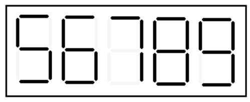
Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2020–2021 учебный год. Отборочный этап

Задачи для 5 класса

Работы сдаются в электронном виде (например, в виде doc-файлов с текстом или сканов), подробности на странице formulo.org/ru/olymp/2020-math-ru/. Последний день сдачи — **12 ноября 2020 года**.
Работы должны быть сделаны самостоятельно. В большинстве задач нужны не только ответы, но и полные обоснования. В работе не должны содержаться личные данные участника, то есть **подписывать работу не следует**.

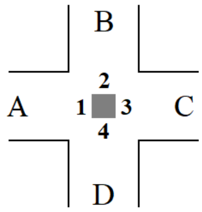
---

1. На бумажке электронными цифрами напечатано число 56789. Как разрезать бумажку на три части и сложить числа, написанные на этих частях, чтобы получилась сумма 170? (*А. А. Теслер*)



2. Однажды все 91 участник летнего лагеря «Формула Единства» решили сходить в кино. Прошлым летом они бы поместились в 8 рядов кинозала (но не в 7). Однако этим летом каждое четвёртое кресло (то есть каждое кресло, номер которого в ряду делится на 4) должно оставаться пустым, поэтому один участник не поместился в кинозале. Сколько рядов в зале и сколько кресел в каждом из них, если во всех рядах поровну мест? (*П. Д. Муленко*)

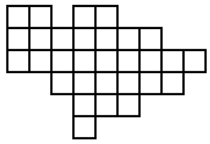
3. На перекрёстке стоит путеводный камень, а с каждой стороны к нему прикреплена табличка (на схеме таблички показаны цифрами). Вот что написано на табличках:



1	2	3	4
← клад	← смерть	← столица	← столица
↑ смерть	↑ столица	↑ смерть	↑ змей
→ столица	→ змей	→ змей	→ смерть

Но воспользоваться камнем может лишь настоящий богатырь, ведь на каждой табличке ровно одна из трёх строчек — ложная. А вы сумеете определить, какая дорога ведёт к смерти, какая к змею, какая в столицу, а какая к кладу? Не забудьте объяснить, почему. (*П. Д. Муленко*)

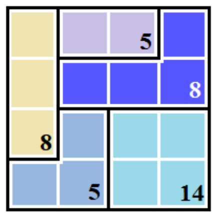
4. Покажите, как разрезать изображённую фигуру на пять одинаковых частей. (Части называются одинаковыми, если их можно совместить, наложив одну на другую; возможно, для этого понадобится перевернуть одну из них). (*О. А. Пяйве*)



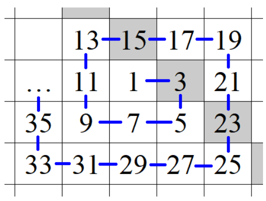
5. У Пети и Васи есть карточки с числами 1, 2, 3, 4 и 5 (по одной карточке с каждым числом). Они играют в игру: каждый выбирает себе по очереди число, начинает Петя. Когда все карточки разобраны, проверяют: если у кого-то получился набор, в котором разность двух каких-то чисел равна какому-то числу из этого же набора, то выигрывает Петя. Иначе выигрывает Вася.
а) Может ли Петя действовать так, чтобы выиграть при любых действиях Васи?
б) Может ли Вася выиграть, если Петя будет поддаваться? (*Л. С. Корешкова*)

6. В одной из разновидностей классической головоломки «судоку», которая называется «сумдоку», вместо некоторых цифр даются суммы некоторых групп клеток. Например, в сумдоку, показанном справа, нужно расставить в таблице числа от 1 до 4 так, чтобы:
   - в каждой строке и в каждом столбце все числа были различны;
   - сумма цифр в каждой цветной группе равнялась указанному в ней числу.

