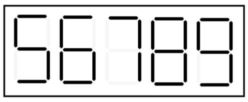
Olimpiada Matemática Internacional
"Fórmula de la Unidad" / "El Tercer Milenio"
Curso escolar 2020–2021. Primera Fase

Problemas para el nivel R5

Envía tu documento de soluciones en el formulario de la página web formulo.org/ru/olymp/2020-math-en/ (por ejemplo, como un documento .doc de texto o un documento escaneado). La fecha límite para el envío es **12 November 2020**. Recuerda que tus soluciones de los problemas deben ser de trabajo personal. La mayoría de los problemas requieren no solo una respuesta sino todo un procedimiento. Las soluciones no deben contener datos personales, es decir, **no debes firmar tus soluciones**.

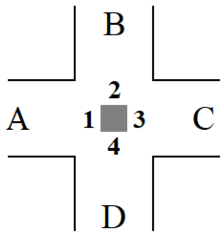
---

1. El número 56789 está pintado en un papel con dígitos electrónicos. Demuestra cómo debemos cortar este papel en tres partes y sumar los números entre ellos para obtener 170. (*A. Tesler*)



2. Un día, todos los 91 participantes de un campamento de verano "Formula of Unity" decidieron ir al cine. Hace un año ellos habían podido caber en 8 filas (pero no en 7). Sin embargo, ahora cada cuarto lugar debería quedar vacío debido a las restricciones médicas (eso significa que, en cada fila, todos los sitios con números divisibles por 4 deberían estar vacías). Como consecuencia, un participante no cabe ahora en la sala del cine. Se sabe que la cantidad de lugares en cada fila es la misma. Determina cuántas filas hay en la sala y cúantos asientos contiene cada fila. (*P. Mulenko*)

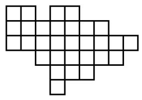
3. Una Piedra Guía (losa) se encuentra en una intersección, y tiene en cada lado una placa con un mensaje (en la figura se muestran las placas numeradas 1–4). Las inscripciones en cada placa son:



1	2	3	4
← tesoro	← muerte	← ciudad	← ciudad
↑ muerte	↑ ciudad	↑ muerte	↑ dragón
→ ciudad	→ dragón	→ dragón	→ muerte

Pero solo una persona sabia puede usar la Piedra Guía, porque, en cada placa, exactamente una de las tres líneas son falsas. ¿Puedes determinar qué carretera va a la ciudad, cuál a la muerte, cuál al dragón, y cuál al tesoro? Razona tu respuesta. (*P. Mulenko*)

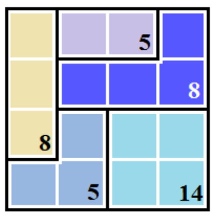
4. Demuestre cómo dividir esta figura en cinco partes iguales. Dos partes son iguales si podemos recolocar (y quizás reflejar) una y coincide sobre la otra. (*O. Pyaive*)



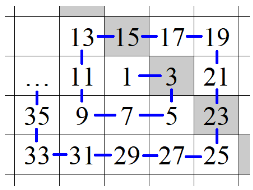
5. Tom y Jerry tienen cartas con los números 1, 2, 3, 4, y 5 (cada número en una carta). Ellos juegan de forma que: cada unos de ellos toman una carta por turnos (Tom es el primero). Cuando toman todas las cartas, comprueban. Si uno de ellos tiene un conjunto de cartas donde la diferencia de dos números es igual a un número del mismo conjunto que tiene, Tom gana. En caso contrario, Jerry gana.
a) ¿Puede Tom actuar para ganar sin tener en cuenta las acciones de Jerry?
b) ¿Hay alguna oportunidad para Jerry de ganar si Tom no quiere ganar? (*L. Koreshkova*)

6. KenKen es una de las variedades de Sudoku. Dividimos un tablero KenKen en "cajas" (grupo de celdas del mismo color, limitados por un borde grueso), y asignamos la suma de los números en cada caja. Por ejemplo, el KenKen mostrado a la derecha debería ser rellenado por los números del 1 al 4 de la siguient forma:
   - cada número del 1 al 4 debe aparecer en cada fila y columna;
   - la suma de los dígitos de cada caja debe ser igual al número especificado.

