Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие».
2019–2020 учебный год. Заключительный этап

Решения задач

Задачи для 5 класса

1. Можно ли разместить в квадрате 3×3 числа от 1 до 9 (каждое по одному разу) так, чтобы число в каждой угловой клетке было хотя бы на 4 больше, чем каждое из его соседей? Числа называются соседями, если у клеток, в которых они стоят, есть общая сторона.
(*А. Р. Араб, А. А. Теслер*)

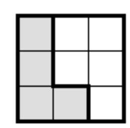
Ответ: да. Например, так:

9	4	8
3	5	2
7	1	6

2. Если из прямоугольника на клетчатой бумаге вырезали (тоже по клеткам) прямоугольник, один (и только один) из углов которого совпадает с каким-то из углов исходного, то фигуру, оставшуюся после такого вырезания, будем называть Г-образной. Квадрат какого наименьшего размера можно разрезать на Г-образные фигуры? (*В. П. Федотов*)

Ответ: 3×3.

Решение. Квадрат 3×3 можно разрезать на P-пентамино и L-тетрамино (см. рисунок). Меньшие квадраты, очевидно, разрезать нужным образом нельзя (например, потому, что каждая Г-образная фигура содержит хотя бы 3 клетки, поэтому в таком квадрате должно быть хотя бы 6 клеток).



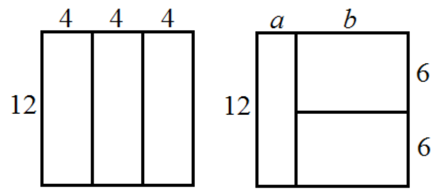
3. Двое играют в игру. Первый игрок пишет на пустой доске произвольное натуральное число, не кратное 10. Дальше игроки по очереди (начиная со второго) пишут на доске какую-нибудь степень любого из чисел, написанного на доске. (Например, если на доске написаны числа 3 и 81, то можно написать любое из чисел $3 = 3^1$, $9 = 3^2$, $27 = 3^3$, $81 = 3^4$, $243 = 3^5$ и т.д., а также $81 = 81^1$, $6561 = 81^2$ и т. д.) Выигрывает тот из игроков, после хода которого сумма каких-нибудь чисел, написанных на доске, делится на 10. У кого из игроков есть способ выиграть при любой игре соперника? Как он должен действовать? (*И. М. Туманова, А. А. Теслер*)

Решение. Выиграет первый, если первым ходом напишет число 6. Тогда каждое следующее число, написанное на доске, будет тоже оканчиваться на 6, а значит, через 5 ходов сумма всех записанных чисел будет оканчиваться на 0.

4. Квадрат со стороной 12 см разрезали на три прямоугольника одинакового периметра. Чему же равен этот периметр? (*А. А. Теслер*)

Ответ: 30 см или 32 см.

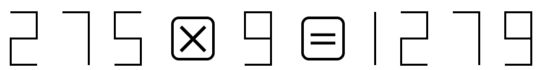
Решение. Квадрат можно разрезать на три прямоугольника двумя способами (см. рисунок).



В первом случае, чтобы периметры были равны, меньшие стороны прямоугольников должны быть равны, то есть каждая из них равна 4 см. Тогда периметр равен $(12 + 4) \cdot 2 = 32$ (см).

Во втором случае (по тем же причинам) два из трёх прямоугольников равны, одна из их сторон равна 6. Осталось найти стороны a и b (см. рисунок). Заметим, что у левого прямоугольника вертикальная сторона равна 12, а у правого всего 6 (на 6 меньше). Для равенства периметров горизонтальная сторона правого прямоугольника должна быть на 6 больше, чем левого, то есть $b = a+6$. Поскольку $a+b = 12$, то $a = 3$, $b = 9$. Искомый периметр: $(12+3)\cdot 2 = (9+6)\cdot 2 = 30$ (см).

5. Экран калькулятора изначально выглядел так: . Но потом некоторые палочки на нём перегорели. Поэтому получилось, что $275 \times 9 = 1279$ (см. рисунок). Восстановите, что вводили на самом деле и какое число получилось (найдите все возможные варианты и объясните, почему никаких других быть не может). (*П. Д. Муленко*)



Ответ: $236 \cdot 8 = 1888$.

Решение. Обозначим разряды буквами A, B, C, D слева направо. Неизвестные цифры будем обозначать знаком ?.

Правая верхняя палочка D точно рабочая, значит, в этом разряде 5 или 6 умножается на 8 или 9, из чего возможно только $??6 \cdot 8 =???8$.

В разряде B может быть или 2, или 8, но $6400 < 8?? \cdot 8 < 7200$. Значит, $2?6 \cdot 8 = 18?8$.

Теперь можно найти первый множитель: он лежит в пределах от $1800 : 8 = 225$ до $1900 : 8 = 237{,}5$, и из этих чисел подходит только 236. Весь пример выглядит так: $236 \cdot 8 = 1888$.