   Оказывается, это сумдоку имеет более одного решения. А сколько именно? (*П. Д. Муленко*)



7. Последовательные нечётные натуральные числа выписывают «по спирали», как показано на рисунке. Числа 3, 15 и остальные, находящиеся вместе с ними на одной прямой, назовём хорошими (на рисунке они выделены серым). Если упорядочить хорошие числа по возрастанию (3, 15, 23, 43...), то чему равно 2020-е число в этом ряду? (*А. Р. Араб*)



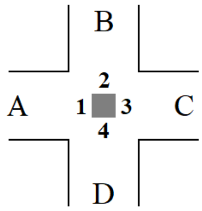
Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2020–2021 учебный год. Отборочный этап

Задачи для 6 класса

Работы сдаются в электронном виде (например, в виде doc-файлов с текстом или сканов), подробности на странице formulo.org/ru/olymp/2020-math-ru/. Последний день сдачи — **12 ноября 2020 года**.
Работы должны быть сделаны самостоятельно. В большинстве задач нужны не только ответы, но и полные обоснования. В работе не должны содержаться личные данные участника, то есть **подписывать работу не следует**.

---

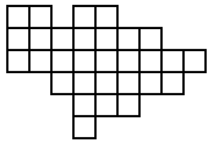
1. На перекрёстке стоит путеводный камень, а с каждой стороны к нему прикреплена табличка (на схеме таблички показаны цифрами). Вот что написано на табличках:



1	2	3	4
← клад	← смерть	← столица	← столица
↑ смерть	↑ столица	↑ смерть	↑ змей
→ столица	→ змей	→ змей	→ смерть

Но воспользоваться камнем может лишь настоящий богатырь, ведь на каждой табличке ровно одна из трёх строчек — ложная. А вы сумеете определить, какая дорога ведёт к смерти, какая к змею, какая в столицу, а какая к кладу? Не забудьте объяснить, почему. (*П. Д. Муленко*)

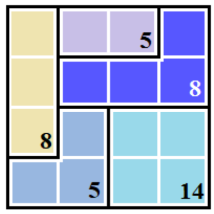
2. Покажите, как разрезать изображённую фигуру на пять одинаковых частей. (Части называются одинаковыми, если их можно совместить, наложив одну на другую; возможно, для этого понадобится перевернуть одну из них). (*О. А. Пяйве*)



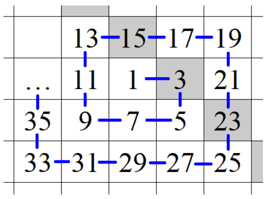
3. В полдень от большого дуба, растущего у прямой дороги, отправились в путь два друга: один на запад пешком со скоростью 4 км/ч, а второй на восток на велосипеде со скоростью 16 км/ч. Через некоторое время велосипедист повернул обратно и догнал друга (который продолжал идти на запад) в три часа дня. На какое наибольшее расстояние друг от друга отдалялись друзья и в какой момент это было? (*А. А. Теслер*)

4. В одной из разновидностей классической головоломки «судоку», которая называется «сумдоку», вместо некоторых цифр даются суммы некоторых групп клеток. Например, в сумдоку, показанном справа, нужно расставить в таблице числа от 1 до 4 так, чтобы:
   - в каждой строке и в каждом столбце все числа были различны;
   - сумма цифр в каждой цветной группе равнялась указанному в ней числу.

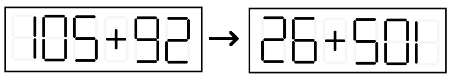
   Оказывается, это сумдоку имеет более одного решения. А сколько именно? (*П. Д. Муленко*)



5. Последовательные нечётные натуральные числа выписывают «по спирали», как показано на рисунке. Числа 3, 15 и остальные, находящиеся вместе с ними на одной прямой, назовём хорошими (на рисунке они выделены серым). Если упорядочить хорошие числа по возрастанию (3, 15, 23, 43...), то чему равно 2020-е число в этом ряду? (*А. Р. Араб*)



6. Выражение, записанное на картинке, читается как $105+92$, то есть равно 197. Но если перевернуть карточку, то получится $26+501$, то есть 527. Придумайте такое выражение, записанное электронными цифрами, которое при переворачивании увеличится ровно в 2020 раз.
   При этом должны выполняться следующие условия:
   - разрешены только цифры и знаки + и −;
   - ни одно число (в том числе и после переворачивания) не может начинаться с нуля;
   - окончательный результат должен быть положительным. (*А. А. Теслер*)



7. В некоторых клетках квадрата 6×6 стоят мины так, что из 25 квадратов 2×2 ровно в n квадратах количество мин нечётно, а в остальных чётно. Чему может равняться[*] n? (*А. А. Теслер*)

---

[*] Такая формулировка вопроса означает, что нужно найти *все возможные* ответы на заданный вопрос; кроме этого, из решения должно быть ясно, почему никаких других ответов быть не может.

