

## Problèmes pour les classes R5

Les travaux doivent être soumis sur la page Web suivante [formulo.org/ru/olymp/2020-math-en/](http://formulo.org/ru/olymp/2020-math-en/) (par exemple, sous forme de scans ou de fichiers doc avec texte). La date limite de dépôts de vos travaux est fixée au **12 novembre 2020**. Le travail est individuel et la plupart des problèmes exigent non seulement des réponses, mais aussi des justifications complètes. Le document ne doit pas contenir de données personnelles du participant, c'est-à-dire **le document ne doit pas être signé** par le candidat.

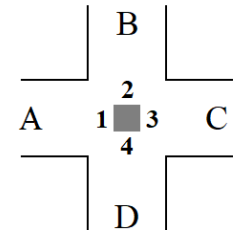
1. Le numéro 56789 est imprimé sur un morceau de papier en chiffres électroniques. Comment découper un morceau de papier en trois parties et additionner les nombres inscrits sur ces parties pour obtenir la somme 170? (A. Tesler)



2. Un jour, les 91 participants du camp d'été Formula Unity ont décidé d'aller au cinéma. L'été dernier, ils rentreraient dans 8 rangées de cinéma (mais pas 7). Cependant, cet été, un siège sur quatre (c'est-à-dire chaque siège divisible par 4 à la suite) doit rester vide, de sorte qu'un participant ne peut pas rentrer dans la salle de cinéma. Combien y en a-t-il dans la salle et combien de chaises y a-t-il dans chacune d'elles, s'il y a des sièges égaux dans toutes les rangées? (P. Mullenko)

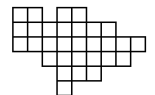
3. Il y a une pierre de guidage à l'intersection, et de chaque côté un signe y est attaché (sur le diagramme, les tablettes sont indiquées en chiffres). Voici ce que disent les panneaux:

1	2	3	4
← trésor	← mort	← capitale	← capitale
↑ mort	↑ capitale	↑ mort	↑ serpent
→ capitale	→ serpent	→ serpent	→ mort



Mais seul un vrai héros peut utiliser la pierre, car sur chaque assiette, exactement l'une des trois lignes est fausse. Et vous pourrez déterminer quelle route mène à la mort, laquelle au serpent, laquelle à la capitale, et laquelle à l'entrepôt? Assurez-vous d'expliquer pourquoi. (P. Mullenko)

4. Montrez comment couper la figure ci-contre en cinq morceaux égaux. (Les parties sont appelées les mêmes si elles peuvent être combinées en superposant l'une sur l'autre; peut-être pour cela il devra en retourner une). (O. Pyaive)



5. Petya et Vasya ont des cartes portant des nombres 1, 2, 3, 4 et 5 (un une carte de chaque). Ils jouent à un jeu: chacun choisit un numéro à son tour, Petya commence. Quand toutes les cartes sont distribuées, si au moins un des deux des cartes, pour lesquelles la différence de deux nombres est égale à un des nombres qu'il a, alors Petya gagne. Sinon Vasya gagne.

- a) Petya peut-il agir de manière à gagner avec l'une des actions de Vasya?  
 b) Vasya peut-il gagner si Petya joue mal?

(L. Koreshkova)

6. Dans l'une des variétés du puzzle sudoku classique, appelé Sumdoku, au lieu de certains nombres, les sommes de certains groupes de cellules sont données. Par exemple, dans le sumdoku ci-contre, il faut placer les nombres de 1 à 4 dans le tableau de sorte que:

			5	
				8
8				
	5			14

- dans chaque ligne et dans chaque colonne, les chiffres soient différents;
- la somme des chiffres de chaque groupe coloré soit égale au nombre qui y est indiqué.

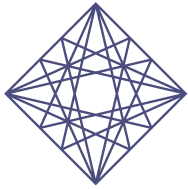
Il s'avère que ce sumdoku a plus d'une solution. Combien exactement?

(P. Mullenko)

7. Les nombres naturels impairs consécutifs sont écrits «en spirale», comme le montre la figure. Les nombres 3, 15 et le reste, qui sont avec eux sur la même ligne droite, seront appelés bons (dans la figure ils sont surlignés en gris). Si nous classons les bons nombres par ordre croissant (3, 15, 23, 43, ...), alors quel est le 2020ème numéro de cette ligne?