6. У каждой из двух сестёр в кармане от 1 до 7 конфет. Папа может задать любой из них вопрос, на который она ответит «да» или «нет». Он хочет, задав не более 4 вопросов, выяснить, верно ли, что вместе у них больше 7 конфет. Придумайте, как ему это сделать.
Примечание. Каждый вопрос задаётся только одной из сестёр. Ни одна из сестёр не знает, сколько конфет в кармане у другой, поэтому каждую сестру можно спрашивать только об её конфетах. (*А. А. Теслер*)

Решение. За первые три вопроса можно выяснить, сколько конфет у первой сестры. Например, первый вопрос: «У тебя больше четырёх конфет?»; если ответ «да», то второй вопрос: «У тебя больше 6 конфет?», если нет, то «У тебя больше 2 конфет?»; после этого осталось не более двух вариантов, из которых выбираем, задав третий вопрос.

Теперь мы знаем число a, равное количеству конфет у первой сестры. Вторую достаточно спросить, верно ли, что у неё больше чем $7-a$ конфет. (Например, если у первой оказалось 5 конфет, то вторую спрашиваем, верно ли, что у неё больше двух.)

Задачи для 6 класса

1. См. задачу 5.2.

2. Полина написала восемь последовательных натуральных чисел и обвела четыре из них чёрной ручкой, а четыре — красной. Может ли произведение красных чисел оказаться в 20 раз больше произведения чёрных? (*П. Д. Муленко*)

   Решение. Пусть все числа не меньше 7. Тогда отношение двух чисел не превышает $\frac{14}{7} = 2$, поэтому
$$\frac{a_1a_2a_3a_4}{b_1b_2b_3b_4} = \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_1}{b_1} \leqslant 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16.$$
   Если же одно из чисел меньше 7, то все они меньше 14, и среди них только одно кратно 7. Значит, одно из произведений кратно 7, а второе нет, и их отношение не может равняться 20.

3. См. задачу 5.3.

4. Сколькими способами можно разместить в квадрате 3×3 числа от 1 до 9 (каждое по одному разу) так, чтобы число в каждой угловой клетке было хотя бы на 4 больше, чем каждое из его соседей? Числа называются соседями, если у клеток, в которых они стоят, есть общая сторона. Способы, переводимые друг в друга симметрией или поворотом, считаются разными. (*А. Р. Араб, А. А. Теслер*)

   Ответ: 32 способа.

   Решение. Каждый угол имеет двух соседей, поэтому в углах должны стоять цифры 6–9. Число 5 может стоять только в центре квадрата, так как не может быть соседом двух углов сразу. Число 4 может быть соседом только у 8 и 9. Наконец, соседями у 6 могут быть только числа 1 и 2.

   Теперь подсчитаем способы. Можно четырьмя способами выбрать, где стоит число 6, и ещё двумя способами — где стоят его соседи (1 и 2). Далее есть 4 способа выбрать два смежных угла для чисел 8 и 9 (для каждого из которых есть только 1 способ поставить число 4). На оставшийся угол встает число 7, а на оставшуюся клетку в центре стороны — число 3. Итого $4 \cdot 2 \cdot 4 = 32$ способа.

5. См. задачу 5.5.

6. На одной конференции встретились известный ученый Франсуа и трое его не менее известных друзей: Карл, Рене и Леонард.
   Франсуа, помимо своих научных достижений, известен ещё и тем, что является отцом нескольких детей, которые все родились в разные годы, но все в одну и ту же дату. Друзья поинтересовались, сколько лет каждому из детей, на что Франсуа дал им задачку. «Произведение возрастов моих детей, — сказал он, — как раз равно сумме дня и месяца их рождения. Сейчас я сообщу Карлу количество моих детей, Рене — месяц рождения, а Леонарду — день рождения, и попробуйте угадать, сколько им лет». После этого он шепнул на ухо друзьям указанную информацию.
   Немного подумав, Карл воскликнул, что он точно знает возраст двоих детей Франсуа. «Ну тогда мы все понимаем, сколько детей, и сколько лет двум из них. Но я всё ещё не могу понять возраст остальных», — ответил Леонард. Рене тут же заметил: «А вот мне известен возраст всех детей, кроме самого старшего». После этого Леонард заключил, что теперь ему и, следовательно, всем троим точно известны возрасты всех детей. Сколько же у Франсуа детей и сколько лет каждому из них? (*П. Д. Муленко*)

Ответ: четверо детей 1, 2, 3 и 6 лет.

Решение. *К сожалению, одна из фраз в условии задачи оказалась двусмысленной, что влияет на ответ (хотя и не меняет ход рассуждений). Мы будем трактовать фразу «Рене тут же заметил» как указание на то, что Рене производил вычисления без учёта реплики Леонарда (а её «обработать» не успел). О другой возможной трактовке условия см. ниже в Замечании 2.*

Очевидно, что Рене и Леонард только по своему числу не могли определить ничего. Однако Карл смог вычислить возрасты сразу двоих, из чего мы делаем вывод, что детей — четверо (если бы их было трое или меньше, Карл не смог бы найти возраст двоих, а пятеро или больше не могло быть заведомо, так как даже $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 > 100$), и Карл мог определить только возраст двух самых младших (а именно, 1 и 2 года, ведь даже $1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ — слишком много).