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2020–2021 учебный год. Отборочный этап

Задачи для 7 класса

Работы сдаются в электронном виде (например, в виде doc-файлов с текстом или сканов), подробности на странице formulo.org/ru/olymp/2020-math-ru/. Последний день сдачи — **12 ноября 2020 года**.
Работы должны быть сделаны самостоятельно. В большинстве задач нужны не только ответы, но и полные обоснования. В работе не должны содержаться личные данные участника, то есть **подписывать работу не следует**.

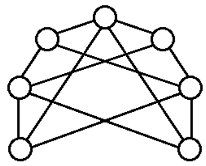
---

1. В полдень от большого дуба, растущего у прямой дороги, отправились в путь два друга: один на запад пешком со скоростью 4 км/ч, а второй на восток на велосипеде со скоростью 16 км/ч. Через некоторое время велосипедист повернул обратно и догнал друга (который продолжал идти на запад) в три часа дня. На какое наибольшее расстояние друг от друга отдалялись друзья и в какой момент это было? (*А. А. Теслер*)

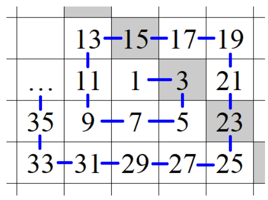
2. Если округлять количество процентов до целых, то получится, что среди участников математического кружка 51% составляют мальчики, а 49% — девочки. Каково минимально возможное количество участников кружка? (*О. А. Пяйве*)

3. Олег назвал натуральное число m, а Андрей нашёл сумму $1^m + 2^m + 3^m + \ldots + 998^m + 999^m$. Какой цифрой оканчивается десятичная запись этой суммы? (*О. А. Пяйве*)

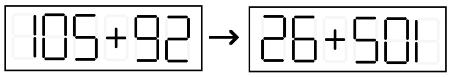
4. Семь кружков соединены отрезками, как показано на рисунке. У Амира есть три карандаша — красный, зелёный и синий. Он хочет закрасить каждый кружок одним из карандашей, причём никакие два кружка, соединённые отрезком, не должны быть одного цвета. Сколькими способами он может это сделать? (*А. Р. Араб*)



5. Последовательные нечётные натуральные числа выписывают «по спирали», как показано на рисунке. Числа 3, 15 и остальные, находящиеся вместе с ними на одной прямой, назовём хорошими (на рисунке они выделены серым). Если упорядочить хорошие числа по возрастанию (3, 15, 23, 43...), то чему равно 2020-е число в этом ряду? (*А. Р. Араб*)



6. Выражение, записанное на картинке, читается как $105+92$, то есть равно 197. Но если перевернуть карточку, то получится $26 + 501$, то есть 527. Придумайте такое выражение, записанное электронными цифрами, которое при переворачивании увеличится ровно в 2020 раз.
При этом должны выполняться следующие условия:
   - разрешены только цифры и знаки $+$ и $-$;
   - ни одно число (в том числе и после переворачивания) не может начинаться с нуля;
   - окончательный результат должен быть положительным. (*А. А. Теслер*)



7. В некоторых клетках квадрата 6×6 стоят мины так, что из 25 квадратов 2×2 ровно в n квадратах количество мин нечётно, а в остальных чётно. Чему может равняться* n? (*А. А. Теслер*)

---

* Такая формулировка вопроса означает, что нужно найти *все возможные* ответы на заданный вопрос; кроме этого, из решения должно быть ясно, почему никаких других ответов быть не может.