   Este KenKen puede tener mas de una solución. ¿Cuántas exactamente? (*P. Mulenko*)



7. Todos los enteros positivos impares consecutivos son escritos en una espiral como se muestra en la figura. Llamamos *bueno* los números 3, 15 y otros dispuestos en la misma línea (subrayados de color gris). Los organizamos en orden ascendente: 3, 15, 23, 43... Encuenta el 2020º número de esta secuencia. (*A. R. Arab*)



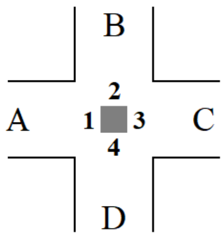
Olimpiada Matemática Internacional
"Fórmula de la Unidad" / "El Tercer Milenio"
Curso escolar 2020–2021. Primera Fase

Problemas para el nivel R6

Envía tu documento de soluciones en el formulario de la página web formulo.org/ru/olymp/2020-math-en/ (por ejemplo, como un documento .doc de texto o un documento escaneado). La fecha límite para el envío es **12 November 2020**. Recuerda que tus soluciones de los problemas deben ser de trabajo personal. La mayoría de los problemas requieren no solo una respuesta sino todo un procedimiento. Las soluciones no deben contener datos personales, es decir, **no debes firmar tus soluciones**.

---

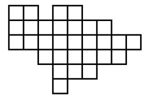
1. Una Piedra Guía (losa) se encuentra en una intersección, y tiene en cada lado una placa con un mensaje (en la figura se muestran las placas numeradas 1–4). Las inscripciones en cada placa son:



1		2		3		4	
$\leftarrow$	tesoro	$\leftarrow$	muerte	$\leftarrow$	ciudad	$\leftarrow$	ciudad
$\uparrow$	muerte	$\uparrow$	ciudad	$\uparrow$	muerte	$\uparrow$	dragón
$\rightarrow$	ciudad	$\rightarrow$	dragón	$\rightarrow$	dragón	$\rightarrow$	muerte

Pero solo una persona sabia puede usar la Piedra Guía, porque, en cada placa, exactamente una de las tres líneas son falsas. ¿Puedes determinar qué carretera va a la ciudad, cuál a la muerte, cuál al dragón, y cuál al tesoro? Razona tu respuesta. (*P. Mulenko*)

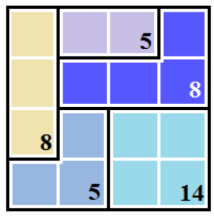
2. Demuestre cómo dividir esta figura en cinco partes iguales. Dos partes son iguales si podemos recolocar (y quizás reflejar) una y coincide sobre la otra. (*O. Pyaive*)



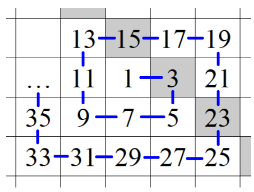
3. A mediodía, dos amigos parten de un gran roble que crece en una carrera recta: uno hacia el Oeste a pie a una velocidad de 4 km/h, y el otro hacia el Este en bicicleta a una velocidad de 16 km/h. Después de un rato, el ciclista volvió y alcanzó a su amigo (que continuaba andando hacia el oeste) a las 15:00. ¿Cuál fue la mayor distacia entre los amigos y en qué momento fue? (*A. Tesler*)

4. KenKen es una de las variedades de Sudoku. Dividimos un tablero KenKen en "cajas" (grupo de celdas del mismo color, limitados por un borde grueso), y asignamos la suma de los números en cada caja. Por ejemplo, el KenKen mostrado a la derecha debería ser rellenado por los números del 1 al 4 de la siguient forma:
   - cada número del 1 al 4 debe aparecer en cada fila y columna;
   - la suma de los dígitos de cada caja debe ser igual al número especificado.

   Este KenKen puede tener mas de una solución. ¿Cuántas exactamente? (*P. Mulenko*)

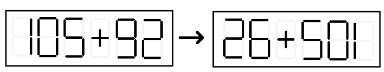


5. Todos los enteros positivos impares consecutivos son escritos en una espiral como se muestra en la figura. Llamamos *bueno* los números 3, 15 y otros dispuestos en la misma línea (subrayados de color gris). Los organizamos en orden ascendente: 3, 15, 23, 43... Encuenta el 2020º número de esta secuencia. (*A. R. Arab*)



6. En la expresión del dibujo leemos $105 + 92$ que es igual a 197. Sin embargo si lo giras boca abajo obtienes $26 + 501$, oque es 527. Encuentra una expresión escrita en dígitos electrónicos, en la cual incrementarías exactamente 2020 veces si le das la vuelta.