		13	15	17	19
		11	1	3	21
...					
35	9	7	5	23	
33	31	29	27	25	

(A. R. Arab)

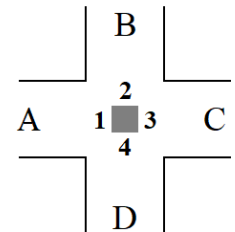


## Problèmes pour les classes R6

Les travaux doivent être soumis sur la page Web suivante [formulo.org/ru/olymp/2020-math-en/](http://formulo.org/ru/olymp/2020-math-en/) (par exemple, sous forme de scans ou de fichiers doc avec texte). La date limite de dépôts de vos travaux est fixée au **12 novembre 2020**. Le travail est individuel et la plupart des problèmes exigent non seulement des réponses, mais aussi des justifications complètes. Le document ne doit pas contenir de données personnelles du participant, c'est-à-dire **le document ne doit pas être signé** par le candidat.

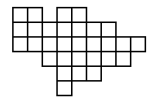
1. Il y a une pierre de guidage à l'intersection, et de chaque côté un signe y est attaché (sur le diagramme, les tablettes sont indiquées en chiffres). Voici ce que disent les panneaux:

1	2	3	4
← trésor	← mort	← capitale	← capitale
↑ mort	↑ capitale	↑ mort	↑ serpent
→ capitale	→ serpent	→ serpent	→ mort



Mais seul un vrai héros peut utiliser la pierre, car sur chaque assiette, exactement l'une des trois lignes est fautive. Et vous pourrez déterminer quelle route mène à la mort, laquelle au serpent, laquelle à la capitale, et laquelle à l'entrepôt? Assurez-vous d'expliquer pourquoi. (P. Mullenko)

2. Montrez comment couper la figure ci-contre en cinq morceaux égaux. (Les parties sont appelées les mêmes si elles peuvent être combinées en superposant l'une sur l'autre; peut-être pour cela il devra en retourner une).



(O. Pyaive)

3. A midi, deux amis sont partis d'un grand chêne poussant sur une route droite: un à l'ouest à pied à une vitesse de 4 km/h, et le second à l'est à vélo à une vitesse de 16 km/h. Au bout d'un moment, le cycliste a fait demi-tour et a rattrapé son ami (qui continuait de marcher vers l'ouest) trois heures après le départ. Quelle est la distance la plus éloignée les uns des autres amis et à quel moment?

(A. Tesler)

4. Dans l'une des variétés du puzzle sudoku classique, appelé Sumdoku, au lieu de certains nombres, les sommes de certains groupes de cellules sont données. Par exemple, dans le sumdoku ci-contre, il faut placer les nombres de 1 à 4 dans le tableau de sorte que:

			5	
				8
	8			
		5		14

- dans chaque ligne et dans chaque colonne, les chiffres soient différents;
- la somme des chiffres de chaque groupe coloré soit égale au nombre qui y est indiqué.

Il s'avère que ce sumdoku a plus d'une solution. Combien exactement?

(P. Mullenko)

5. Les nombres naturels impairs consécutifs sont écrits «en spirale», comme le montre la figure. Les nombres 3, 15 et le reste, qui sont avec eux sur la même ligne droite, seront appelés bons (dans la figure ils sont surlignés en gris). Si nous classons les bons nombres par ordre croissant (3, 15, 23, 43, ...), alors quel est le 2020ème numéro de cette ligne?

		13	15	17	19
...	11	1	3	21	
35	9	7	5	23	
	33	31	29	27	25

(A. R. Arab)

6. L'expression écrite dans l'image se lit comme  $105 + 92$ , c'est-à-dire égale à 197. Mais si vous retournez la carte, vous obtenez  $26 + 501$ , c'est-à-dire 527. Pensez à une expression écrite en nombres électroniques qui, une fois retournée, augmentera exactement de 2020 fois.

Dans ce cas, les conditions suivantes doivent être remplies:

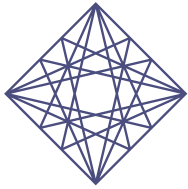
$$\boxed{105+92} \rightarrow \boxed{26+501}$$

- seuls les chiffres et les signes + et - sont autorisés;
- aucun nombre (y compris après le retournement) ne peut partir de zéro;
- le résultat final doit être positif.

(A. Tesler)

7. Dans certaines cellules du carré  $6 \times 6$ , il y a des mines de sorte que dans  $n \times 2$  carrés le nombre de mines est impair, et dans le reste, il est pair. Que peut être  $n$ ?