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2020–2021 учебный год. Отборочный этап

Задачи для 8 класса

Работы сдаются в электронном виде (например, в виде doc-файлов с текстом или сканов), подробности на странице formulo.org/ru/olymp/2020-math-ru/. Последний день сдачи — **12 ноября 2020 года**.
Работы должны быть сделаны самостоятельно. В большинстве задач нужны не только ответы, но и полные обоснования. В работе не должны содержаться личные данные участника, то есть **подписывать работу не следует**.

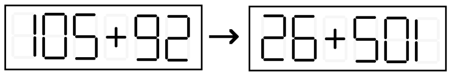
---

1. Если округлять количество процентов до целых, то получится, что среди участников математического кружка 51% составляют мальчики, а 49% — девочки. Каково минимально возможное количество участников кружка? *(О. А. Пяйве)*

2. Олег назвал натуральное число m, а Андрей нашёл сумму $1^m + 2^m + 3^m + \ldots + 998^m + 999^m$. Какой цифрой оканчивается десятичная запись этой суммы? *(О. А. Пяйве)*

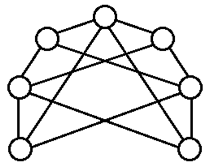
3. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD. На сторонах AB и AC отмечены точки E и F соответственно, причём $\angle AEF = \angle ACB$. Точки I и J — точки пересечения биссектрис треугольников AEF и BDE соответственно. Найдите $\angle EID + \angle EJD$. *(А. Р. Араб)*

4. Выражение, записанное на картинке, читается как $105+92$, то есть равно 197. Но если перевернуть карточку, то получится $26 + 501$, то есть 527. Придумайте такое выражение, записанное электронными цифрами, которое при переворачивании увеличится ровно в 2020 раз.



При этом должны выполняться следующие условия:
- разрешены только цифры и знаки + и −;
- ни одно число (в том числе и после переворачивания) не может начинаться с нуля;
- окончательный результат должен быть положительным. *(А. А. Теслер)*

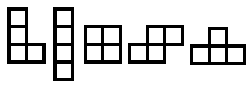
5. Семь кружков соединены отрезками, как показано на рисунке. У Амира есть три карандаша — красный, зелёный и синий. Он хочет закрасить каждый кружок одним из карандашей, причём никакие два кружка, соединённые отрезком, не должны быть одного цвета. Сколькими способами он может это сделать? *(А. Р. Араб)*



6. Паша написал на каждой грани куба натуральное число. Пришёл Андрей и написал в каждой вершине произведение трёх чисел на сходящихся в ней гранях. Оказалось, что сумма всех чисел Андрея равна 2020. Укажите все возможные значения суммы Пашиных чисел. *(П. Д. Муленко)*

7. В классе учится 35 учеников. За год каждый ученик посетил не менее 67 из 100 уроков математики. Докажите, что в течение учебного года можно выделить такие 3 урока, что каждый ученик посетил хотя бы один из них. *(К. А. Кноп)*

8. Некто разрезал квадрат на тетрамино, причём все пять видов тетрамино (см. рисунок) оказались использованы одинаковое количество раз. Какова минимально возможная сторона квадрата? *(И. М. Туманова)*



Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2020–2021 учебный год. Отборочный этап

Задачи для 9 класса

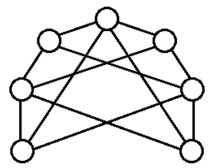
Работы сдаются в электронном виде (например, в виде doc-файлов с текстом или сканов), подробности на странице formulo.org/ru/olymp/2020-math-ru/. Последний день сдачи — **12 ноября 2020 года**.
Работы должны быть сделаны самостоятельно. В большинстве задач нужны не только ответы, но и полные обоснования. В работе не должны содержаться личные данные участника, то есть **подписывать работу не следует**.

