан А. И.).

Международная физическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2020–2021 учебный год. Отборочный этап

Решения задач для 10 класса

10.1. В глубокую кастрюлю с водой поместили стакан из льда массы $m = 308$ г дном вниз. Зная, что радиус кастрюли равен 14 см, а радиус стакана составляет 7 см, ответьте на следующие вопросы:

[1] Насколько поднялся уровень воды Δh_1 в кастрюле после того, как туда опустили стакан (пока лед не начал таять)?

[2] Через некоторое время ледяной стакан полностью растаял, и в итоге уровень воды поднялся на Δh_2 по сравнению с уровнем воды, когда стакана ещё не было. Найдите разность $\Delta h_2 - \Delta h_1$.

Ответы укажите в сантиметрах, округлив до целого числа.

Примечание: плотность воды равна 1 г/см^3. (*И. В. Демидов*)

Ответ: [1] 1 см; **[2]** 0 см.

Решение пункта [1]. По закону Архимеда, сила, выталкивающая стакан, равна весу жидкости в объёме погруженной части стакана. Так как он плавает, эта же сила равна силе тяжести стакана: $F_a = m_{\text{ст}} g$. Значит, масса вытесненной воды равна массе стакана. И уровень поднялся так же, как если бы в кастрюлю долили такую массу воды. Тогда

$$\Delta h_1 = \frac{V}{S_{\text{к}}} = \frac{m}{\rho S_{\text{к}}} = \frac{m}{\rho \pi r^2} = \frac{308 \text{ г}}{1 \frac{\text{г}}{\text{см}^3} \cdot 3{,}14 \cdot 14 \text{ см} \cdot 14 \text{ см}} \approx 0{,}5 \text{ см}.$$

Решение пункта [2]. Так как после таяния льда, образуется масса воды равная массе стакана, а, значит, уровень воды останется таким же, как и в пункте **[1]**.

Примечание. К сожалению, в тексте данной задачи была допущена опечатка, и вместо указания ответа в миллиметрах просилось указание в сантиметрах.

10.2. Подъёмная сила крыла самолёта пропорциональна квадрату скорости самолёта и площади крыла. Школьник сделал модель самолёта в масштабе 1 : 25, то есть все линейные размеры модели в 25 раз меньше, чем у оригинала. Предположим, что модель и самолет летят на одинаковой высоте с постоянной скоростью горизонтально.

[1] Какова скорость модели по сравнению со скоростью самолёта? В ответе укажите «Б», если больше, или «М», если меньше.

[2] Во сколько раз будут отличаться скорости модели и самолёта? Ответ округлите до целого числа.

Плотности модели и самолета считайте одинаковыми. (*А. М. Минарский, Н. А. Богословский*)

Ответ: [1] М (уменьшилась); **[2]** в 5 раз.

Решение. Если объект (будь то самолет или модель) летит на постоянной высоте, то его подъёмная сила равна его силе тяжести. По условию, подъемная сила крыльев равна $F = kSv^2$, где S — площадь крыльев, v — скорость объекта, а k — некоторый коэффициент, который может зависеть от плотности воздуха. При переходе от самолета к модели, линейные размеры уменьшились в 25 раз, а значит, площадь уменьшилась в $25^2 = 625$ раз.

Предположим, скорость модели меньше в x раз. Тогда подъёмная сила модели меньше, чем у самолета, в $625 \cdot x^2$ раз. Поскольку модель и самолёт летят на одинаковой высоте, то плотность воздуха, а значит, и коэффициент k для самолета и модели одинаковы.

Посмотрим, во сколько раз уменьшилась сила тяжести. Она уменьшилась пропорционально объёму, то есть линейным размерам в кубе: $25^3 = 15625$ раз. И подъемная сила, и сила тяжести

уменьшились в одинаковое количество раз, поэтому

$$625 \cdot x^2 = 15625 \quad \Rightarrow \quad x = 5.$$

Поскольку $x > 1$, наше предположение, что скорость уменьшилась — верное.

10.3. Если среднюю скорость молекул некоторого идеального газа увеличить на 10 м/с, его давление возрастёт ровно на 21%.

На сколько ещё процентов от первоначального значения возрастёт давление в этом газе, если скорость увеличить ещё на 10 м/с? Ответ округлите до целого числа.

Примечание: объём газа считайте постоянным. (*А. М. Минарский*)

Ответ: 23%.

Решение. Давление в газе $P = nkT$, где n — концентрация, k — постоянная Больцмана, T — температура. Средняя кинетическая энергия молекул в газе

$$\left\langle \frac{mv^2}{2} \right\rangle = \frac{3}{2}kT.$$

Поэтому при возрастании скорости молекул как абсолютная температура, так и давление растут пропорционально квадрату средней скорости. Если средняя скорость равнялась v, то

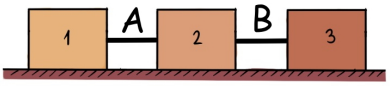
$$\frac{(v+10)^2}{v^2} = \frac{P_1}{P_0} = \frac{100\% + 21\%}{100\%} = 1{,}21 \quad \Rightarrow \quad \frac{v+10}{v} = 1{,}1 \quad \Rightarrow \quad v = 100 \ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Если скорость увеличить ещё на 10 м/с, то давление по сравнению с первоначальным увеличится в

$$\frac{(v+20)^2}{v^2} = \frac{P_2}{P_0} = \frac{(100+20)^2}{100^2} = 1{,}44 \text{ раза},$$

то есть на 44% по сравнению с первоначальной. А так как оно уже выросло на 21%, то ещё возрастёт на 23% от первоначального значения.

10.4. На горизонтальном столе лежит цепочка из трёх брусков одинаковой массы $M = 1$ кг, связанных нитями. Соединяющие бруски нити рвутся при силе натяжения $T = 6$ Н. Бруски изготовлены из материалов с различными значениями коэффициента трения о стол, значения коэффициентов трения $\mu_1 = 0{,}1$, $\mu_2 = 0{,}3$ и $\mu_3 = 0{,}5$ для брусков 1, 2 и 3 соответственно.



[1] К бруску 1 влево прикладывают силу F, которую медленно увеличивают. Какая из нитей, соединяющих бруски, порвётся первой (укажите в качестве ответа A или B)?

[2] При каком значении силы F это произойдёт? Ответ дайте в Н, округлив до целого числа.

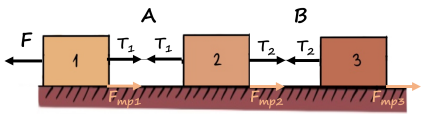
[3] К бруску 3 вправо прикладывают силу F, которую медленно увеличивают. Какая из нитей, соединяющих бруски, порвётся первой (укажите в качестве ответа A или B)?

[4] При каком значении силы F это произойдет? Ответ дайте в Н, округлив до целого числа.

Ускорение силы тяжести считайте равным $g = 10$ м/с^2. (*А. М. Минарский, Н. А. Богословский*)

Ответ: [1] А; **[2]** 7 Н; **[3]** В; **[4]** 12 Н.

Решение пункта [1]. Если сила F тянет влево, то в момент разрыва какой-то нити система либо покоится, либо ускоряется влево, а все силы трения действуют вправо.



Рассмотрим второе тело. В проекции на ось x, направленную вправо, второй закон Ньютона записывается так:

$$-T_1 + T_2 + F_{\text{тр}2} = -ma \quad \Rightarrow \quad T_1 = T_2 + F_{\text{тр}2} + ma,$$

или $T_1 > T_2$. Значит, нить A всегда натянута больше, чем нить B, а потому порвётся первой.