Поскольку сумма дня и месяца не может быть больше 43, имеем 5 возможных вариантов произведения:
$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$,
$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$,
$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6 = 36$,
$1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 = 40$,
$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$.

Рене, отбросив часть вариантов, смог определить возраст третьего ребенка, но не нашёл возраст четвертого (самого старшего). Значит, третьему ребенку 3 года, а сумма не могла получиться равной даже 40, то есть дети родились не позднее сентября (действительно, 30 октября, 29 ноября и 28 декабря давали бы 40).

Итак, осталось три варианта, в которых старшему ребенку от 4 до 6 лет. Леонард после фразы Карла не смог сделать никаких выводов, что означает, что день рождения детей не менее 28 (ведь иначе Леонард бы тоже мог понять, что третьему ребёнку 3 года), что исключает случай 24. В конце Леонард смог вычислить последний возраст; значит, ему сказали число, не меньшее 30 (иначе оба варианта произведения возможны), а возраст старшего равен 6 годам.

Замечание 1. К сожалению, однозначно восстановить день и месяц из имеющихся данных не получается, так как и 31 мая, и 30 июня дают сумму в 36.

Замечание 2. Как уже было указано, возможно другое понимание условия. Фразу Рене можно трактовать так: «А я могу определить возраст всех детей, кроме одного, а вот возраст этого последнего не могу определить даже с учётом реплики Леонарда». В этом случае решение перестаёт работать. Ведь по реплике Леонарда Рене уже может восстановить, что день рождения не меньше 28 (Леонард допускает, что сумма дня и месяца равна 40, иначе он бы определил, что третьему 3 года), а с учётом своих знаний о месяце (5 или 6) Рене может выбрать единственно возможный вариант — 36 (то есть определить все четыре возраста). При такой трактовке описанная в задаче ситуация невозможна.

Задачи для 7 класса

1. См. задачу 5.2.

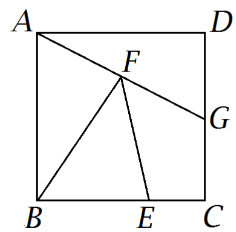
2. Найдутся ли три натуральных числа, больших 1, произведение которых равно 500 000 080 000 003?
(*А. А. Теслер*)

Ответ: да, например, 50 000 003, 11 и 909 091.

Решение. Формально для решения задачи достаточно примера, но объясним, как можно его найти. Во-первых, $500\,000\,080\,000\,003 = 50\,000\,003 \cdot 10\,000\,000 + 50\,000\,003 = 50\,000\,003 \cdot 10\,000\,001$. Во-вторых, второе из этих чисел делится на 11 (например, по известному признаку делимости); частное равно 909 091.

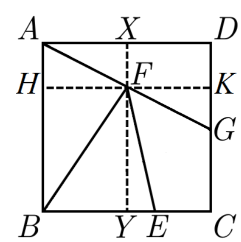
3. См. задачу 6.2.

4. Квадрат разрезан на четыре части равной площади, как показано на рисунке. Найдите отношение $BE : EC$. (*А. Р. Араб*)



Ответ: $BE : EC = 2 : 1$.

Решение. Обозначим сторону квадрата за a, тогда его площадь равна a^2. Проведём через точку F отрезки XY и HK, параллельные (и равные) сторонам квадрата (см. рисунок).



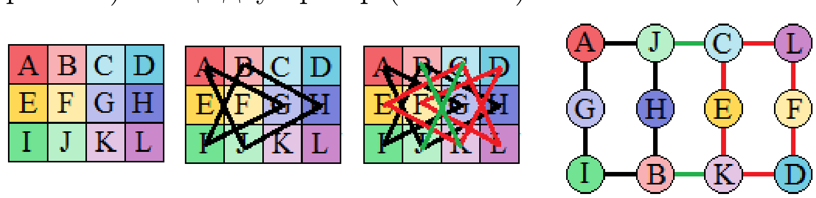
1) Поскольку $S(ADG) = \frac{1}{2}a \cdot DG = \frac{a^2}{4}$, то $DG = \frac{a}{2}$.
2) Далее, $S(AFB) = \frac{1}{2}a \cdot FH = \frac{a^2}{4}$, поэтому $FH = \frac{a}{2}$.
3) Значит, и $FK = \frac{a}{2}$. Тогда треугольники AFH и GFK равны ($FH = FK$, $\angle AHF = \angle GKF = 90°$, $\angle AFH = \angle GFK$ как вертикальные). Отсюда $AH = KG$. Поскольку $AH = XF = DK$, то $DK = KG = \frac{DG}{2} = \frac{a}{4}$, то есть $XF = \frac{a}{4}$, $FY = \frac{3a}{4}$.
4) Осталось заметить, что $S(BEF) = \frac{1}{2}BE \cdot FY = \frac{1}{2}BE \cdot \frac{3a}{4} = \frac{a^2}{4}$, поэтому $BE = \frac{2}{3}a$. Значит, $EC = \frac{1}{3}a$, $BE : EC = 2 : 1$.