---

1. Если округлять количество процентов до целых, то получится, что среди участников математического кружка 51% составляют мальчики, а 49% — девочки. Каково минимально возможное количество участников кружка? (*О. А. Пяйве*)

2. Средняя линия разрезает треугольник на две части — треугольник и трапецию. В этой трапеции также проведена средняя линия. В результате исходный треугольник разрезан на три части — треугольник и две трапеции. Докажите, что если две из этих трёх частей имеют целые площади, то площадь третьей части тоже равна целому числу. (*А. А. Теслер*)

3. Семь кружков соединены отрезками, как показано на рисунке. У Амира есть три карандаша — красный, зелёный и синий. Он хочет закрасить каждый кружок одним из карандашей, причём никакие два кружка, соединённые отрезком, не должны быть одного цвета. Сколькими способами он может это сделать? (*А. Р. Араб*)



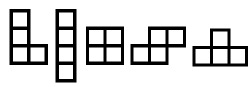
4. В треугольнике ABC проведена биссектриса CF. На ней отмечена точка O так, что $FO \cdot FC = FB^2$. BO пересекает AC в точке E. Докажите, что $FB = FE$. (*О. А. Пяйве*)

5. Паша написал на каждой грани куба натуральное число. Пришёл Андрей и написал в каждой вершине произведение трёх чисел на сходящихся в ней гранях. Оказалось, что сумма всех чисел Андрея равна 2020. Укажите все возможные значения суммы Пашиных чисел. (*П. Д. Муленко*)

6. В классе учится 35 учеников. За год каждый ученик посетил не менее 67 из 100 уроков математики. Докажите, что в течение учебного года можно выделить такие 3 урока, что каждый ученик посетил хотя бы один из них. (*К. А. Кноп*)

7. Пусть даны натуральные числа a, b, x и y, причём $a < b$, $x < a(a+b)$ и $y < a(a+b)$. Будем называть четвёрку чисел (a, b, x, y) *странной*, если x делится на a, y делится на b, $x+y$ делится на $a+b$, но $x-y$ не делится на $a-b$.
   а) Существует ли странная четвёрка, в которой a и b взаимно просты?
   б) Существует ли странная четвёрка, в которой a и b не взаимно просты? (*О. А. Пяйве*)

8. Некто разрезал квадрат на тетрамино, причём все пять видов тетрамино (см. рисунок) оказались использованы одинаковое количество раз. Какова минимально возможная сторона квадрата? (*И. М. Туманова*)



Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2020–2021 учебный год. Отборочный этап

Задачи для 10 класса

Работы сдаются в электронном виде (например, в виде doc-файлов с текстом или сканов), подробности на странице formulo.org/ru/olymp/2020-math-ru/. Последний день сдачи — **12 ноября 2020 года**.
Работы должны быть сделаны самостоятельно. В большинстве задач нужны не только ответы, но и полные обоснования. В работе не должны содержаться личные данные участника, то есть **подписывать работу не следует**.

---

1. Если округлять количество процентов до целых, то получится, что среди участников математического кружка 51% составляют мальчики, а 49% — девочки. Каково минимально возможное количество участников кружка? (*О. А. Пяйве*)

2. Найдите все такие квадратные трёхчлены $f(x)$, что многочлены $f^2(x)$ и $f(x^2)$ имеют одинаковое и непустое множество вещественных корней. (*А. А. Солынин*)

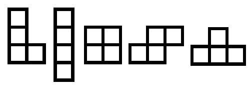
3. От большого дуба, растущего посреди чистого поля, ровно в полдень отправились в путь три всадника. Первый поскакал на юг со скоростью 20 вёрст в час, второй — на запад со скоростью 30 вёрст в час, третий — на восток со скоростью 40 вёрст в час. Второй и третий в некоторые моменты свернули так, чтобы, поскакав по прямой, встретить первого (продолжавшего движение на юг) в три часа дня. Кто раньше повернул и на сколько минут? (*А. А. Теслер по мотивам старинной китайской задачи*)

4. В классе учится 35 учеников. За год каждый ученик посетил не менее 67 из 100 уроков математики. Докажите, что в течение учебного года можно выделить такие 3 урока, что каждый ученик посетил хотя бы один из них. (*К. А. Кноп*)