(A. Tesler)

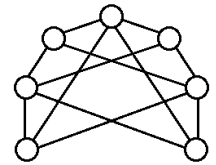


## Problèmes pour les classes R7

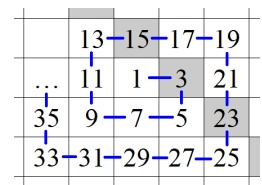
Les travaux doivent être soumis sur la page Web suivante [formulo.org/ru/olymp/2020-math-en/](http://formulo.org/ru/olymp/2020-math-en/) (par exemple, sous forme de scans ou de fichiers doc avec texte). La date limite de dépôts de vos travaux est fixée au **12 novembre 2020**. Le travail est individuel et la plupart des problèmes exigent non seulement des réponses, mais aussi des justifications complètes. Le document ne doit pas contenir de données personnelles du participant, c'est-à-dire **le document ne doit pas être signé** par le candidat.

1. A midi, deux amis sont partis d'un grand chêne poussant sur une route droite: un à l'ouest à pied à une vitesse de 4 km/h, et le second à l'est à vélo à une vitesse de 16 km/h. Au bout d'un moment, le cycliste a fait demi-tour et a rattrapé son ami (qui continuait de marcher vers l'ouest) trois heures après le départ. Quelle est la distance la plus éloignée les uns des autres amis et à quel moment?  
(A. Tesler)
2. Si le nombre de pourcentages est arrondi à la totalité, il s'avère que parmi les participants du cercle mathématique, 51% sont des garçons et 49% sont des filles. Quel est le nombre minimum possible de participants dans le cercle?  
(O. Pyaive)
3. Oleg a nommé un entier naturel  $m$ , et Andrey a trouvé la somme  $1^m + 2^m + 3^m + \dots + 998^m + 999^m$ . Quel est le nombre utilisé pour écrire cette somme?  
(O. Pyaive)

4. Sept cercles sont reliés par des segments de ligne comme indiqué sur la figure. Amir a trois crayons — rouge, vert et bleu. Il veut peindre sur chaque cercle avec l'un des crayons, et deux cercles reliés par une ligne ne doivent pas être de la même couleur. De combien de manières peut-il le faire?  
(A. R. Arab)



5. Les nombres naturels impairs consécutifs sont écrits «en spirale», comme le montre la figure. Les nombres 3, 15 et le reste, qui sont avec eux sur la même ligne droite, seront appelés bons (dans la figure ils sont surlignés en gris). Si nous classons les bons nombres par ordre croissant (3, 15, 23, 43, ...), alors quel est le 2020ème numéro de cette ligne?  
(A. R. Arab)



6. L'expression écrite dans l'image se lit comme  $105 + 92$ , c'est-à-dire égale à 197. Mais si vous retournez la carte, vous obtenez  $26 + 501$ , c'est-à-dire 527. Pensez à une expression écrite en nombres électroniques qui, une fois retournée, augmentera exactement de 2020 fois.

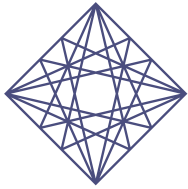
Dans ce cas, les conditions suivantes doivent être remplies:

- seuls les chiffres et les signes + et - sont autorisés;
- aucun nombre (y compris après le retournement) ne peut partir de zéro;
- le résultat final doit être positif.

$$\boxed{105+92} \rightarrow \boxed{26+501}$$

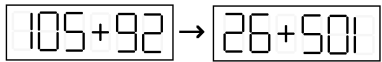
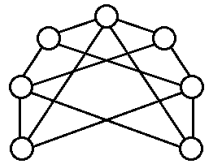
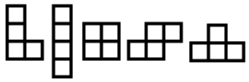
(A. Tesler)

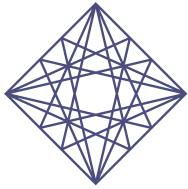
7. Dans certaines cellules du carré  $6 \times 6$ , il y a des mines de sorte que dans  $n \times 2$  carrés le nombre de mines est impair, et dans le reste, il est pair. Que peut être  $n$ ?  
(A. Tesler)



## Problèmes pour les classes R8

Les travaux doivent être soumis sur la page Web suivante [formulo.org/ru/olymp/2020-math-en/](http://formulo.org/ru/olymp/2020-math-en/) (par exemple, sous forme de scans ou de fichiers doc avec texte). La date limite de dépôts de vos travaux est fixée au **12 novembre 2020**. Le travail est individuel et la plupart des problèmes exigent non seulement des réponses, mais aussi des justifications complètes. Le document ne doit pas contenir de données personnelles du participant, c'est-à-dire **le document ne doit pas être signé** par le candidat.