5. См. задачу 6.6.

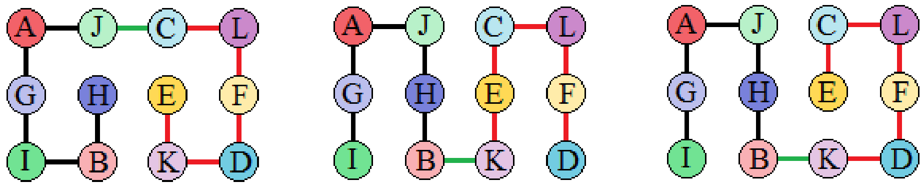
6. Шахматный конь проскакал по доске 3×4, причём на первой клетке своего пути написал число n, на второй — число $n + 1$, …, на последней — $n + 11$. Могло ли оказаться, что сумма чисел в каждой строке кратна трём и сумма чисел в каждом столбце кратна трём? (*Л. С. Корешкова*)

Ответ: нет, не могло.

Решение. Обозначим клетки буквами от A до L и составим граф возможных ходов коня, где вершина — это клетка, а ребро — возможность хода. Граф состоит из двух циклов длины 6 (на рисунке — чёрный и красный) и ещё двух рёбер (зелёных).



Перебором можно убедиться, что этот граф можно обойти всего тремя принципиально разными способами (см. рисунок). Что касается способов, симметричных друг другу на графе, то видно, что и на доске они симметричны друг другу (симметрии графа относительно горизонтальной/вертикальной осей соответствуют симметриям доски), поэтому отдельно рассматривать их не нужно.



y	y	x	x
z	z	x	x
z	z	y	y

z	z	z	z
y	y	y	y
x	x	x	x

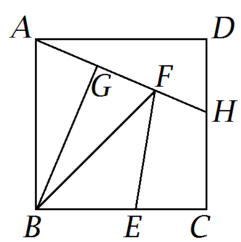
z	z	y	y
z	z	y	y
x	x	x	x

Расставим остатки от деления на 3 в соответствии с каждым из обходов (x, y, z — три различных остатка). Во всех случаях найдётся либо столбец с суммой, не кратной 3 ($y+z+z$ или $z+x+x$), либо строка (четыре равных ненулевых остатка).

Задачи для 8 класса

1. См. задачу 6.2.

2. Квадрат разрезан на пять частей равной площади, как показано на рисунке. Найдите отношение $BE : EC$. *(А. Р. Араб)*



Ответ: $BE : EC = 10 : 7$.

Решение. Будем использовать факт, легко вытекающий из формулы площади треугольника: у двух треугольников с общей высотой площади относятся как основания, на которые опущена эта высота.

Пусть сторона квадрата равна 1, тогда $DH = \frac{2}{5}$ (поскольку $S(ADH) = \frac{1}{5}$) и $S(ABH) = \frac{1}{2}$.

Заметим, что

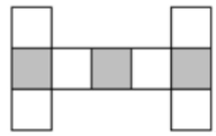
$$AF : AH = S(ABF) : S(ABH) = \frac{2}{5} : \frac{1}{2} = 4 : 5,$$

поэтому расстояние от F до AD равно $\frac{4}{5}HD = \frac{8}{25}$, а значит, расстояние от F до BC равно $\frac{17}{25}$.

Таким образом, $S(BFC) = \frac{17}{50}$, а $S(BEF) = BE \cdot \frac{17}{50}$, откуда

$$BE = \frac{1}{5} \cdot \frac{50}{17} = \frac{10}{17}, \quad BE : EC = 10 : 7.$$

3. Сколькими способами можно разместить в фигуре на рисунке числа от 1 до 9 (каждое по одному разу) так, чтобы число в каждой закрашенной клетке было хотя бы на 2 больше, чем каждое из его соседей? Способы, переводимые друг в друга симметрией или поворотом, считаются разными. (*А. Р. Араб*)



Ответ: 3120.

Решение. Заметим, что числа 8 и 9 находятся в серых клетках. Разберём случаи:

(a) Если они находятся в крайних клетках (для этого есть 2 способа), а в средней стоит число k, то всего $(k-2)(k-3)$ способов выбрать цифры в белых клетках посередине.

- Если $k=7$, то имеется $4!$ способов расставить оставшиеся цифры.
- Если $k<7$, то цифру 7 нельзя ставить рядом с 8, поэтому будет $2\cdot 3!$ вариантов.

Итого $2\cdot\big(5\cdot 4\cdot 4!+2\cdot 3!\cdot(4\cdot 3+3\cdot 2+2\cdot 1)\big)=1440$.

(b) Теперь пусть 9 находится с краю, а 8 посередине. Число k в оставшейся серой клетке равно 7, 6 или 5, а количество способов расставить числа рядом с ним равно $(k-2)(k-3)(k-4)$.

- Если $k=7$, то имеется $3!$ способов расставить оставшиеся цифры.
- Если $k<7$, то цифру 7 нельзя ставить рядом с 8, поэтому будет $2\cdot 2!=4$ варианта.