   La expresión debe satisfacer las siguientes condiciones:
   - solo dígitos y signos $+$ y $-$ están permitidos;
   - todos los números (incluyendo los vueltos) no pueden empezar por cero;
   - el valor de la expresión debe ser positiva. (*A. Tesler*)



7. Disponemos de minas en algunas celdas de una tabla 6×6 table. En 25 2×2 cuadrados, exactamente n contienen un número impar de minas, y las otras contienen una cantidad par. Encuentra todas las posibles n. (*A. Tesler*)

Olimpiada Matemática Internacional
“Fórmula de la Unidad" / “El Tercer Milenio"
Curso escolar 2020–2021. Primera Fase

Problemas para el nivel R7

Envía tu documento de soluciones en el formulario de la página web formulo.org/ru/olymp/2020-math-en/ (por ejemplo, como un documento .doc de texto o un documento escaneado). La fecha límite para el envío es **12 November 2020**. Recuerda que tus soluciones de los problemas deben ser de trabajo personal. La mayoría de los problemas requieren no solo una respuesta sino todo un procedimiento. Las soluciones no deben contener datos personales, es decir, **no debes firmar tus soluciones**.

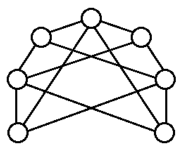
---

1. A mediodía, dos amigos parten de un gran roble que crece en una carrera recta: uno hacia el Oeste a pie a una velocidad de 4 km/h, y el otro hacia el Este en bicicleta a una velocidad de 16 km/h. Después de un rato, el ciclista volvió y alcanzó a su amigo (que continuaba andando hacia el oeste) a las 15:00. ¿Cuál fue la mayor distacia entre los amigos y en qué momento fue? (*A. Tesler*)

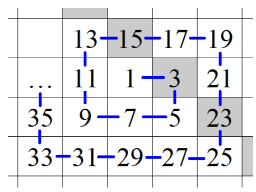
2. Si redondeas el número de porcentajes a entero, resulta que el 51% de los participantes de un círculo matemático son chicos, y 49% son chicas. ¿Cuál es el mínimo número posible de participantes en el círculo? (*O. Pyaive*)

3. Oleg elige un entero positivo m, y Andrew encuentra la suma $1^m + 2^m + 3^m + \ldots + 998^m + 999^m$. Encuentra el último dígito de esta suma. (*O. Pyaive*)

4. Siete círculos están conectados con segmentos como se muestra en la figura. Amir tiene tres lápices — rojo, verde y azul. Él quiere pintar cada círculo de un color de tal forma que dos círculos conectados por un segmento tengan diferentes colores. ¿De cuántas formas puede hacerlo? (*A. R. Arab*)

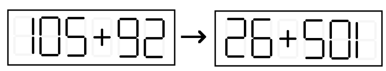


5. Todos los enteros positivos impares consecutivos son escritos en una espiral como se muestra en la figura. Llamamos *bueno* los números 3, 15 y otros dispuestos en la misma línea (subrayados de color gris). Los organizamos en orden ascendente: 3, 15, 23, 43... Encuenta el 2020º número de esta secuencia. (*A. R. Arab*)



6. En la expresión del dibujo leemos 105 + 92 que es igual a 197. Sin embargo si lo giras boca abajo obtienes 26 + 501, oque es 527. Encuentra una expresión escrita en dígitos electrónicos, en la cual incrementarías exactamente 2020 veces si le das la vuelta.

   La expresión debe satisfacer las siguientes condiciones:

   - solo dígitos y signos + y − están permitidos;
   - todos los números (incluyendo los vueltos) no pueden empezar por cero;
   - el valor de la expresión debe ser positiva. (*A. Tesler*)

7. Disponemos de minas en algunas celdas de una tabla 6×6 table. En 25 2×2 cuadrados, exactamente n contienen un número impar de minas, y las otras contienen una cantidad par. Encuentra todas las posibles n. (*A. Tesler*)

Olimpiada Matemática Internacional
"Fórmula de la Unidad" / "El Tercer Milenio"
Curso escolar 2020–2021. Primera Fase

Problemas para el nivel R8

Envía tu documento de soluciones en el formulario de la página web formulo.org/ru/olymp/2020-math-en/ (por ejemplo, como un documento .doc de texto o un documento escaneado). La fecha límite para el envío es **12 November 2020**. Recuerda que tus soluciones de los problemas deben ser de trabajo personal. La mayoría de los problemas requieren no solo una respuesta sino todo un procedimiento. Las soluciones no deben contener datos personales, es decir, **no debes firmar tus soluciones**.