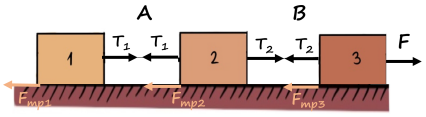
Решение пункта [2]. Рассмотрим подсистему из второго и третьего тела. Влево эту систему тянет сила T_1, которая в момент разрыва достигает 6 Н. Это меньше, чем сила трения скольжения, которая может действовать на тела 2 и 3:

$$T_{\text{ск}23} = \mu_2 mg + \mu_3 mg = 0{,}3 \cdot 1 \cdot 10 + 0{,}5 \cdot 1 \cdot 10 = 8 \text{ Н}.$$

Значит, в момент разрыва нити система не скользит.
Для того чтобы нить A стала натягиваться, тело 1 должно микроскопически смещаться влево. То есть действующая на неё сила трения достигает значения $\mu_1 mg$. Запишем второй закон Ньютона в момент разрыва:

$$-F + \mu_1 mg + T_1 = ma = 0 \quad \Rightarrow \quad F = \mu_1 mg + T_1 = 0{,}1 \cdot 1 \cdot 10 + 6 = 7 \text{ Н}.$$

Решение пункта [3]. Теперь сила F тянет вправо. Рассуждения, аналогичные пункту 1, дают, что все силы трения действуют влево, а система, если ускоряется, то направо. Запишем второй закон Ньютона для второго тела (ось x снова направим вправо):



$$T_2 - T_1 - F_{\text{тр}2} = ma \quad \Rightarrow \quad T_2 = ma + T_1 + F_{\text{тр}2}.$$

Видно, что $T_2 > T_1$, значит, нить B порвётся первой.
Решение пункта [4]. Рассмотрим систему тел 1 и 2. Вправо ее тянет сила T_2, в момент разрыва нити B равная 6 Н. Это больше, чем сила трения скольжения, действующая на тела 1 и 2, равная

$$T_{\text{ск}12} = \mu_1 mg + \mu_2 mg = 0{,}1 \cdot 1 \cdot 10 + 0{,}3 \cdot 1 \cdot 10 = 4 \text{ Н}.$$

Значит, в момент разрыва нити система скользит.
Найдём ускорение всей системы, для этого запишем второй закон Ньютона (силы T_1 и T_2 для системы в целом внутренние и их можно не учитывать):

$$F - \mu_1 mg - \mu_2 mg - \mu_3 mg = (m + m + m)a \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad a = \frac{F - \mu_1 mg - \mu_2 mg - \mu_3 mg}{3m} = \frac{F - 1 - 3 - 5}{3} = \frac{F - 9}{3}.$$

Запишем теперь второй закон Ньютона для третьего тела в момент разрыва:

$$F - T_2 - \mu_3 mg = ma \quad \Rightarrow \quad F - 6 - 5 = 1 \cdot a = 1 \cdot \frac{F - 9}{3} \quad \Rightarrow \quad F = 12 \text{ Н}.$$

10.5. В большой ёлочной гирлянде 44 лампочки перегорели и вместо них вставили соединительные провода. После этого мощность каждой из оставшихся лампочек возросла на 44%.
Сколько лампочек осталось гореть в гирлянде? Считайте, что сопротивление каждой лампочки не зависит от её яркости, а сопротивление проводов пренебрежимо мало. (*А. М. Минарский*)
Ответ: 220 штук.
Решение. Пусть сопротивление каждой лампочки равно R, поскольку по условию оно не зависит от яркости горения. Тогда мощность каждой лампочки равна I^2R. А раз мощность каждой лампочки возросла на 44%, то есть в 1,44 раза, то ток в гирлянде возрос в $\sqrt{1{,}44} = 1{,}2$ раза.
Пусть в конце осталось n лампочек. Тогда конечное сопротивление гирлянды $R_{\text{к}} = nR$, а конечный ток $I_{\text{к}} = U_0/nR$, где U_0 — общее напряжение в цепи. В начале лампочек было $n+44$, сопротивление

гирлянды $R_0 = (n + 44) \cdot R$, а начальный ток

$$I_0 = \frac{U_0}{(n + 44) \cdot R}.$$

Итого имеем уравнение:

$$1{,}2 = \frac{I_к}{I_0} = \frac{\frac{U_0}{nR}}{\frac{U_0}{(n+44)\cdot R}} = \frac{n + 44}{n} \quad \Rightarrow \quad n = 220.$$

10.6. Муля пошёл в поход и взял с собой палатку и спальный мешок. Вечером было тепло и Муля заснул на улице. Ночью стало холодать и при температуре воздуха $T_1 = 18°\text{C}$ Муля начал замерзать и перебрался в пустую палатку и лёг там тоже без спальника. Когда температура воздуха на улице опустилась до $T_2 = 14°\text{C}$ он стал замерзать в палатке. Тогда он вылез из палатки, залез в спальный мешок и стал спать дальше. Когда температура воздуха опустилась до $T_3 = 9°\text{C}$ Муля опять начал замерзать. Тогда он в спальном мешке перебрался обратно в палатку.

[1] При какой температуре воздуха T_4 (в градусах) он начнет замерзать в спальном мешке в палатке? Ответ округлите до целого числа.

[2] Сколько минимум человек должны спать в такой палатке в таких спальных мешках, чтобы они не замерзали при температуре на улице, равной $T_0 = 0°$?

Считайте, что человек во время сна выделяет тепло с некоторой постоянной скоростью, причем эта скорость не зависит от температуры окружающей среды.

(*А. М. Минарский, Н. А. Богословский*)

Ответ: [1] $T_4 = 5°\text{C}$; **[2]** 3 человека.

Решение пункта [1]. Исходя из условия задачи мы знаем, что Муля без спального мешка замерзает при температуре $T_1 = 18°\text{C}$. Значит, если Муля переберется в палатку, то чтобы он в ней замерз, температура в палатке должна опустится до значения T_1. Муля «работает» как батарея отопления, и каждую секунду выделяет некоторое количество теплоты. Давайте его тепловую мощность обозначим как P. С другой стороны, тепло уходит из палатки через ее стенки, и согласно закону Ньютона-Рихмана, мощность тепловых потерь пропорциональна разности температур в палатке и на улице, т.е. $P_{\text{потери}} = \alpha(T_1 - T_2)$, где T_2 — температура воздуха вне палатки, α — коэффициент пропорциональности, зависящий от площади поверхности палатки, ее материала. Температура на улице изменяется достаточно медленно, поэтому будем считать, что температура внутри палатки успевает установиться так, что количество теплоты, которое выделяет Муля в единицу времени, равно количеству теплоты, которое теряется через стенки палатки в единицу времени, т.е.

$$P = \alpha(T_1 - T_2). \tag{10.6.1}$$

Далее Муля надевает спальный мешок, и теперь он замерзает, если температура окружающего воздуха опускается до значения $T_3 = 9°\text{C}$. Значит, если он лежит в палатке, то чтобы он замерз в спальном мешке, температура воздуха в палатке должна опустится до значения T_3. Тогда в этом случае мы можем записать

$$P = \alpha(T_3 - T_4), \tag{10.6.2}$$

где T_4 — искомая температура воздуха вне палатки. Сравнивая (10.6.1) и (10.6.2), мы получаем $T_1 - T_2 = T_3 - T_4$, отсюда $T_4 = T_3 - (T_1 - T_2) = 5°\text{C}$.

