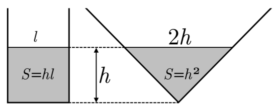
Физическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2019–2020 учебный год. Заключительный этап

Решение задач для 8 класса

1) Лев Давидович и Евгений Михайлович, владеющие дачными участками по соседству друг с другом, никак не могли решить, какая сточная канавка эстетичнее: прямоугольная или треугольная со стенками под 45° к горизонтали. В конце концов, каждый прорыл на своём участке по-своему.
10 июля моросил дождик, и сын Льва Давидовича запускал бумажные кораблики по канавке. Он заметил, что по участку Евгения Михайловича кораблик плывёт в 2 раза быстрее. А 12 июля прошёл ливень. Как только он закончился, мальчик побежал пускать кораблики. Он обнаружил, что уровень воды поднялся в 4 раза, а скорость кораблика на его участке увеличилась в 2 раза. Во сколько раз изменилась скорость на участке Евгения Михайловича?
Примечание. Одна канавка переходит в другую. Дно канавы Льва Давидовича находится на том же уровне, что и нижняя точка канавы Евгения Михайловича, их середины также совпадают. Уровень воды в обоих участках канавки одинаковый. Считайте, что скорость кораблика равна средней скорости воды в канаве.

Ответ: скорость уменьшилась в два раза.

Решение. Обозначим ширину канавки Льва Давидовича (назовем ее первой) за l, а начальный уровень воды — за h.
Поперечное сечение потока воды в первой канавке равно hl; пусть скорость воды в ней — v_1, тогда за время t через нее протекает tv_1hl воды. Аналогично, поперечное сечение потока воды в канавке Евгения Михайловича (назовем ее второй) равно h^2, и за время t через нее протекает tv_2h^2 воды.



Через канавки протекает одинаковое количество воды:

$$v_1hl = tv_2h^2 \quad\Rightarrow\quad v_1l = v_2h. \tag{8.1.1}$$

До ливня скорость во второй канавке была в два раза больше, чем в первой: $v_2 = 2v_1$. Тогда:

$$v_1l = 2v_1h \quad\Rightarrow\quad l = 2h. \tag{8.1.2}$$

Позже уровень воды увеличился до $4h$, а скорость в первой канавке возросла в два раза: $v_1' = 2v_1$. Аналогично (8.1.1) запишем:

$$t\cdot v_1'\cdot 4hl = tv_2'\cdot(4h)^2 \quad\Rightarrow\quad 8v_1l = 16v_2'h.$$

Подставляя сюда (8.1.2), получим $v_2' = v_1$.

Критерии:

- Найдены площади сечений потоков воды в канавках — 3 балла.
- Найдено отношение l и h — 3 балла.
- Получен верный ответ — 4 балла.

2) Эскалатор движется со скоростью 3 км/ч. Люди стоят на правой стороне и бегут по левой, средняя скорость бега (относительно эскалатора) — 5 км/ч. Компания подростков с самого верха заняла обе стороны эскалатора, никого не пропуская дальше. В результате за ними накопился «хвост» из людей, которые начали бежать по левой стороне, но, наткнувшись на препятствие, остановились. Сколько времени пройдёт от начала формирования пробки до момента, когда проход по левой половине наконец-то станет полностью свободен, если спуск на эскалаторе стоя занимает 3 минуты? Известно, что бежать по эскалатору предпочитает примерно четверть пассажиров.
Примечание. Считайте, что люди в пробке занимают эскалатор с той же плотностью, что и стоящие на правой стороне.

Ответ: 18 минут.

Решение. Пусть p — средняя плотность стоящих пассажиров (то есть, их количество на метр эскалатора). Четверть пассажиров бежит по левой половине эскалатора, а три четверти стоят на нём, следовательно, плотность пассажиров, бегущих по свободной части левой половины, равна $p/3$.
Найдём скорость u, с которой, относительно эскалатора, нарастает пробка. За время t количество людей в пробке увеличится на:

$$N = p\cdot u\cdot t. \tag{8.2.1}$$

В пробке окажутся люди, находящиеся на расстоянии менее $(V+u)t$ от хвоста пробки (V — скорость движения пассажиров):

$$N = \frac{p}{3}(V+u)t. \tag{8.2.2}$$

Приравняем (8.2.1) и (8.2.2):

$$put = \frac{p}{3}(V+u)t \quad\Rightarrow\quad u = \frac{V+u}{3} \quad\Rightarrow\quad u = \frac{V}{2} = 2{,}5\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}.$$

Так как эскалатор едет вниз со скоростью 3 км/ч, хвост очереди спускается со скоростью 0,5 км/ч относительно Земли. Двигаясь в 6 раз медленнее стоящего пассажира, хвост очереди достигнет станции за время, в 6 раз большее, то есть за 18 минут.

Примечание. При других величинах (например, ином соотношении бегущих и стоящих пассажиров), хвост очереди двигался бы вверх быстрее, чем сам эскалатор едет вниз, и ответом на вопрос задачи было бы «Никогда».

Критерии:

- Указано количество людей, попадающих в пробку за единицу времени — 3 балла.
- Найдена скорость движения пробки — 4 балла.
- Получен верный ответ — 3 балла.

3) Биолог разводит в своей комнате архей и холодолюбивых рыб. Они находятся в двух одинаковых закрытых аквариумах: в одном — археи при температуре 90°C, в другом — рыбы при температуре 10°C.
Чтобы поддерживать температуры неизменными, биолог соединил аквариумы тепловым насосом, который работает следующим образом: при получении от электрической сети энергии Q он передаёт $0{,}6Q$ от холодного тела горячему, и, дополнительно, сам нагревает горячее тело ещё на $0{,}6Q$ (оставшиеся $0{,}4Q$ рассеиваются). Однако для архей этого не хватает, поэтому он поместил в их аквариум ещё 7 низковольтных нагревателей.
На улице неожиданно похолодало, и температура в комнате упала с 25°C до 20°C. На сколько процентов нужно изменить мощность насоса и сколько нагревателей добавить к археям?

Примечание. Мощность теплообмена между аквариумом и воздухом в комнате пропорциональна разности их температур. Теплоёмкость воздуха в комнате считайте много больше теплоёмкостей аквариумов.

Ответ: нужно снизить мощность насоса на 33% и добавить 3 нагревателя.