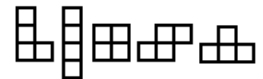
1. Si le nombre de pourcentages est arrondi à la totalité, il s'avère que parmi les participants du cercle mathématique, 51% sont des garçons et 49% sont des filles. Quel est le nombre minimum possible de participants dans le cercle? (O. Pyaive)
  2. Oleg a nommé un entier naturel  $m$ , et Andrey a trouvé la somme  $1^m + 2^m + 3^m + \dots + 998^m + 999^m$ . Quel est le nombre utilisé pour écrire cette somme? (O. Pyaive)
  3. Dans un triangle  $ABC$ , on construit la bissectrice  $AD$ . Les points  $E$  et  $F$  sont placés sur les côtés  $AB$  et  $AC$ , respectivement, avec l'angle  $\angle AEF = \text{l'angle } \angle ABC$ . Les points  $I$  et  $J$  sont respectivement les centres dans le cercle du triangle  $AEF$  et  $BDE$ . Calculer l'angle  $\angle EID + \angle EJD$ . (A. R. Arab)
  4. L'expression écrite dans l'image se lit comme  $105 + 92$ , c'est-à-dire égale à 197. Mais si vous retournez la carte, vous obtenez  $26 + 501$ , c'est-à-dire 527. Pensez à une expression écrite en nombres électroniques qui, une fois retournée, augmentera exactement de 2020 fois.  
Dans ce cas, les conditions suivantes doivent être remplies:
    - seuls les chiffres et les signes  $+$  et  $-$  sont autorisés;
    - aucun nombre (y compris après le retournement) ne peut partir de zéro;
    - le résultat final doit être positif.(A. Tesler)
- 
5. Sept cercles sont reliés par des segments de ligne comme indiqué sur la figure. Amir a trois crayons — rouge, vert et bleu. Il veut peindre sur chaque cercle avec l'un des crayons, et deux cercles reliés par une ligne ne doivent pas être de la même couleur. De combien de manières peut-il le faire? (A. R. Arab)
- 
6. Pablo a écrit un nombre naturel sur chaque face du cube. Vincent est venu et a écrit à chaque sommet le produit de trois nombres sur les faces qui y convergent. Il s'est avéré que la somme de tous les nombres d'Vincent est 2020. Indiquez toutes les valeurs possibles de la somme des nombres de Pablo. (P. Mullenko)
  7. Il y a 35 personnes dans la classe. Au cours de l'année, chaque élève a suivi au moins 67 cours de mathématiques sur 100. Prouver qu'au cours de l'année académique, il est possible de distinguer de telles 3 leçons que chaque élève a suivi au moins une d'entre elles. (K. Knop)
  8. Quelqu'un a coupé le carré en Tetraminos, et les cinq types de Tetraminos (voir photo) ont été utilisés le même nombre de fois. Quel est le plus petit côté possible d'un carré? (I. Tumanova)
- 

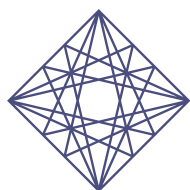


## Problèmes pour les classes R9

Les travaux doivent être soumis sur la page Web suivante [formulo.org/ru/olymp/2020-math-en/](http://formulo.org/ru/olymp/2020-math-en/) (par exemple, sous forme de scans ou de fichiers doc avec texte). La date limite de dépôts de vos travaux est fixée au **12 novembre 2020**. Le travail est individuel et la plupart des problèmes exigent non seulement des réponses, mais aussi des justifications complètes. Le document ne doit pas contenir de données personnelles du participant, c'est-à-dire **le document ne doit pas être signé** par le candidat.