Решение пункта [2]. Посмотрим теперь, сколько человек должно спать в палатке в таких же спальных мешках, чтобы не замерзать в ней при температуре воздуха вне палатки $T_0 = 0°\text{C}$. Обозначим число людей как n. Тогда, их общая тепловая мощность равна nP. Приравнивая теперь

эту тепловую мощность к мощности потерь через стенки палатки, мы получим

$$nP = \alpha(T_3 - T_0).$$

Мы можем в этом уравнении отношение P/α заменить на $T_3 - T_4$ из (10.6.2) (или же $T_1 - T_2$ из (10.6.1)). Тогда найдем

$$n = \frac{T_3 - T_0}{T_3 - T_4} = 2{,}25.$$

Таким образом, в палатке должно быть минимум 3 человека.

10.7. На точных электронных весах с быстрым откликом и неподвижной чашей стоит стакан с водой, на дне которого находится пузырёк какого-то газа объемом 10 мм^3. Весы показывают 100000 мг. В некоторый момент пузырёк внутри жидкости начинает всплывать.

[1] Как изменится показание весов во время всплытия пузырька? В ответе укажите «Б», если увеличится, или «М», если уменьшится.

[2] Что покажут весы в тот момент, когда ускорение всплывающего пузырька равно 6 м/с^2? Ответ дайте в миллиграммах, округлив до целого числа.

Примечание: ускорение силы тяжести считайте равным 10 м/с^2.

(*С. Н. Сашов, А. М. Минарский*)

Ответ: [1] М (уменьшится); **[2]** 99994 мг.

Решение пункта [1]. Сравним два состояния системы в процессе всплытии пузырька: в результате смещения пузырька вода заполняет объём, который раньше вытеснял пузырёк в нижнем положении, и освобождает объём, который теперь занимает пузырёк в верхнем положении. Реальное движение воды, обтекающей всплывающий пузырёк, весьма сложное, но для наших целей достаточно рассмотреть лишь результат этого движения (так как именно смещение воды определяет положение центра масс системы и соответственно даёт возможность вычислить внешние силы): вода в объёме пузырька опустилась на то же расстояние, на которое поднялся пузырёк, и за то же самое время. Это означает, что при ускоренном вспытии пузырька вода будет опускаться тоже с ускорением (вода в объёме пузырька будет падать с таким же по модулю ускорением). Поскольку какая-то часть массы воды в стакане ускоряется вниз, то реакция опоры, действующая вверх со стороны весов на стакан, уменьшилась по сравнению со случаем полностью покоящейся жидкости, а значит, по третьему закону Ньютона уменьшился и вес стакана, который показывают весы.

Решение пункта [2]. Масса воды в объёме пузырька $\rho_в V$ ускоряется вниз, значит, сила действия весов на стакан с водой уменьшилась на

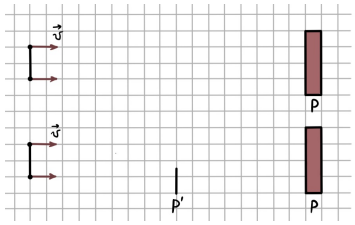
$$F = ma = \rho_в \cdot V \cdot a = 1000 \cdot 10 \cdot 10^{-9} \cdot 6 = 6 \cdot 10^{-5} \text{ Н}.$$

Этой силе соответствует уменьшение показания весов на

$$\frac{F}{g} = \frac{6 \cdot 10^{-5}}{10} = 6 \cdot 6 \cdot 10^{-6} \text{ кг} = 6 \text{ мг}$$

по сравнению со случаем покоя. Таким образом, показание весов будет $100000 - 6 = 99994$ мг.

10.8. Два очень маленьких массивных шарика соединены невесомым жестким стержнем длины $L = 2$ м. В невесомости в вакууме проводят два эксперимента.



В первом шарикам одновременно придают одинаковую скорость $v = 1$ м/с в направлении, перпендикулярном стержню. Через время t_1 шарики одновременно ударяются в перпендикулярную их траекториям неподвижную стену P.

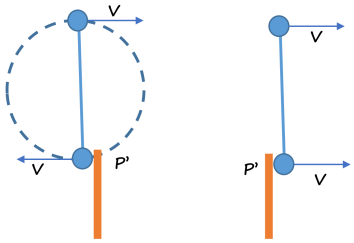
Во втором эксперименте в середине траектории одного из шариков перпендикулярно ей устанавливают тонкую (пренебрежимой толщины) жесткую абсолютно упругую стенку P'. Через время t_2 шарики достигают стены P.

Найдите $\Delta t = t_2 - t_1$, ответ дайте в секундах с точностью до сотых.

(*С. Н. Сашов, А. М. Минарский*)

Ответ: 3,14 сек.

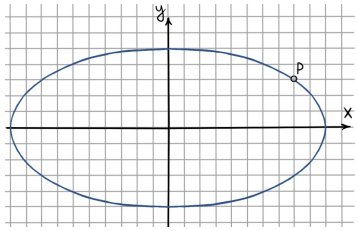
Решение. Во втором эксперименте, в момент упругого удара одного из шариков гантельки о жесткую стенку P', скорость этого шарика мгновенно поменяется на противоположную. После этого гантелька будет как целое совершать вращение вокруг своего неподвижного центра масс (см. левый рис.). Когда она совершит пол-оборота, другой шарик ударится о стенку P' и поменяет скорость на противоположную, после чего гантелька продолжит поступательное движение как целое, как в первом эксперименте (см. правый рис.).



Тем самым, задержка времени второго эксперимента, по сравнению с первым, равна времени вращения гантельки. За это время каждый шарик проходит путь длиной в половину окружности радиуса $L/2$ со скоростью v:

$$\Delta t = \frac{\pi \cdot \frac{L}{2}}{v} = \frac{\pi \cdot \frac{2}{2}}{1} = \pi \approx 3{,}14 \text{ сек.}$$

10.9. Маленькая бусинка движется против часовой стрелки по проволоке, согнутой в форме эллипса* (см. рисунок). Модуль её скорости 10 см/с.



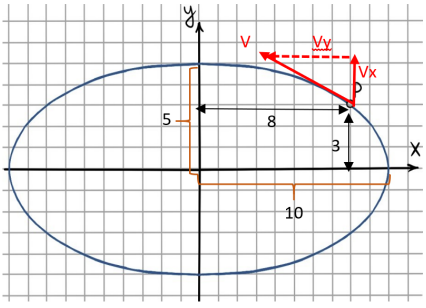
Найдите компоненту вектора скорости бусинки по оси y в момент времени, когда она находится в точке P. Ответ дайте в см/с и округлите до двух знаков после запятой. (*С. Н. Сашов, А. М. Минарский*)

Ответ: 5,55 см/с.

Решение. Высота эллипса (что видно из чертежа) равна 5, его длина — 10, поэтому уравнение эллипса:

$$\left(\frac{x}{10}\right)^2 + \left(\frac{y}{5}\right)^2 = 1. \qquad (10.9.1)$$

В начальный момент (бусина в точке P) из чертежа видно, что $x_0 = 8$, $y_0 = 3$. Спустя очень малое время Δt координаты бусинки станут $x_0 + V_x\Delta t$ и $y_0 + V_y\Delta t$, при этом она остается на эллипсе:



$$\left(\frac{x_0 + V_x\Delta t}{10}\right)^2 + \left(\frac{y_0 + V_y\Delta t}{5}\right)^2 = 1.$$

Упростим это выражение, учитывая (10.9.1) и пренебрегая $(\Delta t)^2$

---

* Эллипс — это равномерно растянутая в одном направлении окружность.