---

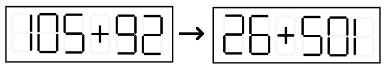
1. Si redondeas el número de porcentajes a entero, resulta que el 51% de los participantes de un círculo matemático son chicos, y 49% son chicas. ¿Cuál es el mínimo número posible de participantes en el círculo? (*O. Pyaive*)

2. Oleg elige un entero positivo m, y Andrew encuentra la suma $1^m + 2^m + 3^m + \ldots + 998^m + 999^m$. Encuentra el último dígito de esta suma. (*O. Pyaive*)

3. En un triángulo ABC, un segmento AD es una bisectriz. Los puntos E y F están en los lados AB y AC respectivamente, y $\angle AEF = \angle ACB$. Los puntos I y J son los incentros de los triángulos AEF y BDE respectivamente. Calcula $\angle EID + \angle EJD$. (*Amir Reza Arab*)

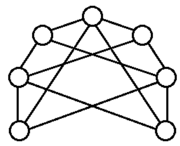
4. En la expresión del dibujo leemos $105 + 92$ que es igual a 197. Sin embargo si lo giras boca abajo obtienes $26 + 501$, oque es 527. Encuentra una expresión escrita en dígitos electrónicos, en la cual incrementarías exactamente 2020 veces si le das la vuelta.

   La expresión debe satisfacer las siguientes condiciones:

   - solo dígitos y signos + y − están permitidos;
   - todos los números (incluyendo los vueltos) no pueden empezar por cero;
   - el valor de la expresión debe ser positiva. (*A. Tesler*)

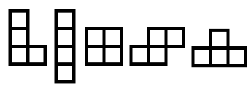
5. Siete círculos están conectados con segmentos como se muestra en la figura. Amir tiene tres lápices — rojo, verde y azul. Él quiere pintar cada círculo de un color de tal forma que dos círculos conectados por un segmento tengan diferentes colores. ¿De cuántas formas puede hacerlo? (*A. R. Arab*)

6. Pablo escribió un número entero en cada cara de un cubo. Después de ello, en cada vértice, Vincent escribió el producto de los números de las tres caras adyacentes. La suma de todos los productos de Vincent es igual a 2020. Busca todos los posibles valores de la suma de los números escritos por Pablo. (*P. Mulenko*)

7. Hay 35 estudiantes en una clase. Durante el curso escolar, cada estudiante tuvo al menos 67 de las 100 lecciones de Matemáticas. Probar que podemos encontar tres lecciones tales que la hubiesen tenido al menos uno los estudiantes. (*K. Knop*)

8. Tenemos cinco tipos de figuras compuestas por cuatro cuadrados (tetraminós), como en la figura. Un cuadrado es cortado en tetraminós de forma que los cinco tipos son usados la misma cantidad de veces. Encuentra la mínima longitud del lado de este cuadrado. (*I. Tumanova*)

Olimpiada Matemática Internacional
“Fórmula de la Unidad" / “El Tercer Milenio"
Curso escolar 2020–2021. Primera Fase

Problemas para el nivel R9

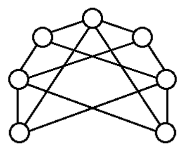
Envía tu documento de soluciones en el formulario de la página web formulo.org/ru/olymp/2020-math-en/ (por ejemplo, como un documento .doc de texto o un documento escaneado). La fecha límite para el envío es **12 November 2020**. Recuerda que tus soluciones de los problemas deben ser de trabajo personal. La mayoría de los problemas requieren no solo una respuesta sino todo un procedimiento. Las soluciones no deben contener datos personales, es decir, **no debes firmar tus soluciones**.

---

1. Si redondeas el número de porcentajes a entero, resulta que el 51% de los participantes de un círculo matemático son chicos, y 49% son chicas. ¿Cuál es el mínimo número posible de participantes en el círculo? (*O. Pyaive*)

2. La línea media de un triángulo (línea que une los puntos medios de dos lados del triángulo) lo divide en dos partes — un triángulo y un trapezoide. Este trapezoide es también dividido en dos partes por su línea media. Como resulado, obtenmos tres partes — un triángulo y dos trapezoides. Las áreas de dos de estas tres partes son números enteros. Probar que el área de la tercera parte es también un número entero. (*A. Tesler*)