1. Si le nombre de pourcentages est arrondi à la totalité, il s'avère que parmi les participants du cercle mathématique, 51% sont des garçons et 49% sont des filles. Quel est le nombre minimum possible de participants dans le cercle? (O. Pyaive)
  2. Une ligne médiane coupe un triangle en deux parties, on obtient alors un triangle et un trapèze. Dans ce même trapèze on dessine également une autre médiane qui le divise. En conséquence, le triangle d'origine est coupé en trois points — un triangle et deux trapèzes. Démontrez que si deux de ces trois parties ont des aires entières, alors l'aire de la troisième partie est également un entier. (A. Tesler)
  3. Sept cercles sont reliés par des segments de ligne comme indiqué sur la figure. Amir a trois crayons — rouge, vert et bleu. Il veut peindre sur chaque cercle avec l'un des crayons, et deux cercles reliés par une ligne ne doivent pas être de la même couleur. De combien de manières peut-il le faire? (A. R. Arab)
- 
4. Dans le triangle  $ABC$ , on dessine la bissectrice  $CF$ . On marque un point  $O$  de sorte que  $FO \cdot FC = FB^2$ .  $BO$  rencontre  $AC$  au point  $E$ . Démontrer que  $FB = FE$ . (O. Pyaive)
  5. Pablo a écrit un nombre naturel sur chaque face du cube. Vincent est venu et a écrit à chaque sommet le produit de trois nombres sur les faces qui y convergent. Il s'est avéré que la somme de tous les nombres d'Vincent est 2020. Indiquez toutes les valeurs possibles de la somme des nombres de Pablo. (P. Mullenko)
  6. Il y a 35 personnes dans la classe. Au cours de l'année, chaque élève a suivi au moins 67 cours de mathématiques sur 100. Prouver qu'au cours de l'année académique, il est possible de distinguer de telles 3 leçons que chaque élève a suivi au moins une d'entre elles. (K. Knop)
  7. Soient  $a$ ,  $b$ ,  $x$  et  $y$  des entiers naturels tels que  $a < b$ ,  $x < a(a + b)$  et  $y < a(a + b)$ . On appelle le quadruplet  $(a, b, x, y)$  *étrange* si  $x$  est divisible par  $a$ ,  $y$  est divisible par  $b$ ,  $x + y$  est divisible par  $a + b$ , mais  $x - y$  n'est pas divisible par  $a - b$ .
    - a) Existe-t-il un quadruplet bizarre tel que  $a$  et  $b$  soient premiers entre eux?
    - b) Existe-t-il un quadruplet bizarre tel que  $a$  et  $b$  ne soient pas premiers entre eux? (O. Pyaive)
  8. Quelqu'un a coupé le carré en Tetraminos, et les cinq types de Tetraminos (voir photo) ont été utilisés le même nombre de fois. Quel est le plus petit côté possible d'un carré? (I. Tumanova)

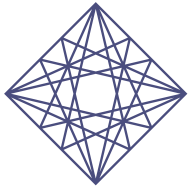




## Problèmes pour les classes R10

Les travaux doivent être soumis sur la page Web suivante [formulo.org/ru/olymp/2020-math-en/](http://formulo.org/ru/olymp/2020-math-en/) (par exemple, sous forme de scans ou de fichiers doc avec texte). La date limite de dépôts de vos travaux est fixée au **12 novembre 2020**. Le travail est individuel et la plupart des problèmes exigent non seulement des réponses, mais aussi des justifications complètes. Le document ne doit pas contenir de données personnelles du participant, c'est-à-dire **le document ne doit pas être signé** par le candidat.

1. Si le nombre de pourcentages est arrondi à la totalité, il s'avère que parmi les participants du cercle mathématique, 51% sont des garçons et 49% sont des filles. Quel est le nombre minimum possible de participants dans le cercle? (O. Pyaive)
2. Trouvez tous ces trinômes carrés  $f(x)$ , tels que les polynômes  $f^2(x)$  et  $f(x^2)$  ont le même ensemble non vide de racines réelles. (A. Solynin)
3. Trois cavaliers partent en même temps d'un grand chêne poussant au milieu d'un champ. Le premier part vers le sud à une vitesse de 20 lieue par heure, le second vers l'ouest à une vitesse de 30 lieue par heure et le troisième vers l'est à une vitesse de 40 lieue par heure. Le deuxième et le troisième à un moment donné tournent de manière à ce que, en galopant tout droit une fois tourné, ils rencontrent le premier (qui a continué à aller vers le sud) exactement trois heures après le départ. Qui a tourné plus tôt et de combien de minutes? (A. Tesler basé sur un vieux problème chinois)
4. Il y a 35 personnes dans la classe. Au cours de l'année, chaque élève a suivi au moins 67 cours de mathématiques sur 100. Prouver qu'au cours de l'année académique, il est possible de distinguer de telles 3 leçons que chaque élève a suivi au moins une d'entre elles. (K. Knop)
5. Soient  $a$ ,  $b$ ,  $x$  et  $y$  des entiers naturels tels que  $a < b$ ,  $x < a(a + b)$  et  $y < a(a + b)$ . On appelle le quadruplet  $(a, b, x, y)$  *étrange* si  $x$  est divisible par  $a$ ,  $y$  est divisible par  $b$ ,  $x + y$  est divisible par  $a + b$ , mais  $x - y$  n'est pas divisible par  $a - b$ .
  - a) Existe-t-il un quadruplet bizarre tel que  $a$  et  $b$  soient premiers entre eux?
  - b) Existe-t-il un quadruplet bizarre tel que  $a$  et  $b$  ne soient pas premiers entre eux? (O. Pyaive)
6. Pablo a écrit un nombre naturel sur chaque face du cube. Vincent est venu et a écrit à chaque sommet le produit de trois nombres sur les faces qui y convergent. Il s'est avéré que la somme de tous les nombres d'Vincent est 2020. Combien d'ensembles différents de nombres y a-t-il que Pablo pourrait écrire? (P. Mulenko)
7. Quelqu'un a coupé le carré en Tetraminos, et les cinq types de Tetraminos (voir photo) ont été utilisés le même nombre de fois. Quel est le plus petit côté possible d'un carré? (I. Tumanova)
8. Soit  $n$ -triangle régulier et inscrit dans un cercle de rayon  $R$ . Le point  $M$  se déplace sur le cercle, pour chacune de ses positions on détermine la somme des états de  $M$  aux droites contenant les côtés du  $n$ -gon est considérée. Pour quelles positions du point  $M$  le résultat sera-t-il minime? (O. Pyaive)