Получится $2\cdot\big(5\cdot 4\cdot 3\cdot 3!+(4\cdot 3\cdot 2+3\cdot 2\cdot 1)\cdot 4\big)=960$ способов.

(c) Наконец, если 8 с краю, а 9 посередине, то 7 может стоять только в оставшейся серой клетке. Получаем $2\cdot(5\cdot 4\cdot 3\cdot 3!)=720$ способов.

Итого $1440+960+720=3120$ способов.

4. На доске написано число 2. Двое играют в игру, делая ходы по очереди: каждый из игроков своим ходом может написать на доске любую степень двойки (то есть число вида $2^k, k\geqslant 1$). Игрок, после хода которого на доске появятся две одинаковые цифры, проигрывает. У кого из игроков (у того, кто начинает, или у его соперника) есть способ выиграть при любой игре другого? Как он должен действовать? (*И. М. Туманова, А. А. Теслер*)

Решение. Выигрывает первый: он пишет на доске число $2^{14}=16384$. Теперь на доске есть цифры $2, 4, 8, 6$, то есть все возможные последние цифры степени двойки. Значит, последняя цифра следующего написанного числа совпадёт с одной из имеющихся цифр.

5. Докажите, что $n^{24}-n^4+n^2-n^{22}$ делится на 720 при любом нечётном n. (*И. М. Туманова*)

Решение. Разложим выражение на множители:

$$n^{24}-n^4+n^2-n^{22}=n^2(n^2-1)(n^{20}-1)=n^2(n-1)(n+1)(n^{10}+1)(n^5+1)(n^5-1)=$$
$$=\big((n-1)n(n+1)\big)^2(n^{10}+1)(n^4-n^3+n^2-n+1)(n^4+n^3+n^2+n+1).$$

Среди чисел $n-1$, n, $n+1$ обязательно одно делится на 3; одно делится на 4 и ещё одно на 2. Значит, $\big((n-1)n(n+1)\big)^2$ (а, значит, и все выражение) обязательно делится на $(4\cdot 2\cdot 3)^2=144\cdot 4$.

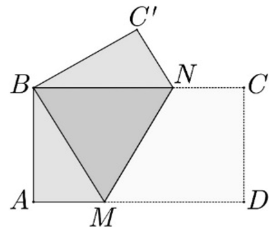
Осталось доказать делимость полученного произведения на 5. Если среди чисел $n-1$, n, $n+1$ нет кратного 5, то n даёт остаток 2 или 3 при делении на 5, но тогда n^{10} обязательно даёт остаток 4, откуда $n^{10}+1$ делится нацело на 5.

6. См. задачу 7.6.

Задачи для 9 класса

1. См. задачу 5.4.

2. Прямоугольник $ABCD$ сложили вдоль линии MN так, что точки B и D совпали. Оказалось, что $AD = AC'$. Найдите соотношение сторон прямоугольника. (*П. Д. Муленко*)



Ответ: $\sqrt{3}$.

Решение. Из условия следует, что точка B симметрична D, а точка C' симметрична C относительно MN. Значит, отрезок $C'D$ симметричен отрезку BC, поэтому $C'D = BC$. Кроме этого, точка N при симметрии переходит в себя, поэтому развёрнутый угол BNC переходит в угол $C'ND$, который, следовательно, тоже развёрнутый. Итак, N лежит на прямой $C'D$.

Воспользуемся условием $AD = AC'$. Вместе с полученым ранее $C'D = BC$ оно означает, что $C'D = AD = AC'$, то есть $\triangle AC'D$ равносторонний. Тогда $\angle NDC = \angle C'DC = 90° - 60° = 30°$. Из $\triangle NDC$ (с углами $30°, 60°, 90°$) получаем: $NC = \frac{1}{2}ND$, $CD = \frac{\sqrt{3}}{2}ND$.
Кроме этого, $BN = ND$ (в силу симметрии), поэтому $BC = ND + \frac{1}{2}ND = \frac{3}{2}ND$. Значит, $BC : CD = \left(\frac{3}{2}ND\right) : \left(\frac{\sqrt{3}}{2}ND\right) = \sqrt{3}$.

3. Произведение положительных чисел x, y, z, t равно 1. Докажите, что если

$$x + y + z + t > \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{t} + \frac{t}{x}, \quad \text{то} \quad x + y + z + t < \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{t}{z} + \frac{x}{t}.$$

(*А. Р. Араб*)

Решение. Будем доказывать сразу, что

$$2(x + y + z + t) \leqslant \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{y} + \frac{z}{t} + \frac{t}{z} + \frac{t}{x} + \frac{x}{t}.$$

Преобразуем правую часть:

$$\left(\frac{x}{t} + \frac{y}{t}\right) + \left(\frac{x}{y} + \frac{z}{y}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{t}{z} + \frac{t}{x}\right) =$$

$$= (x + z) \cdot \frac{1}{t} + (x + z) \cdot \frac{1}{y} + y\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right) + t\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right) =$$

$$= (x + z)\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{y}\right) + (y + t)\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right) = (x + z)\frac{y + t}{ty} + (y + t)\frac{z + x}{zx} = (x + z)(y + t)\left(\frac{1}{yt} + \frac{1}{xz}\right).$$