Решение. Обозначим начальную мощность теплового насоса за P_1, а мощность низковольтного нагревателя — P_0. Рассмотрим тепло, получаемое и отдаваемое аквариумами в единицу времени.
Сначала аквариум с археями получал $0{,}6P_1 + 0{,}6P_1 + 7P_0$, а терял $k(90-25)$, где k — коэффициент пропорциональности между теплопередачей и разностью температур. А аквариум с рыбами получал $k(25-10)$, а терял $0{,}6P_1$.
Температура в аквариумах не менялась, следовательно, получаемое тепло равно отдаваемому:

$$\begin{cases} 0{,}6P_1 + 0{,}6P_1 + 7P_0 = k(90-25), \\ k(25-10) = 0{,}6P_1, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 1{,}2P_1 + 7P_0 = 65k, \\ 15k = 0{,}6P_1. \end{cases} \tag{8.3.1}$$

Выразим P_0 и P_1 через k:

$$P_1 = 25k, \quad P_0 = 5k. \tag{8.3.2}$$

Обозначим новую мощность теплового насоса (после похолодания) за P_2, а новое количество нагревателей в аквариуме с археями — n. Аналогично (8.3.1):

$$\begin{cases} 0{,}6P_2 + 0{,}6P_2 + nP_0 = k(90-20), \\ k(20-10) = 0{,}6P_2, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 1{,}2P_2 + nP_0 = 70k, \\ 10k = 0{,}6P_2. \end{cases} \tag{8.3.3}$$

Подставляем значения из (8.3.2):

$$\begin{cases} 10k = 0{,}6P_2, \\ P_1 = 25k. \end{cases}$$

Отсюда $P_2 = 2P_1/3$. Итак, мощность насоса нужно снизить на треть.
Подставляем P_2 и P_0 в (8.3.3), получаем:

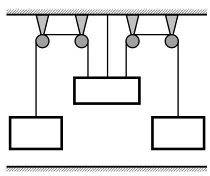
$$20k + 5nk = 70k \quad \Rightarrow \quad n = 10.$$

В начале было 7 нагревателей, то есть нужно добавить ещё 3.

Критерии:

- Указаны мощности теплопотоков для аквариумов — 2 балла.
- Записаны системы уравнений (8.3.1) и (8.3.3) — 3 балла.
- Найдено, на сколько нужно снизить мощность насоса — 3 балла.
- Найдено необходимое количество нагревателей — 2 балла.

4) Изучая закон Гука, школьники соорудили конструкцию из блоков и резинок (см. рисунок). Они подвесили на боковые резинки грузы массами 3 кг, а на центральную резинку — груз массой 2 кг. Дождавшись, пока система придёт в равновесие, они измерили высоту, на которой находится средний груз. Она оказалось равной 120 см. Потом они попробовали вешать на центральную резинку другие грузы. Груз массой 3 кг висел на высоте 110 см, груз массой 4 кг — на высоте 102 см, а груз массой 9 кг — на высоте 46 см.



На какой высоте окажется каждый из грузов, если на центральной резинке оставить груз массой 9 кг, а на боковые подвесить грузы массой в 4 кг?

Примечание. Трения в осях блоков нет. Боковые резинки одинаковые.

Ответ: боковые грузы будут на полу, а центральный будет висеть на высоте 69 см или 62 см.

Решение. Введем обозначения: k_1 — жёсткости боковых резинок, x_1 — изменения их длин, m — массы висящих на них грузов, k_2 — жёсткость центральной резинки, x_2 — изменение её длины, M — масса центрального груза, h — высота, на которой будет висеть центральный груз в последнем, пятом эксперименте (из вопроса задачи).

Прежде всего отметим, что:

- верхняя резинка может быть как натянута (тогда сила натяжения $F_2 = k_2 x_2$), так и висеть свободно ($F_2 = 0$);
- боковые грузы могут висеть (тогда сила натяжения боковых резинок максимальна: $F_1 = mg$), а могут стоять на полу ($F_1 = k_1 x_1$);
- также возможно, что грузы стоят на полу, а резинки не натянуты ($F_1 = 0$).

Условие равновесия системы: $Mg = 2F_1 + F_2$.

Школьники провели 4 эксперимента ($M = 2$ кг, $M = 3$ кг, $M = 4$ кг и $M = 9$ кг). Сначала разберём первые три из них, ведь в них боковые грузы стоят на полу (поскольку они тяжелее центрального).

Если бы груз висел на одних и тех же резинках, его высота линейно зависела бы от веса. Но это не так, поэтому можно однозначно понять, что в первом эксперименте натянуты не все резинки, а в третьем — все. Получается, что есть 4 возможных случая:

№	**Резинка**	**1 эксперимент**	**2 эксперимент**
1)	центральная боковые	не натянута натянуты	не натянута натянуты
2)	центральная боковые	не натянута натянуты	натянута натянуты
3)	центральная боковые	натянута не натянуты	натянута не натянуты
4)	центральная боковые	натянута не натянуты	натянута натянуты

Случай 1. Рассмотрим разницу между первыми двумя экспериментами: действующая на резинки сила увеличилась на 10 Н, тело опустилось на 0,1 м. Следовательно, жёсткость боковой резинки $k_1 = 10/0{,}1/2 = 50$ Н/м.

Пусть x_{01} — высота груза, при которой начинают натягиваться боковые резинки (если груз выше, они провисают, если ниже — натянуты). x_{02} — высота груза, при которой начинает натягиваться центральная резинка. В первом эксперименте к резинке приложена сила $Mg = 20$ Н. Растяжение резинки $Mg/(2k_1) = 0{,}2$ м. Отсюда $x_{01} = 140$ см.

В третьем эксперименте боковые резинки создают силу $(x_{01} - 1{,}02) \cdot 2k_1 = 38$ Н, а вес груза равен 40 Н. Следовательно, центральная резинка даёт силу 2 Н.

Если бы в четвёртом эксперименте боковые грузы стояли на полу, создаваемая боковыми резинками сила была бы равна $(x_{01} - 0{,}46) \cdot 2k_1 = 94$ Н, что больше веса центрального груза. Значит, боковые грузы висят. Боковые резинки создают силу 60 Н. Центральная тогда создаёт 30 Н.

Рассмотрим разницу между третьим и четвёртым экспериментами. Центральная резинка растянулась на 56 см, её сила упругости увеличилась на 28 Н. Жёсткость центральной резинки $k_2 = 28/0{,}56 = 50$ Н/м.

Растяжение центральной резинки в третьем эксперименте $2/50 = 0{,}04$ м. Следовательно, $x_{02} = 106$ см. Резинка действительно провисает во втором эксперименте и натянута в третьем, то есть полученное значение x_{02} нам подходит.

Осталось рассмотреть последний эксперимент. Боковые грузы опустятся на пол, центральный поднимется на высоту h. Тогда $(x_{01} - h) \cdot 2k_1 + (x_{02} - h) \cdot k_2 = 90$. Подставляя x_{01}, x_{02}, k_1 и k_2, находим $h = 69$ см.

Случай 2. Если бы в четвёртом эксперименте ($M = 9$ кг) боковые грузы стояли на полу, во втором, третьем и четвёртом экспериментах высота груза линейно зависела бы от его веса, что неправда. Значит, в четвёртом эксперименте боковые грузы висят.

В каждом эксперименте сила натяжения резинок равна силе тяжести. В первом эксперименте натянуты только боковые резинки, а в четвёртом грузы подняты (боковые резинки создают силу 60 Н). Напишем систему уравнений:

$$\begin{cases} (x_{01} - 1{,}2) \cdot 2k_1 = 20, \\ (x_{01} - 1{,}1) \cdot 2k_1 + (x_{02} - 1{,}1) \cdot k_2 = 30, \\ (x_{01} - 1{,}02) \cdot 2k_1 + (x_{02} - 1{,}02) \cdot k_2 = 40, \\ 60 + (x_{02} - 0{,}46) \cdot k_2 = 90, \end{cases} \tag{8.4.1}$$

откуда $x_{01} = 1{,}45$; $x_{02} = 1{,}14$; $k_1 = 40{,}5$; $k_2 = 43{,}9$.