как очень малой величиной, получим:

$$\frac{2x_0V_x\Delta t}{100}+\frac{2y_0V_y\Delta t}{25}=0 \quad \Rightarrow \quad x_0V_x+4y_0V_y=0.$$

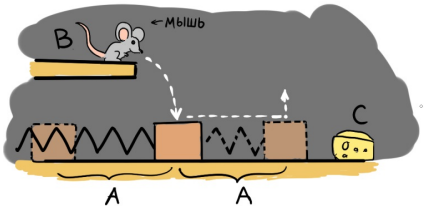
Подставляя x_0 и y_0:

$$8V_x+12V_y=0 \quad \Rightarrow \quad V_y=-\frac{3}{2}V_x.$$

Теперь воспользуемся теоремой Пифагора для скоростей:

$$V_x^2+V_y^2=V^2 \quad \Rightarrow \quad V_x^2+\left(\frac{3}{2}V_x\right)^2=100 \quad \Rightarrow \quad V_x=\sqrt{100\cdot\frac{4}{13}}\approx 5{,}55\ \frac{\text{см}}{\text{с}}.$$

10.10. Мышке нужно перебраться с выступа B к сыру C, однако внизу ей мешает кубик на пружинке, который совершает гармонические колебания без трения с амплитудой A. Мышка разогналась и прыгнула с выступа на кубик, попав на него, когда он проходил своё положение равновесия. При этом в момент падения горизонтальная проекция скорости мышки была такой же, как и у кубика. Затем, когда кубик достиг своего крайнего положения, она слегка подпрыгнула вертикально вверх и приземлилась уже на пол, продолжив путь к сыру.



[1] Как изменилась полная механическая энергия пружины и кубика (относительно исходного состояния, когда мышка была на выступе), когда мышка приземлилась на кубик и только начинает на нём «ехать»?

[2] Как изменилась полная механическая энергия пружины и кубика (относительно исходного состояния, когда мышка была на выступе), когда мышка «приехала» на кубике в крайнюю точку колебания?

[3] Какой станет амплитуда колебаний кубика после того, как на нём побывала мышка, если известно, что изначально $A=8$ см, а масса кубика составляет 80% массы мышки? Выразите искомую величину в сантиметрах и укажите в качестве ответа её численное значение с округлением до двух значащих цифр.

Для первых двух вопросов укажите «не изменится» (1), «увеличится» (2) или уменьшится (3).

(*И. В. Демидов, А. М. Минарский*)

Ответ: [1] 1; **[2]** 2; **[3]** 12 см.

Решение пункта [1]. Мышка на выступе разгоняется и прыгает на кубик, причем приземляется на него, когда он проходит свое положение равновесие. Так как мышка при падении на кубик имеет ту же горизонтальную составляющую скорости, что и кубик, то оказавшись на кубике она не затормозит и не ускорит его. Поэтому при прохождении положения равновесия как у кубика было $Mv_{\max}^2/2$, так и осталось при падении мышки (здесь $v_{\max}$ — скорость кубика при прохождении положения равновесия). Потенциальная энергия пружины в этом положении равна нулю. Значит полная механическая энергия пружины и кубика не изменилась и равна $Mv_{\max}^2/2$, когда мышка приземлилась на кубик и только начинает на нём «ехать».

Решение пункта [2]. Но полная механическая энергия всей системы, т.е. кубика, пружины и мышки будет равна $(M+m)v_{\max}^2/2$, т.е. больше на $mv_{\max}^2/2$. Когда мышка «приезжает» на кубике в крайнюю точку колебаний кубика (кубик и мышка останавливаются), вся эта энергия превращается в потенциальную энергию пружины. Следовательно, полная механическая энергия кубика и пружины увеличивается.

Решение пункта [3]. Важно отметить, что когда мышка спрыгивает с кубика вертикально вверх, тем самым не изменяя горизонтальной скорости кубика, то она не меняет и полной механической энергии пружины и кубика (которая теперь больше на величину $mv_{\max}^2/2$, по сравнению с си-

туацией, когда мышки не было). И после того, как мышка спрыгнет с кубика, он теперь будет совершать колебания с большей амплитудой A'.

По закону сохранения механической энергии, мы имеем

$$\frac{Mv_{\max}^2}{2} + \frac{mv_{\max}^2}{2} = \frac{kA'^2}{2} \quad \Rightarrow \quad A' = v_{\max}\sqrt{\frac{M+m}{k}}.$$

В случае без мышки мы имеем $Mv_{\max}^2/2 = kA^2/2$, т.е. $A = v_{\max}\sqrt{M/k}$. Исключая $v_{\max}$, мы найдем новую амплитуду колебаний кубика

$$A' = A\sqrt{\frac{M+m}{M}}.$$

Подставляя сюда $A = 8$ см и $M = 0{,}8m$, мы найдем $A = 12$ см.

Примечание. В данной задаче продемонстрировано явление параметрического резонанса. Резонанс называется параметрическим, если он вызван не внешней периодической силой, а периодическим изменением какого-нибудь параметра системы. В данной случае таким параметром является масса. Действительно, если бы кубик мог магическим образом увеличивать свою массу при прохождении положения равновесия, и возвращаться к исходному состоянию в крайних положениях колебаний, то с течением времени амплитуда колебаний бы увеличилась, т.е. в системе наблюдался бы резонанс. Известный пример параметрического резонанса — это раскачивание на качелях с помощью приседаний. В данном случае человек и качели можно представить как математический маятник, длина которого периодически изменяется. Подробнее о параметрическом резонансе можно почитать статье в журнале Квант «Что такое параметрический резонанс?» (Варламов А. А., Черноуцан А. И.).

Международная физическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2020–2021 учебный год. Отборочный этап

Решения задач для 11 класса

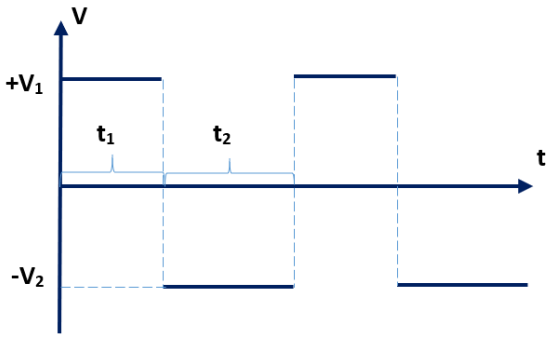
11.1. Навстречу друг другу бегут две бесконечные колонны спортсменов. Первая колонна бежит слева направо со скоростью $v_1 = 5$ м/с и расстоянием между бегунами $l_1 = 10$ м, а вторая — справа налево со скоростью $v_2 = 3$ м/с и расстоянием между бегунами $l_2 = 20$ м. При встрече спортсмены передают друг другу эстафетную палочку.

Какова средняя скорость движения эстафетной палочки за достаточно большое время? Ответ дайте в м/с, округлив до 2 значащих цифр. Положительным считайте направление вправо.

Примечание: средняя скорость прямолинейного движения равна отношению изменения координаты к полному времени этого изменения. (*С. Н. Сашов*)

Ответ: 2,3 м/с.

Решение. Так как спортсмены из разных колонн бегут навстречу друг другу, то их относительная скорость равна $V_1 + V_2$.



Когда палочка у спортсмена из 1 колонны (бегущего направо со скоростью V_1), этот спортсмен преодолевает расстояние L_2 между двумя спортсменами второй колонны за время

$$t_1 = \frac{L_2}{V_1 + V_2}.$$

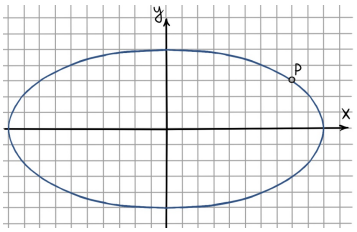
Затем она находится в руках у спортсмена второй колонны и движется со скоростью V_2 влево в течении времени

$$t_2 = \frac{L_1}{V_1 + V_2}.$$

Затем ситуация повторяется. График скорости показан на рисунке, а её средняя скорость за каждый цикл повторения $t_1 + t_2$ будет:

$$\langle V \rangle = \frac{L_{\text{общ}}}{t_{\text{общ}}} = \frac{V_1 t_1 + (-V_2) t_2}{t_1 + t_2} = \frac{\frac{V_1 L_2}{V_1+V_2} - \frac{V_2 L_1}{V_1+V_2}}{\frac{L_2}{V_1+V_2} + \frac{L_1}{V_1+V_2}} = \frac{V_1 L_2 - V_2 L_1}{L_2 + L_1} = \frac{5 \cdot 20 - 3 \cdot 10}{20 + 10} = \frac{70}{30} = \frac{7}{3} \approx 2{,}3 \ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

11.2. Маленькая бусинка движется против часовой стрелки по проволоке, согнутой в форме эллипса* (см. рисунок). Модуль её скорости 10 см/с.