Значит, нужно доказать неравенство

$$2(x + y + z + t) \leqslant (x + z)(y + t)\left(\frac{1}{yt} + \frac{1}{xz}\right),$$

$$2((x + z) + (y + t)) \leqslant (x + z)(y + t)\left(\frac{1}{yt} + \frac{1}{xz}\right),$$

$$2 \cdot \frac{(x+z)+(y+t)}{(x+z)(y+t)} \leqslant \frac{1}{yt} + \frac{1}{xz},$$

$$2\left(\frac{1}{y+t} + \frac{1}{x+z}\right) \leqslant \frac{1}{yt} + \frac{1}{xz}.$$

Обозначим $xz = u^2$; поскольку $xyzt = 1$, то $yt = \dfrac{1}{u^2}$. Правая часть неравенства равна $u^2 + \dfrac{1}{u^2}$. Оценим левую часть: по неравенству о средних,

$$x + z \geqslant 2\sqrt{xz} = 2u, \quad y + t \geqslant 2\sqrt{yt} = \frac{1}{u},$$

то есть

$$\frac{1}{x+z} \leqslant \frac{1}{2u}, \quad \frac{1}{y+t} \leqslant \frac{u}{2},$$

и левая часть не превосходит $u + \dfrac{1}{u}$.

Значит, достаточно доказать неравенство

$$u + \frac{1}{u} \leqslant u^2 + \frac{1}{u^2}.$$

Умножив его на u^2 и перенеся всё в одну часть, получим $u^4 - u^3 - u + 1 \geqslant 0$, или $(u-1)(u^3-1) \geqslant 0$, что верно при всех $u > 0$.

4. См. задачу 6.6.

5. У каждой из двух сестёр в кармане от 1 до 1000 конфет. Папа по очереди задаёт сёстрам (то одной, то другой) вопросы, на которые можно ответить «да» или «нет». Он хочет, задав не более чем по 6 вопросов каждой из сестёр, выяснить, верно ли, что вместе у них больше 1000 конфет. При этом ни одна из девочек не знает, сколько конфет в кармане у другой, поэтому каждую сестру можно спрашивать только об её конфетах. Придумайте, как папе добиться цели.

(*А. А. Теслер*)

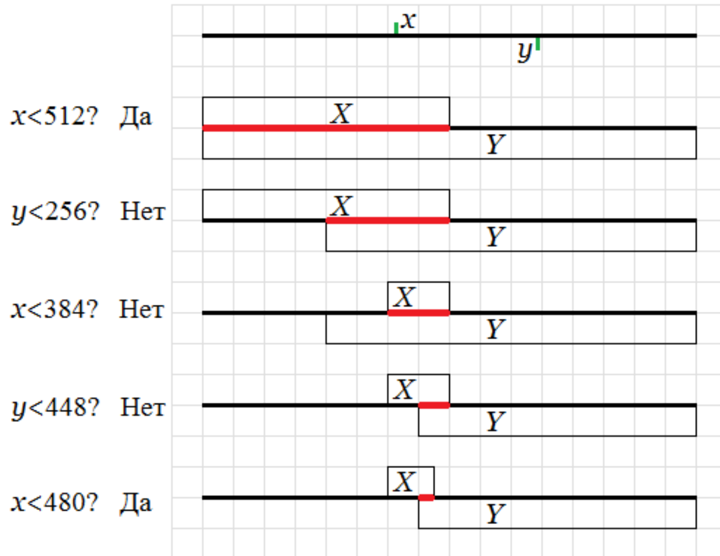
Решение.

Пусть у первой сестры a конфет, а у второй b. Обозначим $x = a$, $y = 1000 - b$, тогда условие $a + b > 1000$ равносильно условию $x > y$. Итак, нам необходимо сравнить два числа (количество конфет первой сестры и количество конфет, которых не хватает второй сестре до 1000).

Будем считать, что изначально числа лежат в промежутке от 0 до 1023, то есть множество $X = \{0..1023\}$ допустимых значений x и множество $Y = \{0..1023\}$ допустимых значений y имеют 1024 общих элемента. (На самом деле значения, большие 1000, невозможны, мы добавили их для удобства деления пополам.)

Будем задавать каждый вопрос так, чтобы уменьшить множество общих значений вдвое. Например, первый вопрос ($x < 512$?) уменьшит множество X (а значит, и $X \cap Y$) до $\{0..511\}$ или до $\{512..1023\}$. Второй вопрос ($y < 256$? или $y < 768$? в зависимости от ответа на первый вопрос) уменьшит «длину» пересечения (то есть количество элементов в нём) до 256. После 10 таких вопросов длина пересечения станет равна 1, то есть будет возможно единственное общее значение z_0. На рисунке показаны первые пять вопросов для случая, когда $x = 400, y = 700$.