Проверим, подходят ли полученные значения x_{01} и x_{02}: боковые резинки натянуты всегда, а центральная провисает в первом эксперименте и натянута во втором — сходится. Осталось вычислить h: $(x_{01} - h) \cdot 2k_1 + (x_{02} - h) \cdot k_2 = 90$. Отсюда $h = 62$ см.

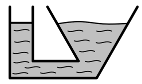
Случай 3. Рассмотрим разницу между первыми двумя экспериментами. Действующая на резинку сила увеличилась на 10 Н, при этом тело опустилось на 0,1 м. Следовательно, жёсткость резинки $k_2 = 10/0{,}1 = 100$ Н/м.

Рассмотрим разницу между первым и четвёртым экспериментами. В первом сила упругости резинки равна 20 Н, при этом в четвёртом резинка растянута на 0,74 м сильнее, то есть сила упругости больше на $0{,}74 \cdot 100 = 74$ Н. Получается, в четвёртом эксперименте сила равна 94 Н, но груз весит всего 90 Н. Противоречие.

Случай 4. Если бы в четвёртом эксперименте ($M = 9$ кг) боковые грузы стояли на полу, во втором, третьем и четвёртом эксперименте высота груза линейно зависела бы от его веса. Это не так. Значит, в четвёртом эксперименте боковые грузы висят.
В каждом эксперименте сила натяжения резинок равна силе тяжести. В первом эксперименте натянута только центральная резинка, в четвёртом грузы подняты (боковые резинки создают силу 60 Н). Решая систему (8.4.1), получим $x_{01} = 1{,}18$; $x_{02} = 2{,}68$; $k_1 = 55{,}7$; $k_2 = 13{,}5$.
Полученные значения x_{01} и x_{02} снова подходят (центральная резинка натянута всегда, боковые резинки провисают в первом эксперименте и натянуты во втором). Осталось найти h: $(x_{01} - h) \cdot 2k_1 + (x_{02} - h) \cdot k2 = 90$. Отсюда $h = 62$ см.
Примечание. К большому сожалению жюри, в условии задачи была допущена досадная ошибка, из-за которой решение задачи оказалась значительно более длинным, чем планировалось. Приносим свои искренние извинения.

Критерии:
- Указано, что резинки могут быть не натянуты, а боковые грузы могут как стоять на полу, так и висеть — 1 балл.
- Показано, что в первом эксперименте натянуты не все резинки, а в третьем положении все — 1 балл.
- Показано, что в первых трёх положениях боковые грузы стоят на полу — 1 балл.
- Рассмотрен случай №1 (найдены x_{01}, x_{02}, k_1, k_2) — 1 балл.
- Получен ответ для случая №1 — 1 балл.
- Рассмотрен случай №2 (найдены x_{01}, x_{02}, k_1, k_2) — 1 балл.
- Получен ответ для случая №2 — 1 балл.
- Рассмотрен случай №3 — 1 балл.
- Рассмотрен случай №4 (найдены x_{01}, x_{02}, k_1, k_2) — 1 балл.
- Получен ответ для случая №4 — 1 балл.

5) Два сосуда (один — цилиндрической, а другой — треугольной формы) соединены трубкой у основания. Цилиндрический сосуд сверху закрыт тонким невесомым поршнем (см. рисунок). В начальный момент в обоих сосудах находится вода общим объёмом 400 мл. Экспериментатор наливает 10 мл некоторой жидкости в цилиндрический сосуд поверх поршня. В результате уровень воды в треугольном сосуде поднимается до 12 см. Какой объём этой жидкости необходимо долить, чтобы уровень воды в треугольном сосуде поднялся до 15 см?



Примечание. Площадь сечения цилиндрического сосуда — 20 см^2, объём воды в треугольном сосуде определяется по формуле $V = Kh^2$, где h — уровень воды в нём, а $K = 2$ см — постоянный коэффициент. Плотность воды — 1000 кг/м^3. Объёмом воды в соединяющей сосуды трубке можно пренебречь.

Ответ: 155,6 мл.

Решение. В цилиндрический сосуд налили 10 мл неизвестной жидкости. Уровень воды в правом сосуде стал равен 12 см (далее все величины указаны в сантиметрах, миллилитрах и граммах). Объём воды в нём $2 \cdot 12^2 = 288$.
Общий объём воды — 400, то есть в левом сосуде её осталось $400 - 288 = 112$. Значит, высота столба воды левом сосуде $112/20 = 5{,}6$. Также мы знаем, что высота столба воды в правом сосуде равна 12, а неизвестной жидкости — $10/20 = 0{,}5$. Обозначим её плотность за ρ_1.
Давления в нижних частях сосудов равны:

$$\rho_1 \cdot g \cdot 0{,}5 + 1 \cdot g \cdot 5{,}6 = 1 \cdot g \cdot 12 \quad \Rightarrow \quad \rho_1 = 12{,}8.$$

После доливания неизвестной жидкости уровень воды в правом сосуде поднялся до 15 см, тогда объём жидкости в нём стал равен $2 \cdot 152 = 450$ мл. Это больше суммарного объёма воды, значит, нижние 50 мл — это неизвестная жидкость, перетёкшая из левого сосуда, когда поршень опустился до дна. Пусть её высота — h_2:

$$2 \cdot h_2^2 = 50 \quad \Rightarrow \quad h_2 = 5.$$

Таким образом, высота столба воды в правом сосуде равна $15 - 5 = 10$. Обозначим высоту неизвестной жидкости в левом сосуде за h_1. Её давление равно $\rho_1 g h_1$, а общее давление в правом сосуде складывается из ее давления и давления воды:

$$\rho_1 \cdot g \cdot h_1 = 1 \cdot g \cdot 10 + \rho_1 \cdot g \cdot 5 \quad \Rightarrow \quad 12{,}8h_1 = 10 + 12{,}8 \cdot 5 \quad \Rightarrow \quad h_1 \approx 5{,}78.$$

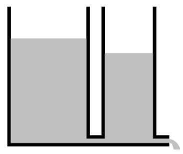
Отсюда объём жидкости в левом сосуде равен $20 \cdot 5{,}78 = 115{,}6$ мл, а в правом сосуде её 50 мл, то есть всего жидкости стало 165,6 мл, а было 10 мл. Итак, долили жидкости 155,6 мл.

Критерии:
- Найдена разница столбов жидкости в правом и левом сосуде — 1 балл.
- Найдена плотность жидкости — 2 балла.
- Найдена новая высота столба воды — 2 балла.
- Найдена новая высота столба неизвестной жидкости — 3 балла.
- Получен верный ответ — 2 балла.

Физическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2019–2020 учебный год. Заключительный этап

Решение задач для 9 класса

1) Экспериментатор Глюк поехал на дачу, забыв дома оборудование для экспериментов. К счастью, на даче нашлись два сосуда и две трубки. Пошёл дождь, и экспериментатор смог поставить следующий опыт: одной трубкой соединил сосуды у дна, а вторую (такую же) трубку присоединил ко второму сосуду (см. рис.). Вынеся сосуды под дождь, он дождался, пока уровень воды станет стабильным, и снял показания.