Найдите компоненту вектора скорости бусинки по оси y в момент времени, когда она находится в точке P. Ответ дайте в см/с и округлите до двух знаков после запятой. (*С. Н. Сашов, А. М. Минарский*)

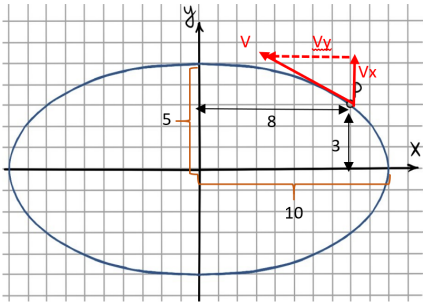
Ответ: 5,55 см/с.

Решение. Высота эллипса (что видно из чертежа) равна 5, его длина — 10, поэтому уравнение эллипса:

$$\left(\frac{x}{10}\right)^2 + \left(\frac{y}{5}\right)^2 = 1. \qquad (11.2.1)$$

* Эллипс — это равномерно растянутая в одном направлении окружность.

В начальный момент (бусина в точке P) из чертежа видно, что $x_0 = 8$, $y_0 = 3$. Спустя очень малое время Δt координаты бусинки станут $x_0 + V_x\Delta t$ и $y_0 + V_y\Delta t$, при этом она остается на эллипсе:



$$\left(\frac{x_0 + V_x\Delta t}{10}\right)^2 + \left(\frac{y_0 + V_y\Delta t}{5}\right)^2 = 1.$$

Упростим это выражение, учитывая (11.2.1) и пренебрегая $(\Delta t)^2$ как очень малой величиной, получим:

$$\frac{2x_0V_x\Delta t}{100} + \frac{2y_0V_y\Delta t}{25} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0V_x + 4y_0V_y = 0.$$

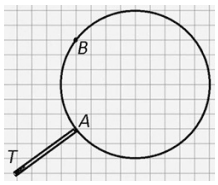
Подставляя x_0 и y_0:

$$8V_x + 12V_y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_y = -\frac{3}{2}V_x.$$

Теперь воспользуемся теоремой Пифагора для скоростей:

$$V_x^2 + V_y^2 = V^2 \quad \Rightarrow \quad V_x^2 + \left(\frac{3}{2}V_x\right)^2 = 100 \quad \Rightarrow \quad V_x = \sqrt{100 \cdot \frac{4}{13}} \approx 5{,}55 \ \frac{\text{см}}{\text{с}}.$$

11.3. В вакууме через неподвижную трубку T очень маленького диаметра с концом в точке A надувают шарик, сделанный из однородной резины. Найдите величину мгновенной скорости точки шарика B, если воздух подается внутрь шарика через трубку так, что объем шарика возрастает на 2 см^3/с. Ответ дайте в см/с, округлив до 3 значащих цифр.

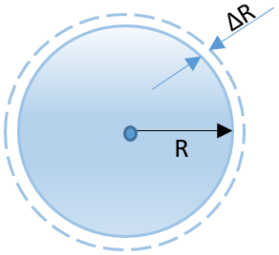


(*С. Н. Сашов*)

Примечание: 1 клетка рисунка соответствует 1 см.

Ответ: 0,00764 см/с.

Если шарик увеличивает свой радиус на малую величину ΔR, то его объём увеличится на $\Delta V = S\Delta R = 4\pi R^2\Delta R$ (см. рисунок). Поэтому скорость роста радиуса

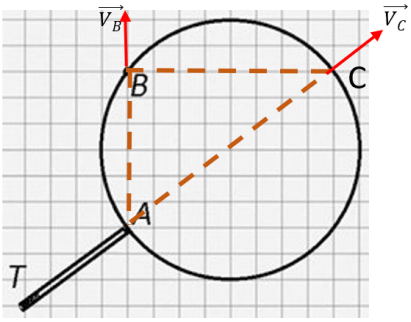


$$\frac{\Delta R}{\Delta t} = V_R = \frac{1}{4\pi R^2} \cdot \frac{\Delta V}{\Delta t},$$

где $\Delta V/\Delta t$ — скорость роста объёма пузыря.

Если резина мягкая, она практически не сжимает воздух и $\Delta V/\Delta t$ совпадает с известной скоростью вдувания объёма воздуха в пузырь.

Из рисунка, который был дан в условии задачи (см. рисунок) видно, что в рассматриваемый момент $AB = 6$ см, $BC = 8$ см, $AC = \sqrt{(AB)^2 + (BC)^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ см; при этом AC — диаметр пузыря и поэтому $R = AC/2 = 5$ см.



Так как точка A по условию неподвижна, то точка C «убегает» от A со скоростью роста диаметра:

$$V_C = 2V_R = \frac{1}{2\pi R^2} \cdot \frac{\Delta V}{\Delta t}.$$

Из подобия

$$\frac{V_B}{V_C} = \frac{AB}{AC} \quad \Rightarrow \quad V_B = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{1}{2\pi R^2} \cdot \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{6}{10} \cdot \frac{1}{2\pi 5^2} \cdot 2 = \frac{3}{125\pi} \approx 0{,}00764 \ \frac{\text{см}}{\text{с}}.$$

11.4. В невесомости неподвижно закреплена вогнутая коническая поверхность (внутренность конуса) с маленьким углом $\alpha = 0{,}001$ радиана между осью и образующей. По ней без

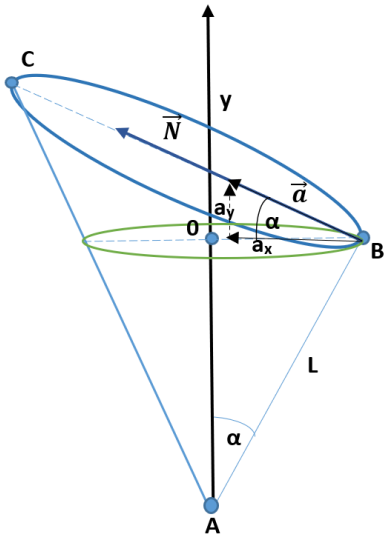
трения (сопротивления воздуха тоже нет) свободно катится маленький шарик. В начальный момент времени он находится на расстоянии $L = 10$ м от вершины конуса, а скорость его направлена перпендикулярно образующей и имеет величину $v = 1$ м/с.

Какова компонента ускорения шарика вдоль оси конуса? Ответ дайте в м/с^2, округлив до 3 значащих цифр. (*С. Н. Сашов*)

Ответ: 0,1.

Решение. В невесомости без трения центробежная сила прижимает шарик к поверхности, по которой он катится («изнутри», ведь это внутренняя поверхность конуса). И получается, что единственная сила действующая сила — это сила реакции опоры $\overrightarrow{N}$, которая действует перпендикулярно поверхности конуса, а потому и полное ускорение $\overrightarrow{a}$ конуса направлено перпендикулярно поверхности (линии AB, где A — вершина конуса, а B — мгновенное положение тела, см. рисунок).