Далее спросим (это 11-й и 12-й вопросы), верно ли, что $x = z_0$ и что $y = z_0$. Если оба ответа «да», то $x = y$. Если нет, то мы знаем, какое из чисел x и y больше.



6. При каком наибольшем n множество $\{2, 3, 4, \ldots n\}$ можно так покрасить в синий и красный цвета, чтобы произведение двух любых (в том числе одинаковых) чисел одного цвета имело другой цвет? *(А. Р. Араб)*

   Ответ: 31.

   Решение. *Оценка.* Докажем, что число 32 не может быть покрашено. Действительно, пусть 2, например, синее, тогда $4 = 2 \cdot 2$ красное, $16 = 4 \cdot 4$ синее, $32 = 2 \cdot 16$ красное. Заметим, что 8 не может быть ни красным, ни синим: если 8 красное, то в пример $8 \cdot 4 = 32$ входят три красных числа, а если 8 синее, то в пример $8 \cdot 2 = 16$ входят три синих числа.

   Пример. Числа 2 и 3 покрасим синим, числа от 4 до 15 — красным, числа от 16 до 31 — снова синим.
   Другой пример: числа, в разложении которых 1 или 4 простых множителя (то есть все простые, а также 16 и 24) покрасим в синий цвет, а числа, в разложении которых 2 или 3 простых множителя — в красный.

Задачи для 10 класса

1. См. задачу 8.4.

2. См. задачу 9.2.

3. См. задачу 9.3.

4. При каком наибольшем n множество $\{3, 4, 5, \ldots n\}$ можно так покрасить в синий и красный цвета, чтобы произведение двух любых (в том числе одинаковых) чисел одного цвета имело другой цвет? *(А. Р. Араб)*

   Ответ: 242.

   Решение. *Оценка.* Докажем, что число $3^5 = 243$ не может быть покрашено. Действительно, пусть 3, например, синее, тогда $9 = 3 \cdot 3$ красное, $81 = 9 \cdot 9$ синее, $243 = 3 \cdot 81$ красное. Заметим, что 27 не может быть ни красным, ни синим: если 27 красное, то в пример $27 \cdot 9 = 243$ входят три красных числа, а если 27 синее, то в пример $27 \cdot 3 = 81$ входят три синих числа.

Пример. Числа от 3 до 8 покрасим синим, числа от 9 до 80 — красным, числа от 81 до 242 — снова синим.

5. См. задачу 9.5.

6. Про вещественные числа m, n, x, y известно следующее:
$$\begin{cases} mx + ny = 4, \\ mx^2 + ny^2 = 2, \\ mx^3 + ny^3 = 6, \\ mx^4 + ny^4 = 38. \end{cases}$$
Чему равно $\big((m+n)(x+y)+5xy\big)(m+n+x+y)$? (*П. Д. Муленко*)

Ответ: 2020.

Решение. Заметим, что $(mx^k + ny^k)(x+y) = (mx^{k+1} + ny^{k+1}) + xy(mx^{k-1} + ny^{k-1})$. А $x+y$, очевидно, не равно 0.

Тогда, домножив первые 3 равенства на $(x+y)$, получим следующее:
$$\begin{cases} 2 + xy(m+n) = 4(x+y), \\ 6 + 4xy = 2(x+y), \\ 38 + 2xy = 6(x+y). \end{cases}$$
Заменим переменные: $x+y = a$, $xy = b$, $m+n = c$ (тогда искомое выражение запишется как $(ac+5b)(a+c)$):
$$\begin{cases} 2 + bc = 4a, \\ 6 + 4b = 2a, \\ 38 + 2b = 6a. \end{cases}$$
Из последних двух уравнений находим $a = 7$ и $b = 2$, откуда $c = 13$. Тогда искомое выражение:
$$(ac+5b)(a+c) = (7\cdot 13 + 10)(7+13) = 101\cdot 20 = 2020.$$

Задачи для 11 класса

1. См. задачу 9.2.

2. Юлианский календарь устроен так: каждый год с номером, кратным 4 — високосный; в обычном году 365 дней, а в високосном — на 1 больше; кроме этого, есть семидневная неделя. В результате существуют 14 видов года: невисокосный год, начинающийся в понедельник, во вторник, …, в воскресенье; високосный год, начинающийся в понедельник, во вторник, …, в воскресенье.
Когда земляне поселились на планете Ялмез, то ввели календарь, в котором каждый год с номером, кратным v ($v > 1$) — високосный; в обычном году x дней, а в високосном — на 1 больше; неделя по-прежнему состоит из 7 дней. Оказалось, что в таком календаре ровно n видов года. Найдите все возможные значения n. (*А. А. Теслер*)

Ответ: 2, 3, 4, 5, 6, 8, 14.

Решение. Лемма: если a не кратно 7, то среди чисел $m, m+a, m+2a, \dots m+6a$ встречаются числа со всеми остатками от деления на 7. (Доказательство: если это не так, то какие-то два из семи остатков совпадают; но разность между соответствующими числами равна ka, где $0 < k < 7$, а a взаимно просто с 7, то есть не кратна 7.)