В левом сосуде уровень воды был 1,5 м, в правом — 0,9 м. Вскоре дождь усилился в два раза. Глюк закрыл правый сосуд крышкой, снова дождался, пока уровень установится, но, не успев ничего померить, уронил сосуды. Чтобы пожаловаться на свою досаду, Глюк позвонил теоретику Багу. Может ли Баг успокоить Глюка и вычислить уровни воды в сосудах после усиления дождя? Багу известно, что скорость жидкости в трубке пропорциональна разности давлений на её концах.

Ответ: 2,4 м и 1,2 м.

Решение. Пусть в левый сосуд поступает K воды в секунду. Количество вытекающей воды пропорционально разности давлений в сосудах. Количество поступающей воды равно количеству вытекающей.

$$K = c(P_1 - P_2), \tag{9.1.1}$$

где P_1 — давление воды в левом сосуде, P_2 — давление в правом, c — коэффициент пропорциональности.
После усиления дождя в два раза в левый сосуд поступает $2K$ воды в секунду, которая вся перетекает в правый. Пусть давление в левом сосуде — P_3, а в правом — P_4:

$$\begin{cases} 2K = c(P_3 - P_4) & \text{— количество воды в левом сосуде не меняется,} \\ 2K = cP_4 & \text{— количество воды в правом сосуде не меняется.} \end{cases}$$

Подставим значение K из (9.1.1):

$$\begin{cases} 2c(P_1 - P_2) = c(P_3 - P_4), \\ 2c(P_1 - P_2) = cP_4. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(P_1 - P_2) = P_3 - P_4, \\ 2(P_1 - P_2) = P_4. \end{cases}$$

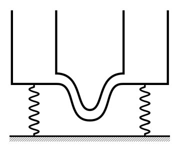
Давление столба жидкости находится по формуле $P = \rho g h$:

$$\begin{cases} 2(\rho g h_1 - \rho g h_2) = \rho g h_3 - \rho g h_4, \\ 2(\rho g h_1 - \rho g h_2) = \rho g h_4. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(h_1 - h_2) = h_3 - h_4, \\ 2(h_1 - h_2) = h_4. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h_4 = 2(1{,}5 - 0{,}9) = 1{,}2 \text{ м}, \\ h_3 = 2h_4 = 2{,}4 \text{ м}. \end{cases}$$

Критерии:

- Записано равенство потоков для сосудов в начальный момент времени — 3 балла.
- Записано равенство потоков для сосудов после усиления дождя — 3 балла.
- Получен верный ответ — 4 балла.

2) Два лёгких сосуда, соединённые у основания тонким гибким шлангом, стоят на пружинах, прикреплённых к полу (см. рисунок). Экспериментатор Глюк проделал с ними следующие операции:



1. Налил 160 мл воды в левый сосуд. В результате правый сосуд опустился на 2 см, а левый остался на месте.
2. Вылил воду, поменял сосуды местами и налил в левый 670 мл воды. Он опустился на 2 см, а правый опустился на 3 см.
3. Вылил воду и вернул сосуды в первоначальное положение.
4. Глюк решил подобрать такую жидкость, чтобы при наливании её в левый сосуд тот опускался. Постепенно варьируя плотность, он такую жидкость получил.
5. Он снова поменял сосуды местами и налил в левый 100 мл этой жидкости.

На сколько опустится каждый из сосудов?

Примечание. Известно, что площадь дна одного из сосудов в пять раз больше другого.

Ответ: на 6,5 мм и 0 мм (1 вариант) или на 0,42 мм и 0,18 мм (2 вариант).

Решение. Пусть S — площадь сечения сосуда, m — масса воды в нём, x — изменение длины пружины, h — высота воды в сосуде.
Рассмотрим эксперименты Глюка последовательно. В первом левый сосуд не наполнялся, потому что правый сосуд опускался быстрее, чем в нём поднимался уровень воды. Во втором эксперименте сосуды опускались вместе. Значит, правый сосуд широкий, а левый узкий. По условию $S_2 = 5S_1$.

Первый эксперимент. В начале в правом сосуде оказалось 160 мл воды, при этом он опустился на 2 см. Изменение длины пружины связано с массой воды соотношением $kx = mg$. Находим жёсткость правой пружины:

$$k_2 = m_2 g / x_2 = 0{,}16 \cdot 10 / 0{,}02 = 80 \text{ Н/м}.$$

Второй эксперимент. Сосуды поменяли местами и налили воду, при этом правый опустился на 3 см. Значит, в нём $m_2 = k_2 \cdot x/g = 240$ г воды. Всего воды 670 г. Значит, в левом сосуде $m_1 = 670 - 240 = 430$ г, а опустился он на 2 см. Находим жёсткость левой пружины:

$$k_1 = m_1 g/x_1 = 0{,}43 \cdot 10/0{,}02 = 215 \text{ Н/м}.$$

Запишем систему уравнений*:

$$\begin{cases} m_1 = S_2 h_1 \rho & \text{— масса равна произведению объёма и плотности,} \\ m_2 = S_1 h_2 \rho, \\ h_1 - x_1 = h_2 - x_2 & \text{— вода в сосудах находится на одном уровне,} \\ S_2 = 5S_1 & \text{— по условию,} \end{cases} \tag{9.2.1}$$

из которой находим

$$\begin{cases} S_1 = 154 \text{ см}^2, \\ S_2 = 770 \text{ см}^2. \end{cases}$$

Третий эксперимент. Сосуды вернули в начальные положения. При заливании жидкости плотностью $\rho_н$ в левый сосуд тот опускается. Это возможно в двух случаях.

Случай 1. Плотность жидкости увеличили, тогда пружина сжимается быстрее, чем поднимается уровень жидкости, то есть левый сосуд опускается, а правый — нет. Граничный случай — уровень воды в левом сосуде остаётся вровень с дном правого, тогда $h_1 = x_1$:

$$k_1 x = m_1 g \quad \Rightarrow \quad k_1 x = S_1 h_1 \rho_н g \quad \Rightarrow \quad k_1/(S_1 g) = \rho_н \quad \Rightarrow \quad \rho_н \approx 1{,}40 \text{ г/см}^3.$$

Случай 2. Плотность жидкости уменьшили, тогда правая пружина сжимается медленнее, чем поднимается уровень воды, то есть опускаются оба сосуда. Граничный случай — уровень воды в правом сосуде остаётся вровень с дном левого, тогда $h_2 = x_2$:

$$k_2 x = m_2 g \quad \Rightarrow \quad k_2 x = S_2 h_2 \rho_н g \quad \Rightarrow \quad k_2/(S_2 g) = \rho_н \quad \Rightarrow \quad \rho_н \approx 0{,}104 \text{ г/см}^3.$$

Четвертый эксперимент. Сосуды поменяли местами и налили в левый $V = 100$ мл новой жидкости.

Случай 1. $\rho_н \approx 1{,}40$ г/см^3. Теперь слева широкий сосуд. Раз уровень воды в узком поднимался медленнее, чем сжималась пружина, то и в широком будет так же:

$$V \rho_н g = k_1 x_1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 6{,}5 \text{ мм}.$$

Итак, левый сосуд опустился на 6,5 мм, правый остался на месте.