Итак, если $\overrightarrow{V}$ — мгновенная скорость тела (она направлена на нас), $AB = L$ (по условию), $\angle OAB = \alpha$, то $\overrightarrow{a}$ направлена под углом α к горизонту.



Тело движется по эллипсу BC («коническому сечению»), однако поскольку её мгновенная скорость $\overrightarrow{V}$ горизонтальна, тело касается горизонтальной окружности с центром O (и радиусом $R = OB = L\sin\alpha$) и испытывает мгновенное горизонтальное ускорение

$$a_x = \frac{V^2}{R} = \frac{V^2}{L\sin\alpha}$$

(при этом компонента ускорения a_y отвечает за отклонение вектора скорости от горизонтали). Из чертежа видно, что проекция ускорения на ось эллипса (то есть ось OY) будет равна:

$$a_y = a_x \cdot \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\alpha \cdot \frac{V^2}{L\sin\alpha} = \frac{V^2}{L\cos\alpha}.$$

Это и есть точный ответ. Учитывая, что для углов в радианах $\sin\alpha \leqslant \alpha$, поэтому

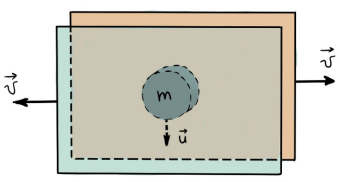
$$\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \geqslant 1 - 2\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = 1 - 0{,}5\alpha^2$$

и для $\alpha = 0{,}001$ с достаточной точностью можно считать $\cos\alpha \approx 1$. Таким образом,

$$a_y = \frac{V^2}{L\cos\alpha} \approx \frac{V^2}{L} = \frac{(1\text{ м/с})^2}{10\text{ м}} = 0{,}1\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Примечание. В условии задачи была допущена опечатка, и ответ спрашивался с точностью до 3 значащих цифр вместо 1. Если вы честно написали ответ 0,100000000015, он будет зачтён как правильный ☺

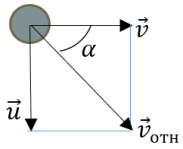
11.5. Между двумя вертикальными плоскостями («жерновами») зажата с силой $N = 100$ Н шайба массой $m = 10$ г. Коэффициент трения между шайбой и каждой из плоскостей $\mu = 0{,}5$. Ускорение свободного падения считайте равным $g = 10$ м/с^2. Плоскости движутся горизонтально в противоположные стороны с одинаковыми скоростями $v = 1$ м/с.



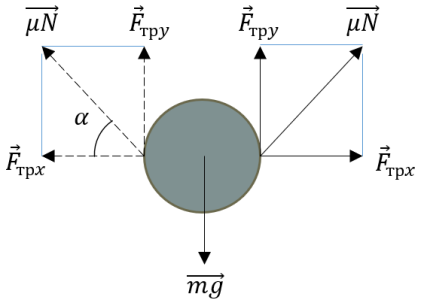
С какой установившейся скоростью шайба будет скользить вниз? Ответ дайте в м/с, округлив до 3 значащих цифр. (*С. Н. Сашов*)

Ответ: 0,001 м/с.

Решение. В установившемся режиме шайба в горизонтальном движении неподвижна и при этом скользит относительно плоскостей «жерновов» со скоростью v соответственно влево или вправо. Общая картина движения шайбы относительно жернова будет как на верхнем рисунке.



Запишем второй закон Ньютона для шайбы (см. нижний рисунок). Пунктиром показаны силы, действующие на неё со стороны задней плоскости, сплошной линией — со стороны передней.



В проекции на ось y:

$$2F_{\text{тр}_y} - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{\text{тр}_y} = \mu N \cdot \sin\alpha = 0{,}5mg. \qquad (11.5.1)$$

Найдём (см. верхний рисунок):

$$\sin\alpha = \frac{V}{V_{\text{отн}}} = \frac{V}{\sqrt{u^2+V^2}}$$

и подставим в уравнение (11.5.1):

$$\mu N \cdot \frac{V}{\sqrt{u^2+V^2}} = 0{,}5mg \quad \Rightarrow \quad \mu^2N^2 \cdot \frac{V^2}{u^2+V^2} = 0{,}25m^2g^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad u^2+V^2 = \frac{\mu^2N^2V^2}{0{,}25m^2g^2} \quad \Rightarrow \quad u^2 = \frac{\mu^2N^2V^2}{0{,}25m^2g^2} - V^2 \quad \Rightarrow \quad u = V\cdot\sqrt{\frac{4\mu^2N^2}{m^2g^2}-1} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad u = 1\cdot\sqrt{\frac{100^2}{(0{,}01\cdot 10)^2}-1} \approx \frac{100}{0{,}1} \approx 10^{-3} = 0{,}001 \ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

11.6. На сферическую планету без атмосферы радиусом $R = 1000$ км с такой же высоты R над поверхностью роняют без начальной скорости маленькое тело.

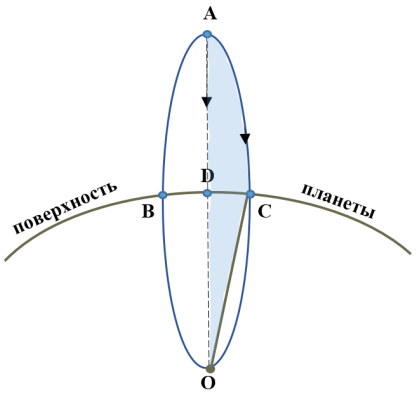
За какое время оно упадет на поверхность планеты? Ответ дайте в секундах, округлив до 3 значащих цифр.

Примечание: ускорение свободного падения на поверхности планеты $g = 1$ м/с^2. (*С. Н. Сашов*)

Ответ: 2570 секунд.

Решение. Предположим, в момент падения у камня будет очень маленькая горизонтальная скорость, тогда она не будет влиять на время падения камня на планету, а значит, время падения по траектории AD равно времени падения по траектории AC (см. рисунок).

При движении от A к C, тело движется по участку очень-очень вытянутого эллипса (настолько вытянутого, что его фокус O, совпадающий с центром тяготения, то есть центром планеты, находится практически на нижнем краю эллипса). По второму закону Кеплера, время движения по участку траектории пропорционально площади, заметаемой радиус-вектором, идущим из центра тяготения. Поэтому сравним время движения по участку AC и время T_0 общего оборота по эллипсу:



$$\frac{t_{AC}}{T_0} = \frac{S_{OAC}}{S_{\text{Э}}},$$

где S_{OAC} — закрашенная на рисунке площадь, которая заметена радиус-вектором, идущим из O; $S_{\text{Э}}$ — общая площадь эллипса.

Пусть наш эллипс имеет большую полуось $a \approx R (\approx AD \approx DO \approx 0{,}5AO)$, и малую полуось $b \approx$ $\approx BD = DC$. Так как эллипс можно рассматривать как окружность радиуса b и площади πb^2,

растянутую вдоль большой полуоси в a/b раз, то его площадь:

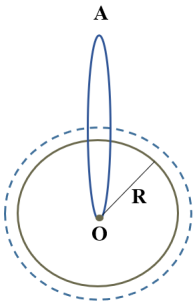
$$S_{\text{Э}} = \frac{a}{b} \cdot \pi b^2 = \pi ab.$$

Площадь заметённой части S_{OAC} состоит из четверти площади эллипса $0{,}25\pi ab$ и площади треугольника ODC $(OD \cdot DC/2 =)0{,}5ab$:

$$t_A C = T_0 \frac{S_{OAC}}{S_{\text{Э}}} = T_0 \frac{0{,}25\pi ab + 0{,}5ab}{\pi ab} = T_0 \left(0{,}25 + \frac{0{,}5}{\pi}\right).$$

Чтобы найти T_0 — общий период оборота по эллипсу — заметим, что, согласно III закону Кеплера, на всех эллипсах с одинаковой большой полуосью при вращении вокруг данного центра тяготения будет одинаковое время обращения («квадраты периодов обращения пропорциональны кубам длин больших полуосей орбит»).