Заметим, что нас интересует не сама длина года, а только её остаток от деления на 7, который далее и будем обозначать (для обычного года) x. Ежегодно номер начального дня недели сдвигается на x для обычного года и на $x+1$ для високосного. Например, если на планете Земля 2019 год обычный и начинался во вторник, т. е. в день 2, то 2020 год начинается в день $2+1=3$ (где 1 — остаток от деления 365 на 7), а 2021 — в день $3+2=5$ (где 2 — остаток от деления 366 на 7). Тогда за v лет номер начального дня сдвигается на $vx+1$ (например, для Земли на 5).

Если $vx+1$ не кратно 7, то встречаются все 7 типов високосных лет (см. лемму); но тогда все годы перед ними («предвисокосные») тоже различаются, итого имеем все 14 типов лет.

Если $vx+1$ кратно 7, то последовательные високосные годы всё время одинаковы. Примеры (указаны длины лет по модулю 7):
$3+4=7$,
$2+2+3=7$,
$5+5+5+6=21$,
$4+4+4+4+5=21$,
$1+1+1+1+1+2=7$,
$1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+2=14$
(эти примеры дают 2, 3, 4, 5, 6, 8 типов лет, из которых один високосный, остальные обычные).

Получить ровно 7 типов лет невозможно: если в цикле 6 обычных лет и один високосный (то есть $v=7$), то число дней в цикле $6x+(x+1)$ не кратно 7; если в цикле больше 6 обычных лет и длина каждого из них не кратна 7, то все 7 типов обычных лет встречаются; если длина обычного года кратна 7, то длина цикла не кратна 7.

3. В противоположных углах шахматной доски стоят Красная и Белая Королевы. Раз в минуту они случайным образом переходят на соседнюю по стороне клетку (одна только вправо или вверх, другая только влево или вниз). Какова вероятность, что они одновременно окажутся в одной клетке (и будут стоять там вместе в течение минуты)? (*П. Д. Муленко*)

Ответ: $C_{14}^{7} : 2^{14}$ или $\sum\limits_{k=0}^{7} \left(C_7^k\right)^2 : 2^{14}$.

Решение. Допустим, что королевы встретились в одной клетке. Заметим, что «расстояние в ходах королев» между противоположными углами равно 14, поэтому встретились королевы в момент, когда каждая совершила по 7 ходов. Траектории двух королев, взятые вместе, образуют 14-звенную ломаную. Количество таких ломаных равно C_{14}^{7} (чтобы задать ломаную, надо выбрать, какие 7 из 14 звеньев вертикальны), и это и есть количество подходящих способов движения королев. Общее же количество способов движения за 7 ходов равно $2^7\cdot 2^7=2^{14}$, и они равновероятны (каждая королева в каждый момент выбирает одно из направлений движения; оба направления возможны, поскольку они ещё не упёрлись в край доски). Значит, искомая вероятность равна $C_{14}^{7} : 2^{14} = 429 : 2^{11}$.

Возможно и такое рассуждение, приводящее к другой форме ответа. Все клетки, удалённые от углов на равное число ходов (а именно на 7 ходов), лежат на диагонали доски. Для каждой клетки диагонали найдём количество ситуаций, при которых обе королевы за 7 ходов дошли до неё. Пусть k — номер клетки на диагонали (от 0 до 7), тогда число путей для любой из королев до этой клетки равно C_7^k (из 7 ходов k в одном направлении, остальные в другом). Столько же способов для другой королевы. Значит, всего есть $\left(C_7^k\right)^2$ способов встретиться в этой клетке. Суммируя количество способов встретиться на каждой из клеток и деля на общее количество ситуаций, получаем вероятность $\sum\limits_{k=0}^{7} \left(C_7^k\right)^2 : 2^{14}$.

4. Каждая из двух сестёр загадала натуральное число от 1 до 1000. Папа по очереди задаёт сёстрам (то одной, то другой) вопросы, на которые можно ответить «да» или «нет». Он хочет, задав не более чем по 6 вопросов каждой из сестёр, выяснить, верно ли, что загаданные числа различаются более чем на 500. При этом ни одна из девочек не знает, что загадала другая, поэтому каждую сестру можно спрашивать только о её числе. Придумайте, как папе добиться цели. (*А. А. Теслер*)

   Решение. Пусть у первой сестры a конфет, у второй b, тогда нам надо узнать, верно ли, что $|a - b| > 500$. Заметим, что при $a > 500$ это условие эквивалентно условию $a - b > 500$ (то есть $a > 500 + b$), а при $a \leqslant 500$ — эквивалентно условию $b - a > 500$ (то есть $b > 500 + a$). Итак, после вопроса первой сестре «верно ли, что $a > 500$?» задача сводится к сравнению двух чисел, лежащих в пределах от 0 до 500 (причём одно из чисел известно первой сестре, а другое второй). Это делается так же, как в решении задачи 9.5; но поскольку диапазон вдвое короче, то нам хватит не 12, а 11 вопросов; вместе с первым вопросом получаем как раз 12.

5. См. задачу 10.4.

6. См. задачу 10.6.