Случай 2. Опускаются оба сосуда. Запишем систему уравнений, аналогичную (9.2.1):

$$\begin{cases} k_1 x_1 = S_2 h_1 \rho_н g, \\ k_2 x_2 = S_1 h_2 \rho_н g, \\ h_1 - x_1 = h_2 - x_2, \\ S_2 h_1 + S_1 h_2 = V, \end{cases}$$

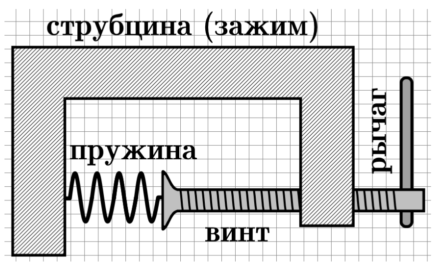
откуда $x_1 = 0{,}42$ мм, $x_2 = 0{,}18$ мм.

Критерии:

- Найдена жёсткость правой пружины — 1 балл.
- Найдена площадь дна каждого из сосудов — 2 балла.
- Рассмотрен случай с тяжёлой жидкостью — 3 балла.
- Рассмотрен случай с лёгкой жидкостью — 4 балла.

3) В струбцине зажата пружина жёсткостью 500 Н/м. Пружина не деформирована. Прикладывая к концу рычага винта силу 0,8 Н, его повернули 5 раз. Каков КПД струбцины в этом процессе?

Примечание. Потенциальная энергия пружины ищется по формуле $E = k \cdot x^2/2$, где k — жёсткость пружины, а x — изменение её длины. Масштаб чертежа — в 1 клетке 4 см.



Ответ: 31%.

Решение. Длина рычага — 9 клеточек = 36 см = 0,36 м. За 5 оборотов конец рычага прошёл расстояние $L = 5 \cdot 2\pi \cdot 0{,}36 \approx 11{,}30$ м. Работа равна произведению силы и пройденного пути:

$$A = 0{,}8 \cdot L \approx 9{,}043 \text{ Дж}.$$

Найдём расстояние x, пройденное винтом. На 8 клеточек приходится 15 витков винта. Соответственно, за пять оборотов винт пройдёт

$$x = \frac{8}{15} \cdot 5 \text{ кл.} = \frac{32}{3} \text{ см} \approx 0{,}1067 \text{ м}.$$

Внутренняя энергия пружины выражается формулой

$$E = k \cdot \frac{x^2}{2} \approx 2{,}846 \text{ Дж}.$$

*Сосуды поменяли местами, поэтому уровень воды h_1 в сосуде с площадью дна S_2.

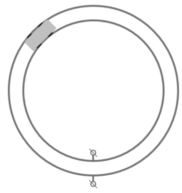
КПД равен отношению энергии E к произведённой работе A:

$$\text{КПД} = \frac{E}{A} \approx 31\%.$$

Критерии:

- Найден пройденный рычагом путь — 2 балла.
- Найден пройденный винтом путь — 2 балла.
- Найдена совершённая работа — 2 балла.
- Найдена энергия пружины — 2 балла.
- Получен верный ответ — 2 балла.

4) На испытаниях моделей электрического транспорта сделан круговой трек длиной 16 м из двух токопроводящих рельс. Около точки старта каждая из рельс подключена к клемме источника тока (см. рисунок). Машинка едет по рельсам, замыкая электрическую цепь. Хулиган Даниэль поцарапал рельсы булавкой в некоторой точке L от старта, из-за чего их сопротивление в этом месте существенно возросло. Скорость машинки стала минимальной в точке 6 м.



Даниэль на этом не остановился и так же повредил рельсы на расстоянии $2L$, в результате чего точка минимальной скорости оказалась на отметке 5,2 м. Наконец, он отошёл на $4L$ и повторил акт вандализма три раза почти в одном месте. Определите расположение новой точки минимальной скорости.

Примечание. Считайте, что Даниэль царапает рельсы всегда одним и тем же образом, все расстояния отложены по часовой стрелке от точки старта, а скорость машины пропорциональна мощности двигателя.

Ответ: 10 метров.

Решение. Две дуги трека между клеммами и машинкой соединены параллельно. Докажем, что сопротивление всей цепи максимально, когда их сопротивления равны.

Пусть сопротивления слева и справа равны R, тогда общее сопротивление трека — $R/2$. Сдвинем машинку. Пусть сопротивление левого участка уменьшилось на r, а правого — увеличилось на r. Найдем общее сопротивление:

$$\frac{1}{R_{\text{общ}}} = \frac{1}{R-r} + \frac{1}{R+r} = \frac{2R}{R^2-r^2} \quad \Rightarrow \quad R_{\text{общ}} = \frac{R^2-r^2}{2R}.$$

Очевидно, $R_{\text{общ}}$ максимально при $r=0$. Итак, скорость машинки минимальна в точке, в которой сопротивления двух дуг трека равны.

Но и есть и другой вариант. Пока машина не доехала до царапины, сопротивления обеих дуг меняется непрерывно. При пересечении царапины сопротивления меняются скачком. Поэтому может оказаться, что нет точки, в которой сопротивления левой и правой части трека равны. Тогда скорость машинки минимальна на повреждённом участке.

Итак, пусть общее сопротивление трека R, сопротивление поцарапанного участка r. Рассмотрим, что произошло, когда хулиган поцарапал трек первый раз. Скорость минимальна на 6 м. Сопротивление справа — 10 метров трека, слева — 6 метров трека и поцарапанный участок:

$$\frac{10}{16}R = \frac{6}{16}R + r \tag{9.4.1}$$

$$0{,}25R = r. \tag{9.4.2}$$

Это отношение сопротивления трека к сопротивлению повреждённого участка.

Теперь хулиган поцарапал трек второй раз. Скорость минимальна на 5,2 м. Рассмотрим возможные варианты:

Случай 1. Скорость минимальна на участке между царапинами. Тогда сопротивление слева и справа складывается из сопротивления участка трека и одной царапины. То есть, минимальная скорость на 8 метрах, когда дуги трека равны. Это не так.

Случай 2. Обе царапины расположены с одной стороны от точки минимума скорости. Тогда аналогично (9.4.1) запишем:

$$\frac{10{,}8}{16}R = \frac{5{,}2}{16}R + 2r.$$

Отсюда мы получим отношение R к r, отличное от (9.4.2). Этот вариант тоже отпадает.

Случай 3. Значит, минимум скорости сейчас на повреждёном участке. Это будет второй участок (скорость на первом, очевидно, больше). Отсюда находим $L = 5{,}2/2 = 2{,}6$ м.

Отметим также, что в первый раз скорость не могла быть минимальна на повреждённом участке. Действительно, если $L = 6$, то второй повреждённый участок был бы на 12 м, и скорость была бы минимальна на 8 м.

Наконец, после третьего «хулиганства» мы имеем по одной царапине на 2,6 м и 5,2 м и три царапины на 10,4 м. Очевидно, что минимум скорости будет либо на трёх царапинах, либо между ними и двумя другими. Проверим второй вариант. Пусть минимум расположен на расстоянии l. Сопротивления левого и правого участка равны:

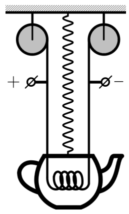
$$\frac{l}{16}R + 2r = \frac{16-l}{16}R + 3r \quad \Rightarrow \quad \frac{l}{8}R = R + \frac{1}{4}R \quad \Rightarrow \quad l = 10 \text{ м}.$$

Всё сходится, минимум действительно между тремя и двумя царапинами.