3. Siete círculos están conectados con segmentos como se muestra en la figura. Amir tiene tres lápices — rojo, verde y azul. Él quiere pintar cada círculo de un color de tal forma que dos círculos conectados por un segmento tengan diferentes colores. ¿De cuántas formas puede hacerlo? (*A. R. Arab*)



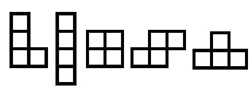
4. CF es una bisectriz de un triángulo ABC. Elegimos el punto O en CF tal que $FO \cdot FC = FB^2$. E es el punto intersección de BO y AC. Prueba que $FB = FE$. (*O. Pyaive*)

5. Pablo escribió un número entero en cada cara de un cubo. Después de ello, en cada vértice, Vincent escribió el producto de los números de las tres caras adyacentes. La suma de todos los productos de Vincent es igual a 2020. Busca todos los posibles valores de la suma de los números escritos por Pablo. (*P. Mulenko*)

6. Hay 35 estudiantes en una clase. Durante el curso escolar, cada estudiante tuvo al menos 67 de las 100 lecciones de Matemáticas. Probar que podemos encontar tres lecciones tales que la hubiesen tenido al menos uno los estudiantes. (*K. Knop*)

7. Tenemos enteros positivos a, b, x, y tales que $a < b$, $x < a(a+b)$, $y < a(a+b)$. Llamamos a la cuaterna (a, b, x, y) *rara* si x es divisible por a, y ies divisible por b, $x + y$ es divisible por $a + b$, pero $x - y$ no es divisible por $a - b$.
   a) ¿Hay alguna cuaterna rara en el cual a y b sean primos relativos?
   b) ¿Hay alguna cuaterna rara en el cual a y b no ean primos relativos? (*O. Pyaive*)

8. Tenemos cinco tipos de figuras compuestas por cuatro cuadrados (tetraminós), como en la figura. Un cuadrado es cortado en tetraminós de forma que los cinco tipos son usados la misma cantidad de veces. Encuentra la mínima longitud del lado de este cuadrado. (*I. Tumanova*)



Olimpiada Matemática Internacional
“Fórmula de la Unidad" / “El Tercer Milenio"
Curso escolar 2020–2021. Primera Fase

Problemas para el nivel R10

Envía tu documento de soluciones en el formulario de la página web formulo.org/ru/olymp/2020-math-en/ (por ejemplo, como un documento .doc de texto o un documento escaneado). La fecha límite para el envío es **12 November 2020**. Recuerda que tus soluciones de los problemas deben ser de trabajo personal. La mayoría de los problemas requieren no solo una respuesta sino todo un procedimiento. Las soluciones no deben contener datos personales, es decir, **no debes firmar tus soluciones**.

---

1. Si redondeas el número de porcentajes a entero, resulta que el 51% de los participantes de un círculo matemático son chicos, y 49% son chicas. ¿Cuál es el mínimo número posible de participantes en el círculo? (*O. Pyaive*)

2. Encuentra todos los trinomios cuadráticos $f(x)$, tales que los polinomios $f^2(x)$ y $f(x^2)$ tengan el mismo conjunto no vacío de raíces reales. (*A. Solynin*)

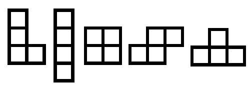
3. Al mediodía, tres jinetes partieron de un gran roble que crece en la mitad de un campo. EL primero cabalgó hacia el sur a una velocidad de 20 km/h, y el segundo — hacia el oeste a una velocidad de 30 km/h, el tercero — hacia el este a una velocidad de 40 km/h. El segundo y el tercero se volvieron en algunos momentos de forma que, cabalgando en línea recta, se encontraron con el primero (quien continuaba dirección sur) exactamente a las 15:00. ¿Quién se volvió antes y cuántos minutos antes? (*A. Tesler basado en la antigua tarea China*)

4. Hay 35 estudiantes en una clase. Durante el curso escolar, cada estudiante tuvo al menos 67 de las 100 lecciones de Matemáticas. Probar que podemos encontar tres lecciones tales que la hubiesen tenido al menos uno los estudiantes. (*K. Knop*)

5. Tenemos enteros positivos a, b, x, y tales que $a < b$, $x < a(a+b)$, $y < a(a+b)$. Llamamos a la cuaterna (a, b, x, y) *rara* si x es divisible por a, y ies divisible por b, $x+y$ es divisible por $a+b$, pero $x-y$ no es divisible por $a-b$.
   a) ¿Hay alguna cuaterna rara en el cual a y b sean primos relativos?
   b) ¿Hay alguna cuaterna rara en el cual a y b no ean primos relativos? (*O. Pyaive*)