Рассмотрим другой эллипс с такой же большой полуосью $a = R$, а именно круговую орбиту радиуса R, проходящую вплотную к поверхности планеты (см. рисунок). Для неё:



$$\frac{mV^2}{R} = ma_{\text{цс}} = mg \quad \Rightarrow \quad V = \sqrt{gR} \quad \Rightarrow \quad T_0 = \frac{2\pi R}{V} = 2\pi \frac{R}{\sqrt{gR}} = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}}.$$

Тогда искомое время

$$t_A C = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}} \cdot \left(0{,}25 + \frac{0{,}5}{\pi}\right) = \sqrt{\frac{R}{g}} \cdot (0{,}5\pi + 1) = \sqrt{\frac{10^6}{1}} \cdot (0{,}5\pi + 1) \approx 2571 \text{ сек.}$$

Оругляя до трёх значащих цифр, получим 2570 секунд.

11.7. Муля пошёл в поход и взял с собой палатку и спальный мешок. Вечером было тепло и Муля заснул на улице. Ночью стало холодать и при температуре воздуха $T_1 = 18°\text{C}$ Муля начал замерзать и перебрался в пустую палатку и лёг там тоже без спальника. Когда температура воздуха на улице опустилась до $T_2 = 14°\text{C}$ он стал замерзать в палатке. Тогда он вылез из палатки, залез в спальный мешок и стал спать дальше. Когда температура воздуха опустилась до $T_3 = 9°\text{C}$ Муля опять начал замерзать. Тогда он в спальном мешке перебрался обратно в палатку.

[1] При какой температуре воздуха T_4 (в градусах) он начнет замерзать в спальном мешке в палатке? Ответ округлите до целого числа.

[2] Сколько минимум человек должны спать в такой палатке в таких спальных мешках, чтобы они не замерзали при температуре на улице, равной $T_0 = 0°$?

Считайте, что человек во время сна выделяет тепло с некоторой постоянной скоростью, причем эта скорость не зависит от температуры окружающей среды.

(*А. М. Минарский, Н. А. Богословский*)

Ответ: [1] $T_4 = 5°\text{C}$; **[2]** 3 человека.

Решение пункта [1]. Исходя из условия задачи мы знаем, что Муля без спального мешка замерзает при температуре $T_1 = 18°\text{C}$. Значит, если Муля переберется в палатку, то чтобы он в ней замерз, температура в палатке должна опустится до значения T_1. Муля «работает» как батарея отопления, и каждую секунду выделяет некоторое количество теплоты. Давайте его тепловую мощность обозначим как P. С другой стороны, тепло уходит из палатки через ее стенки, и согласно закону Ньютона-Рихмана, мощность тепловых потерь пропорциональна разности температур в палатке и на улице, т.е. $P_{\text{потери}} = \alpha(T_1 - T_2)$, где T_2 — температура воздуха вне палатки, α — коэффициент пропорциональности, зависящий от площади поверхности палатки, ее материала.

Температура на улице изменяется достаточно медленно, поэтому будем считать, что температура внутри палатки успевает установиться так, что количество теплоты, которое выделяет Муля в единицу времени, равно количеству теплоты, которое теряется через стенки палатки в единицу времени, т.е.

$$P = \alpha(T_1 - T_2). \tag{11.7.1}$$

Далее Муля надевает спальный мешок, и теперь он замерзает, если температура окружающего воздуха опускается до значения $T_3 = 9°\text{C}$. Значит, если он лежит в палатке, то чтобы он замерз в спальном мешке, температура воздуха в палатке должна опустится до значения T_3. Тогда в этом случае мы можем записать

$$P = \alpha(T_3 - T_4), \tag{11.7.2}$$

где T_4 — искомая температура воздуха вне палатки. Сравнивая (11.7.1) и (11.7.2), мы получаем $T_1 - T_2 = T_3 - T_4$, отсюда $T_4 = T_3 - (T_1 - T_2) = 5°\text{C}$.

Решение пункта [2]. Посмотрим теперь, сколько человек должно спать в палатке в таких же спальных мешках, чтобы не замерзать в ней при температуре воздуха вне палатки $T_0 = 0°\text{C}$. Обозначим число людей как n. Тогда, их общая тепловая мощность равна nP. Приравнивая теперь эту тепловую мощность к мощности потерь через стенки палатки, мы получим

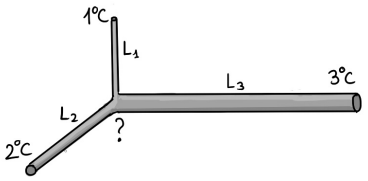
$$nP = \alpha(T_3 - T_0).$$

Мы можем в этом уравнении отношение P/α заменить на $T_3 - T_4$ из (11.7.2) (или же $T_1 - T_2$ из (11.7.1)). Тогда найдем

$$n = \frac{T_3 - T_0}{T_3 - T_4} = 2{,}25.$$

Таким образом, в палатке должно быть минимум 3 человека.

11.8. Три стержня, сделанные из одинакового материала, имеют длины L_1, $L_2 = 2L_1$ и $L_3 = 3L_1$ и круглые сечения с диаметрами D_1, $D_2 = 2D_1$ и $D_3 = 3D_1$ соответственно. Все три стержня соединены в одной точке одним из своих концов. На свободных концах стержней поддерживаются температуры $t_1 = 1°\text{C}$, $t_2 = 2°\text{C}$ и $t_3 = 3°\text{C}$ соответственно.



Какая температура установится в точке соединения стержней через большое время? Ответ дайте в градусах Цельсия, округлив до 3 значащих цифр. (*С. Н. Сашов, А. В. Чудновский*)

Ответ: 2,33°C.

Решение. Для определённого материала

$$\Phi = k \cdot \frac{S}{L} \cdot \Delta T,$$

где Φ — тепловой поток в ваттах, S — площадь поперечного сечения стержня, L — его длина, ΔT — разность температур на концах. Коэффициент k — это некоторая постоянная для данного материала (а именно удельная теплопроводность — в реальности она может немного зависеть от условий, в том числе от температуры, но в нашем случае этой зависимостью можно пренебречь, да она обычно и слаба). Поэтому будем называть величину $K = kS/L$ теплопроводностью стержня. Заметим, что, раз температуры входят сюда лишь в виде разностей, можно пользоваться не обязательно абсолютной шкалой, но, скажем, шкалой Цельсия.