Критерии:

- Показано, что скорость минимальна, когда слева и справа сопротивление одинаковое — 1 балл.
- Найдено отношение r к R — 3 балла.
- Найдено L — 3 балла.
- Получен верный ответ — 3 балла.

5) Развлекаясь с набором «Юный электрик», Вася собрал следующую схему: кипятильник, помещённый в чайник, подключил к двум длинным тонким проводам, каждый из которых намотал на катушку. Решив, что схема слишком проста, Вася подвесил чайник к потолку на пружине, а провода подключил к скользящим клеммам источника тока, размещённым на одной высоте (см. рисунок). Налив воду в чайник и замкнув цепь, он начал наблюдать за процессом кипения. Когда в чайнике было 2 л, она выкипала со скоростью 1 мл/с. Когда в нём остался 1 л — со скоростью 2,25 мл/с. С какой скоростью вода будет выкипать, когда останется 0,5 л?



Ответ: 4 мл/с.

Решение. Пусть R — сопротивление кипятильника, U — напряжение на клеммах, p — сопротивление единицы длины провода, h — высота, на которой висит чайник. По закону Ома, сила тока в цепи:

$$I = \frac{U}{R + hp}.$$

Мощность кипятильника:

$$P = I^2 R = \frac{U^2 R}{(R + hp)^2}.$$

Пусть за небольшое время Δt выкипает Δm воды. На это требуется $L\Delta m$ энергии, где L — удельная теплота испарения воды. Мощность процесса:

$$P = L\Delta m/\Delta t.$$

Эта мощность равна мощности кипятильника. Получаем:

$$\frac{U^2 R}{(R+hp)^2} = L\frac{\Delta m}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta t}{\Delta m}U^2 R = L(R+hp)^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta t}{\Delta m}\frac{U^2}{RL} = \left(1 + \frac{hp}{R}\right)^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{\frac{\Delta t}{\Delta m}\frac{U^2}{RL}} = 1 + \frac{hp}{R}. \tag{9.5.1}$$

Пусть k — жёсткость пружины, h_0 — высота, на которой висел бы пустой чайник. По закону Гука:

$$mg = k(h_0 - h) \quad \Rightarrow \quad h = h_0 - \frac{mg}{k}.$$

Подставим значение h в (9.5.1):

$$\sqrt{\frac{\Delta t}{\Delta m}\frac{U^2}{RL}} = 1 + \frac{h_0 p}{R} - m\frac{gp}{kR}.$$

Сделаем замену переменных:

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{U^2}{RL}} = C_1 \\ 1 + \frac{ph_0}{R} = C_2 \\ \frac{gp}{kR} = C_3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\frac{\Delta t}{\Delta m}}C_1 = C_2 - mC_3.$$

Сразу сделаем ещё одну замену:

$$\begin{cases} \frac{C_2}{C_1} = a \\ \frac{C_3}{C_1} = -b \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\frac{\Delta t}{\Delta m}} = a + mb.$$

Подставляем числа из условия (пусть мы взяли a и b так, чтобы масса измерялась в килограммах, а скорость выкипания в мл/с):

$$\begin{cases} a + b\cdot 2 = 1 \\ a + b \cdot 1 = \sqrt{\frac{1}{2{,}25}} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a = b = \frac{1}{3}.$$

Осталось найти скорость выкипания, когда в чайнике останется 0,5 л воды:

$$\sqrt{\frac{\Delta t}{\Delta m}} = a + mb \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\frac{\Delta t}{\Delta m}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot 0{,}5 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta m}{\Delta t} = 4.$$

Критерии:

- Записана зависимость мощности кипятильника от высоты — 1 балл.
- Найдена зависимость скорости выкипания от высоты — 1 балл.
- Записан закон Гука — 1 балл.
- Проведена часть необходимых преобразований — 4 балла.
- Получен верный ответ — 3 балла.

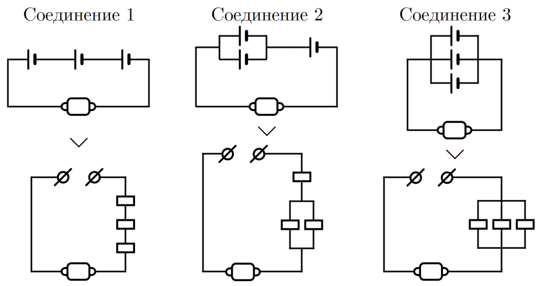
Физическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2019–2020 учебный год. Заключительный этап

Решение задач для 10 класса

1) В наборе «Юный электрик» Вася нашёл моторчик, три одинаковых батарейки и набор проводов. Перепробовав все возможные варианты подключения батареек к моторчику, он выбрал тот, при котором мощность моторчика максимальна — 15 Вт.
Вскоре Вася обнаружил, что батарейки постепенно садятся. Желая, чтобы мощность моторчика всё время была максимальной, он пересобрал схему ровно в тот момент, когда оптимальная конструкция поменялась. Затем пришлось это сделать ещё раз. Какой будет мощность моторчика сразу после второй пересборки?
Примечание. Сопротивление моторчика — 60 Ом, начальное сопротивление батарейки — 20 Ом. Внутреннее сопротивление батарейки увеличивалось пропорционально прошедшему через неё заряду, ЭДС батарейки неизменна.

Ответ: 0,94 Вт.

Решение. Есть три способа подключить батарейки к моторчику (см. рисунок).



Сила тока в цепи (она же сила тока через моторчик) равна отношению общего ЭДС к общему сопротивлению:
$$I = \frac{\mathcal{E}_{\text{общ}}}{R_{\text{общ}}}.$$
Рассмотрим схемы в начальный момент ($R_{\text{мот}} = 60$ Ом — сопротивление моторчика, $r_1 = 20$ Ом — начальное сопротивление батарейки, $\mathcal{E}$ — ЭДС батарейки):

Соединение 1: $R_{\text{общ}} = R_{\text{мот}} + 3r_1 = 60 + 3\cdot 20 = 120$ Ом $\Rightarrow$ $\mathcal{E}_{\text{общ}} = 3\mathcal{E}$ $\Rightarrow$ $I = \dfrac{\mathcal{E}}{40}$.

Соединение 2: $R_{\text{общ}} = R_{\text{мот}} + 1{,}5r_1 = 60 + 1{,}5\cdot 20 = 90$ Ом $\Rightarrow$ $\mathcal{E}_{\text{общ}} = 2\mathcal{E}$ $\Rightarrow$ $I = \dfrac{\mathcal{E}}{45}$.

Соединение 3: $R_{\text{общ}} = R_{\text{мот}} + \dfrac{r_1}{3} = 60 + \dfrac{20}{3} \approx 77$ Ом $\Rightarrow$ $\mathcal{E}_{\text{общ}} = \mathcal{E}$ $\Rightarrow$ $I = \dfrac{\mathcal{E}}{77}$.