6. Pablo escribió un número entero en cada cara de un cubo. Después de ello, en cada vértice, Vincent escribió el producto de los números de las tres caras adyacentes. La suma de todos los productos de Vincent es igual a 2020. ¿Cuántos conjuntos diferentes de números podría escribir Pablo al principio? (*P. Mulenko*)

7. Tenemos cinco tipos de figuras compuestas por cuatro cuadrados (tetraminós), como en la figura. Un cuadrado es cortado en tetraminós de forma que los cinco tipos son usados la misma cantidad de veces. Encuentra la mínima longitud del lado de este cuadrado. (*I. Tumanova*)



8. Un polígono regular de n lados está inscrito en una circunferencia de radio R. El punto M se puede mover por esta circunferencia, y para cada posición de M, consideramos la suma de las distancias del punto M a las líneas que contienen los n lados del polígono respectivamente. Encuentra todas las posiciones del punto M para que esta suma sea mínima. (*O. Pyaive*)

Olimpiada Matemática Internacional
“Fórmula de la Unidad" / “El Tercer Milenio"
Curso escolar 2020–2021. Primera Fase

Problemas para el nivel R11

Envía tu documento de soluciones en el formulario de la página web formulo.org/ru/olymp/2020-math-en/ (por ejemplo, como un documento .doc de texto o un documento escaneado). La fecha límite para el envío es **12 November 2020**. Recuerda que tus soluciones de los problemas deben ser de trabajo personal. La mayoría de los problemas requieren no solo una respuesta sino todo un procedimiento. Las soluciones no deben contener datos personales, es decir, **no debes firmar tus soluciones**.

---

1. Si redondeas el número de porcentajes a entero, resulta que el 51% de los participantes de un círculo matemático son chicos, y 49% son chicas. ¿Cuál es el mínimo número posible de participantes en el círculo? (*O. Pyaive*)

2. Al mediodía, tres jinetes partieron de un gran roble que crece en la mitad de un campo. EL primero cabalgó hacia el sur a una velocidad de 20 km/h, y el segundo — hacia el oeste a una velocidad de 30 km/h, el tercero — hacia el este a una velocidad de 40 km/h. El segundo y el tercero se volvieron en algunos momentos de forma que, cabalgando en línea recta, se encontraron con el primero (quien continuaba dirección sur) exactamente a las 15:00. ¿Quién se volvió antes y cuántos minutos antes? (*A. Tesler basado en la antigua tarea China*)

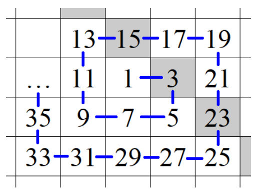
3. Hay 35 estudiantes en una clase. Durante el curso escolar, cada estudiante tuvo al menos 67 de las 100 lecciones de Matemáticas. Probar que podemos encontar tres lecciones tales que la hubiesen tenido al menos uno los estudiantes. (*K. Knop*)

4. Pablo escribió un número entero en cada cara de un cubo. Después de ello, en cada vértice, Vincent escribió el producto de los números de las tres caras adyacentes. La suma de todos los productos de Vincent es igual a 2020. ¿Cuántos conjuntos diferentes de números podría escribir Pablo al principio? (*P. Mulenko*)

5. Un polinomio de grado $n = 2k$ con coeficientes reales es una función par. ¿Cuántas raíces puede tener? (*A. Tesler*)

6. Probar que $2\sin^2(\sin x) \geqslant \sin^2 x$. (Medimos el argumento de la función seno en radianes.) (*O. Pyaive*)

7. Todos los enteros positivos impares consecutivos son escritos en una espiral como se muestra en la figura. Llamamos *bueno* los números 3, 15 y otros dispuestos en la misma línea (subrayados de color gris). Los organizamos en orden ascendente: 3, 15, 23, 43... Encuenta la suma de los primeros 2020 números buenos. (*A. R. Arab*)



8. Un polígono regular de n lados está inscrito en una circunferencia de radio R. El punto M se puede mover por esta circunferencia, y para cada posición de M, consideramos la suma de las distancias del punto M a las líneas que contienen los n lados del polígono respectivamente. Encuentra todas las posiciones del punto M para que esta suma sea mínima. (*O. Pyaive*)