Воспользуемся тем фактом, что при установившемся режиме (когда тепловая энергия не накапливается нигде, и температуры не меняются), сумма (с учётом знаков) входящих и исходящих тепловых потоков везде (в том числе и в месте соединения трёх стержней) равна нулю. Тогда

можно записать это так:

$$(t–t_1)K_1 + (t–t_2)K_2 + (t–t_3)K_3 = 0$$

(в данном случае порядок уменьшаемого и вычитаемого в скобках не важен, т.к. в трёх слагаемых он выбран одинаково). Выразим из этого уравнения t:

$$t = \frac{K_1t_1 + K_2t_2 + K_3t_3}{K_1 + K_2 + K_3}.$$

Если все стержни сделаны из одного материала, то (неизвестный нам) коэффициент теплопроводности этого материала k сократится:

$$t = \frac{\frac{S_1}{L_1} \cdot t_1 + \frac{S_2}{L_2} \cdot t_2 + \frac{S_3}{L_3} \cdot t_3}{\frac{S_1}{L_1} + \frac{S_2}{L_2} + \frac{S_3}{L_3}}.$$

Также заметим, что в формуле $S = \pi(D/2)^2 = D^2 \cdot \pi/4$ коэффициент тоже сократится при подстановке площадей в числитель и знаменатель формулы для времени, поэтому мы можем просто заменить все S на соответствующие D^2:

$$t = \frac{\frac{D_1^2}{L_1} \cdot t_1 + \frac{D_2^2}{L_2} \cdot t_2 + \frac{D_3^2}{L_3} \cdot t_3}{\frac{D_1^2}{L_1} + \frac{D_2^2}{L_2} + \frac{D_3^2}{L_3}}.$$

Наконец, подставив из условия D_1, D_2, D_3 и L_1, L_2, L_3, а также заметив, что D_1 и L_1 сократятся, а останутся только числа 1, 2, 3, получим:

$$t = \frac{1t_1 + 2t_2 + 3t_3}{1 + 2 + 3} = \frac{1 + 4 + 9}{1 + 2 + 3} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3} \approx 2{,}33^\circ\text{C}.$$

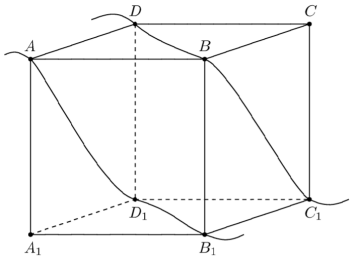
11.9. Из медной проволоки массой $m = 89$ г изготовили каркас куба с ребром $a = 40$ см. Отрезки проволоки имеют хороший электрический контакт в вершинах куба.

Чему равно сопротивление R куба между его противоположными вершинами (лежащими на одной прямой, проходящей через центр куба)? Ответ дайте в мОм, округлив до двух значащих цифр.

Примечание: в расчётах используйте следующие параметры меди: плотность $\rho = 8900$ кг/м^3, удельное сопротивление $\mu = 0{,}017$ Ом $\cdot$ мм^2/м. *(А. В. Чудновский)*

Ответ: 2,7 мОм.

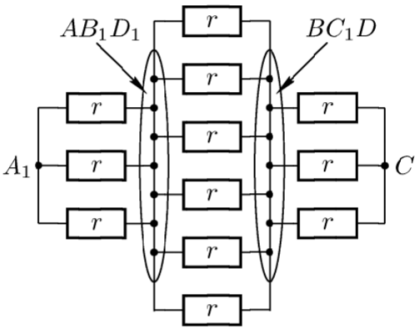
Решение. Обозначим через A_1 и C вершины куба, между которыми нужно найти сопротивление R (см. рис.).



В силу симметрии куба его поворот на 120° (это треть полного оборота) вокруг оси A_1C совмещает повёрнутый куб с исходным (иными словами, прямая A_1C является осью симметрии третьего порядка), смещая не лежащие на оси A_1C вершины по следующей схеме:

$$A \to B_1 \to D_1 \to A, \qquad B \to C_1 \to D \to B.$$

Такая симметрия означает равноценность верших в каждой тройке при подаче напряжения на выводы A_1 и C, то есть потенциалы вершин в каждой тройке равны между собой и эти вершины можно считать одной точкой на схеме (на рисунке эквипотенциальные вершины соединены плавными линиями, обозначающими идеальные, но бесполезные проводники, так как из-за равенства потенциалов через них всё равно не будут течь токи).



Слияние эквипотенциальных точек позволяет нарисовать эквивалентную схему, на которой «жирные» точки AB_1D_1 и BC_1D обведены эллипсами, а через r обозначено сопротивление одного ребра куба.

По свойствам последовательного и параллельного соединения резисторов выразим искомое общее сопротивление:

$$R = \frac{r}{3} + \frac{r}{6} + \frac{r}{3} = \frac{5}{6} \cdot r.$$

Пусть S — площадь поперечного сечения проволоки, из которой изготовили 12 рёбер куба, тогда формулы для плотности и удельного сопротивления можно записать в виде

$$m = 12 \cdot \rho \cdot Sa \quad \text{и} \quad r = \mu \cdot \frac{a}{S},$$

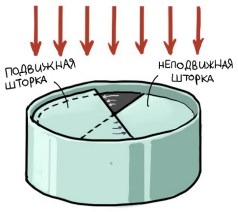
откуда находим сопротивление одного ребра:

$$r = \frac{12\mu\rho a^2}{m}.$$

После подстановки получаем окончательный ответ:

$$R = \frac{5}{6} \cdot r = \frac{10\mu\rho a^2}{m} = 2{,}72 \text{ мОм} \approx 2{,}7 \text{ мОм}.$$

11.10. На круглое входное отверстие светочувствительного детектора диаметром 2 см падает свет с плотностью потока энергии (мощностью на единицу поверхности) 1 мВт/см^2. На отверстие установлено устройство (шторки), представляющее собой два полукруга. Один из полукругов фиксирован, закрывая половину входного отверстия детектора, а второй непрерывно вращается с постоянной угловой скоростью. В момент времени, когда положение обоих полукругов совпадает, детектор получает максимальный световой поток, а в противоположной позиции световой поток полностью перекрывается.



Какова энергия света, попавшего в детектор за время $T = 10$ с? Считайте, что за это время подвижная шторка сделала целое количество полных оборотов. Ответ выразите в мДж, округлив до 3 значащих цифр. (*С. Н. Сашов*)

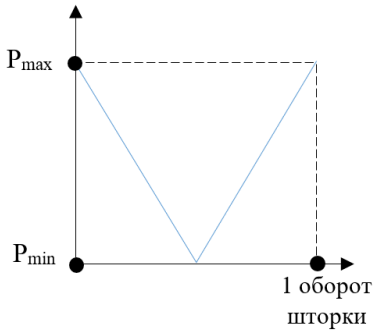
Ответ: 7,85 мДж.

Решение. Когда обе шторки максимально раздвинуты, они оставляют открытым половину входного отверстия. Значит максимальная мощность света, попадающего в детектор, будет равна

$$P_{max} = 1 \cdot \frac{\pi R^2}{2} = 1 \cdot \frac{3{,}14 \cdot 1}{2} = 1{,}57 \text{ мВт},$$

где R — радиус входного отверстия детектора, равный половине диаметра. Очевидно, что минимальная мощность будет, когда обе шторки вместе закрывают всё входное отверстие: $P_{min} = 0$.

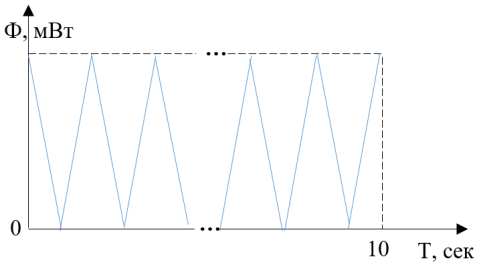
Если предположить, что в начальный момент времени шторка была максимально раздвинута, то график изменения мощности света будет таким, как на рисунке.



По графику видно, что средняя мощность будет равна половине максимальной мощности:

$$\langle P \rangle = \frac{P_{max}}{2} = \frac{1{,}57}{2} = 0{,}785 \text{ мВт}.$$

Нам известно, что за 10 секунд шторка совершила целое число оборотов, значит средняя мощность за этот период будет также равна половине максимальной (см. рисунок).



Получается, что вошедшая в детектор энергия

$$W = \langle P \rangle \cdot T = 0{,}785 \cdot 10 = 7{,}85 \text{ мДж}.$$