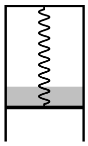
Очевидно, что в начале оптимальна первая схема: в ней сила тока и, следовательно, мощность моторчика максимальны. Поскольку начальная мощность $P = 15$ Вт:
$$P = I^2 R_{\text{мот}} = \left(\frac{\mathcal{E}_{\text{общее}}}{R_{\text{общее}}}\right)^2 R_{\text{мот}} \quad\Rightarrow\quad 15 = \left(\frac{3\mathcal{E}}{120}\right)^2\cdot 60 \quad\Rightarrow\quad \mathcal{E} = 20 \text{ В}.$$
Со временем батарейки садятся, внутреннее сопротивление увеличивается. Через них прошёл одинаковый ток, следовательно, сопротивления увеличились одинаково. Оптимальной становится вторая схема.
Рассмотрим момент, когда первые две схемы одинаково эффективны. Силы тока в них одинаковы. Пусть новое внутреннее сопротивление r_2:
$$\frac{3\mathcal{E}}{R_{\text{мот}} + 3r_2} = \frac{2\mathcal{E}}{R_{\text{мот}} + 1{,}5r_2} \quad\Rightarrow\quad 3(R_{\text{мот}} + 1{,}5r_2) = 2(R_{\text{мот}} + 3r_2) \quad\Rightarrow\quad R_{\text{мот}} = 1{,}5r_2 \quad\Rightarrow\quad r_2 = 40 \text{ Ом}.$$
Примечание. В первых двух схемах сила тока $2\mathcal{E}/(R_{\text{мот}} + 1{,}5r_2) = 0{,}33$ А. При таком внутреннем сопротивлении батареек ток в третьей схеме был бы $\mathcal{E}/(R_{\text{мот}} + r_2/3) = 0{,}27$ А. Третья схема пока хуже первых двух.
Батарейки продолжают садиться. Две из них соединены параллельно, ток через них в два раза меньше, чем через третью, то есть если у первых двух внутреннее сопротивление изменилось на Δr, то у третьей батарейки оно изменилось на $2\Delta r$.
Рассмотрим момент, в который вторая и третья схема одинаково эффективны. Общее сопротивление батареек во второй схеме равно
$$0{,}5(r_2 + \Delta r) + r_2 + 2\Delta r,$$
а в третьей:
$$\frac{1}{\dfrac{1}{r_2 + \Delta r} + \dfrac{1}{r_2 + \Delta r} + \dfrac{1}{r_2 + 2\Delta r}} = \frac{(r_2 + \Delta r)(r_2 + 2r_2)}{3r_2 + 5\Delta r}.$$
Силы тока равны:
$$\frac{2\mathcal{E}}{R + 0{,}5(r_2 + \Delta r) + r_2 + 2\Delta r} = \frac{\mathcal{E}}{R + \dfrac{(r_2 + \Delta r)(r_2 + 2r_2)}{3r_2 + 5\Delta r}} \quad\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\quad 2\left(R + \frac{(r_2 + \Delta r)(r_2 + 2r_2)}{3r_2 + 5\Delta r}\right) = R + 0{,}5(r_2 + \Delta r) + r_2 + 2\Delta r.$$

Отсюда $\Delta r = 16{,}19$ Ом. Общее сопротивление второй цепи в этот момент 160 Ом, поэтому сила тока $20/160 = 0{,}125$ А, а мощность на моторчике $0{,}125^2 \cdot 60 \approx 0{,}94$ Вт.

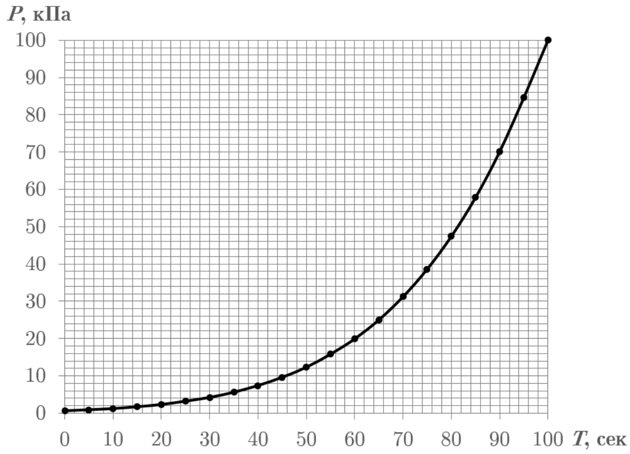
Критерии:

- Изображены возможные схемы — 1 балл.
- Показано, какая оптимальна на начальном этапе — 1 балл.
- Найдено ЭДС батарейки — 1 балл.
- Найдено r_1 — 2 балла.
- Записано выражение для Δr — 3 балла.
- Найдено Δr — 1 балл.
- Получен верный ответ — 1 балл.

2) Вертикальный цилиндр закрыт снизу поршнем массой 1 кг, прикреплённым пружиной с начальной длиной 90 см к верхней стенке цилиндра. Затем в цилиндр налили 500 мг воды. Когда система пришла в равновесие, установилась температура 40°C. Длина пружины стала равной 1 м. К системе подключили нагреватель. Найдите длины пружины при температуре 50°C и при температуре 70°C. Площадь поршня равна 50 см^2.



Примечание. График зависимости давления насыщенного пара от температуры представлен на рисунке. Опыт проводится в вакууме: воздуха нет как в цилиндре, так и во внешнем пространстве.



Ответ: 1,06 м и 1,08 м.

Решение. Рассмотрим первый эксперимент. Температура $T_1 = 40\ ^\circ\mathrm{C} = 313$ К. Длина пружины $l_1 = 1$ м. Давление насыщенного пара при этой температуре $P_1 = 7$ кПа. Найдём жёсткость k пружины.
Пусть l_0 — длина нерастянутой пружины, M — масса поршня, m — масса воды, а S — площадь поршня. Запишем закон Гука:

$$k(l_1 - l_0) = Mg + P_0 S \quad \Rightarrow \quad k = 450\ \text{Н/м}.$$

Мы пренебрегаем весом воды mg, так как он много меньше веса поршня.

Проверим, что при этих условиях пар насыщенный. Найдём массу испарившейся воды. По закону Менделеева-Клапейрона:

$$P_1 l_1 S = \frac{m_{\text{исп}(1)}}{\mu} R T_1,$$

где $\mu = 18 \cdot 10^{-3}$ кг/моль — молярная масса воды. Отсюда находим $m_{\text{исп}(1)} \approx 2{,}4 \cdot 10^{-4}$ кг. Действительно, испарилась не вся вода в системе.

Рассмотрим вторую ситуацию. Температура поднялась до $T_2 = 50°\mathrm{C} = 323$ К. Допустим, при этой температуре испарилась не вся вода. Тогда давление $P_2 = 12$ кПа. Найдём длину пружины l_2.

$$k(l_2 - l_0) = Mg + P_2 S \quad \Rightarrow \quad l_2 = 1{,}06\ \text{м}.$$

Найдём количество испарившейся воды. По закону Менделеева-Клапейрона:

$$P_2 l_2 S = \frac{m_{\text{исп}(2)}}{\mu} R T_2 \quad \Rightarrow \quad m_{\text{исп}(2)} \approx 4{,}3 \cdot 10^{-4}\ \text{кг}.$$

Предположение верно, испарилась не вся.