## Problèmes pour les classes R11

Les travaux doivent être soumis sur la page Web suivante [formulo.org/ru/olymp/2020-math-en/](http://formulo.org/ru/olymp/2020-math-en/) (par exemple, sous forme de scans ou de fichiers doc avec texte). La date limite de dépôts de vos travaux est fixée au **12 novembre 2020**. Le travail est individuel et la plupart des problèmes exigent non seulement des réponses, mais aussi des justifications complètes. Le document ne doit pas contenir de données personnelles du participant, c'est-à-dire **le document ne doit pas être signé** par le candidat.

1. Si le nombre de pourcentages est arrondi à la totalité, il s'avère que parmi les participants du cercle mathématique, 51% sont des garçons et 49% sont des filles. Quel est le nombre minimum possible de participants dans le cercle? (O. Pyaive)
2. Trois cavaliers partent en même temps d'un grand chêne poussant au milieu d'un champ. Le premier part vers le sud à une vitesse de 20 lieue par heure, le second vers l'ouest à une vitesse de 30 lieue par heure et le troisième vers l'est à une vitesse de 40 lieue par heure. Le deuxième et le troisième à un moment donné tournent de manière à ce que, en galopant tout droit une fois tourné, ils rencontrent le premier (qui a continué à aller vers le sud) exactement trois heures après le départ. Qui a tourné plus tôt et de combien de minutes? (A. Tesler basé sur un vieux problème chinois)
3. Il y a 35 personnes dans la classe. Au cours de l'année, chaque élève a suivi au moins 67 cours de mathématiques sur 100. Prouver qu'au cours de l'année académique, il est possible de distinguer de telles 3 leçons que chaque élève a suivi au moins une d'entre elles. (K. Knop)
4. Pablo a écrit un nombre naturel sur chaque face du cube. Vincent est venu et a écrit à chaque sommet le produit de trois nombres sur les faces qui y convergent. Il s'est avéré que la somme de tous les nombres d'Vincent est 2020. Combien d'ensembles différents de nombres y a-t-il que Pablo pourrait écrire? (P. Mulenko)
5. Un polynôme de degré  $n = 2k$  à coefficients réels est une fonction paire. Combien de racines peut-il avoir? (A. Tesler)
6. Démontrez que  $2 \sin^2(\sin x) \geq \sin^2 x$ . (L'argument de la fonction sin est l'angle en radians.) (O. Pyaive)
7. Les nombres naturels impairs consécutifs sont écrits «en spirale», comme le montre la figure. Les nombres 3, 15 et le reste, qui sont avec eux sur la même ligne droite, seront appelés bons (dans la figure ils sont surlignés en gris). Quelle est la somme des moins bons nombres de 2020? (A. R. Arab)

		13	15	17	19
		↓	↓	↓	↓
...	11	1	3	21	
↓	↓	↓	↓	↓	↓
35	9	7	5	23	
↓	↓	↓	↓	↓	↓
33	31	29	27	25	