5. Пусть даны натуральные числа a, b, x и y, причём $a < b$, $x < a(a+b)$ и $y < a(a+b)$. Будем называть четвёрку чисел (a, b, x, y) *странной*, если x делится на a, y делится на b, $x+y$ делится на $a+b$, но $x-y$ не делится на $a-b$.
   а) Существует ли странная четвёрка, в которой a и b взаимно просты?
   б) Существует ли странная четвёрка, в которой a и b не взаимно просты? (*О. А. Пяйве*)

6. Паша написал на каждой грани куба натуральное число. Пришёл Андрей и написал в каждой вершине произведение трёх чисел на сходящихся в ней гранях. Оказалось, что сумма всех чисел Андрея равна 2020. Сколько существует различных наборов чисел, которые мог написать Паша? (*П. Д. Муленко*)

7. Некто разрезал квадрат на тетрамино, причём все пять видов тетрамино (см. рисунок) оказались использованы одинаковое количество раз. Какова минимально возможная сторона квадрата? (*И. М. Туманова*)



8. В окружность радиуса R вписан правильный n-угольник. Точка M движется по окружности, и для каждого её положения рассматривается сумма расстояний от M до прямых, содержащих стороны n-угольника. Для каких положений точки M результат окажется минимальным? (*О. А. Пяйве*)

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2020–2021 учебный год. Отборочный этап

Задачи для 11 класса

Работы сдаются в электронном виде (например, в виде doc-файлов с текстом или сканов), подробности на странице formulo.org/ru/olymp/2020-math-ru/. Последний день сдачи — **12 ноября 2020 года**.
Работы должны быть сделаны самостоятельно. В большинстве задач нужны не только ответы, но и полные обоснования. В работе не должны содержаться личные данные участника, то есть **подписывать работу не следует**.

---

1. Если округлять количество процентов до целых, то получится, что среди участников математического кружка 51% составляют мальчики, а 49% — девочки. Каково минимально возможное количество участников кружка? (*О. А. Пяйве*)

2. От большого дуба, растущего посреди чистого поля, ровно в полдень отправились в путь три всадника. Первый поскакал на юг со скоростью 20 вёрст в час, второй — на запад со скоростью 30 вёрст в час, третий — на восток со скоростью 40 вёрст в час. Второй и третий в некоторые моменты свернули так, чтобы, поскакав по прямой, встретить первого (продолжавшего движение на юг) в три часа дня. Кто раньше повернул и на сколько минут? (*А. А. Теслер по мотивам старинной китайской задачи*)

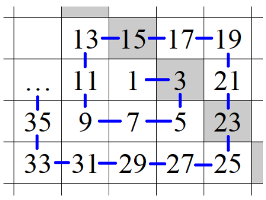
3. В классе учится 35 учеников. За год каждый ученик посетил не менее 67 из 100 уроков математики. Докажите, что в течение учебного года можно выделить такие 3 урока, что каждый ученик посетил хотя бы один из них. (*К. А. Кноп*)

4. Паша написал на каждой грани куба натуральное число. Пришёл Андрей и написал в каждой вершине произведение трёх чисел на сходящихся в ней гранях. Оказалось, что сумма всех чисел Андрея равна 2020. Сколько существует различных наборов чисел, которые мог написать Паша? (*П. Д. Муленко*)

5. Многочлен степени $n = 2k$ с вещественными коэффициентами является чётной функцией. Сколько различных корней он может иметь? (*А. А. Теслер*)

6. Докажите, что $2\sin^2(\sin x) \geqslant \sin^2 x$. (Аргумент функции sin — угол в радианах.) (*О. А. Пяйве*)

7. Последовательные нечётные натуральные числа выписывают «по спирали», как показано на рисунке. Числа 3, 15 и остальные, находящиеся вместе с ними на одной прямой, назовём хорошими (на рисунке они выделены серым). Чему равна сумма 2020 наименьших хороших чисел? (*А. Р. Араб*)



8. В окружность радиуса R вписан правильный n-угольник. Точка M движется по окружности, и для каждого её положения рассматривается сумма расстояний от M до прямых, содержащих стороны n-угольника. Для каких положений точки M результат окажется минимальным? (*О. А. Пяйве*)