Теперь рассмотрим третью ситуацию. Температура поднялась до $T_2 = 70°\mathrm{C} = 343$ К. Допустим, при этой температуре испарилась не вся вода. Тогда давление $P_3 = 31$ кПа. Найдём длину пружины l_3.

$$k(l_3 - l_0) = Mg + P_3 S \quad \Rightarrow \quad l_3 = 1{,}27\ \text{м}.$$

Найдём количество испарившейся воды. По закону Менделеева-Клапейрона:

$$P_3 l_3 S = \frac{m_{\text{исп}(3)}}{\mu} R T_3 \quad \Rightarrow \quad m_{\text{исп}(3)} \approx 1{,}2 \cdot 10^{-3}\ \text{кг}.$$

Это больше массы воды внутри системы, предположение неверно.

Значит, вода испарилась вся, а пар не насыщенный.

$$\begin{cases} P_3 l_3 S = \frac{m}{\mu} R T_3 \text{ — по закону Менделеева-Клапейрона,} \\ P_3 S + Mg = (l_3 - l_0)k \text{ — по закону Гука.} \end{cases}$$

Решаем систему, получаем $l_3 = 1{,}08$ м.

Примечание. Если ошибка в ответе обусловлена неточным снятием данных с графика, баллы не снимаются.

Критерии:

- Найдена жёсткость пружины — 2 балла.
- Получен ответ для $T = 50$ °C — 2 балла.
- Проверено, что вода испарилась не вся — 2 балла.
- Получен ответ для $T = 70$ °C — 2 балла.
- Проверено, что вода испарилась вся — 2 балла.

3) Пружина жёсткостью 600 Н/м прикреплена к стене. К ней по гладкому полу со скоростью 2,3 м/с приближается тележка. У её левого края лежит грузик. На сколько сожмётся пружина, когда тележка в неё ударится?

Примечание. Масса тележки — 5 кг, масса грузика — 1 кг. Коэффициент трения между грузиком и тележкой $\mu = 0{,}5$. Длина пружины — 50 см, длина тележки — 40 см. Размер грузика много меньше размера тележки.

Ответ: 0,24 м.

Решение. Рассмотрим силы, действующие на тележку и грузик при сжатии пружины. На тележку действует сила упругости, направленная влево и сила трения со стороны грузика, направленная вправо. На грузик — только сила трения.

В начале движения силы трения покоя достаточно, чтобы обеспечить им одинаковое ускорение и сохранять неподвижность грузика относительно тележки. Найдём, при каком сжатии пружины грузик поедет вперёд относительно тележки. В этот момент у них одинаковое ускорение, а сила трения покоя равна силе трения скольжения.

Пусть M — масса тележки, m — масса грузика, k — коэффициент жёсткости, а x_1 — изменение длины пружины. Тогда сила трения и ускорение грузика равны:

$$F_{\text{тр}} = mg\mu \quad \Rightarrow \quad a_{\text{гр}} = \frac{F_{\text{тр}}}{m} = g\mu.$$

А сила, действующая на тележку, и ускорение тележки:

$$F_{\text{общ}} = kx_1 - F_{\text{тр}} = kx_1 - mg\mu \quad \Rightarrow \quad a_{\text{т}} = \frac{F_{\text{общ}}}{M} = \frac{kx_1 - mg\mu}{M}.$$

Приравняем ускорения грузика и тележки и найдём x_1:

$$\frac{mg\mu}{m} = \frac{kx_1 - mg\mu}{M} \quad \Rightarrow \quad kx_1 = (M+m)g\mu \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{(M+m)g\mu}{k} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0{,}05 \text{ м}.$$

При таком сжатии пружинки грузик начнёт двигаться относительно тележки. Найдём, какую скорость в этот момент имели тележка и грузик. Сила трения не совершала работы, поэтому изменение кинетической энергии тел равно потенциальной энергии сжатия пружины:

$$\frac{(M+m)V_0^2}{2} = \frac{kx_1^2}{2} + \frac{(M+m)v_1^2}{2} \quad \Rightarrow \quad v_1 = \sqrt{\frac{(M+m)V_0^2 - kx_1^2}{M+m}} \quad \Rightarrow \quad v_1 \approx 2{,}24 \ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Рассмотрим движение тележки от этого момента до её остановки под действием силы упругости. По закону сохранения энергии:

$$\frac{kx_1^2}{2} + \frac{Mv_1^2}{2} + A = \frac{kx_2^2}{2}, \tag{10.3.1}$$

где A — работа силы трения над тележкой. Предположим, что грузик не успел упасть с тележки до момента её остановки. Тогда работа силы трения:

$$A = mg\mu(x_2 - x_1). \tag{10.3.2}$$

Подставляя (10.3.2) в (10.3.1), получаем:

$$\frac{kx_1^2}{2} + \frac{Mv_1^2}{2} + mg\mu(x_2 - x_1) = \frac{kx_2^2}{2}.$$

Это уравнение является квадратным относительно x_2. Приводим его к стандартному виду, подставляем числа (в системе СИ) и решаем:

$$300x_2^2 - 5x_2 - 15{,}62 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 \approx 0{,}24 \text{ м}.$$

Осталось проверить, верно ли предположение, что грузик не упадёт с тележки прежде, чем та остановится. Ускорение тележки по модулю больше ускорения грузика, а значит, к моменту остановки тележки грузик ещё будет двигаться. Найдём, через какое время грузик перестанет двигаться относительно Земли, и какое расстояние он пройдёт к этому моменту. Грузик замедлялся с постоянным ускорением $a = -g\mu$:

$$t_{\text{ост}} = \frac{v_1}{g\mu} \quad \Rightarrow \quad L_{\text{ост}} = \frac{v_1^2}{2g\mu} \quad \Rightarrow \quad L_{\text{ост}} = 0{,}504 \text{ м}.$$

К моменту остановки тележки грузик переместился меньше, чем на 0,504 м. Чтобы свалиться с тележки, грузику необходимо пройти столько же, сколько прошла она, и ещё всю её длину. Тележка прошла $0{,}24 - 0{,}05 = 0{,}19$ м, её длина 0,4 м. Итого 0,59 м. Грузик заведомо прошёл меньше, то есть не свалился с тележки.

Критерии:

- Найдено расстояние, на котором грузик сдвинется относительно тележки — 2 балла.
- Найдены скорости тележки и грузика в момента начала скольжения грузика — 2 балла.
- Записан закон сохранения энергии для тележки во время второго этапа её движения — 2 балла.
- Найдено максимальное сжатие пружины — 2 балла.

- Проведена проверка того, что грузик не свалится с тележки раньше её остановки — 2 балла.

4) На далёкой холодной планете идут дожди из жидкого метана. В один из дождливых дней исследователи вынесли на поверхность сверхточные весы и поставили на них открытый сосуд. Через некоторое время, весы показывали значение 0,123240 Н. Сосуд быстро убрали под крышу, снова взвесили, весы показали 0,116100 Н. Вскоре дождь усилился. Сосуд с весами вновь вынесли наружу. Теперь результат оказался 0,13752 Н.
Всё это время под дождём стояло ведро. В начале в нём уровень метана нарастал со скоростью 1 мм/мин, а в конце — со скоростью 2 мм/мин. Во сколько раз изменилось количество капель в единице объёма воздуха, когда дождь усилился?
Примечание. Плотность жидкого метана — 420,0 кг/м^3, ускорение свободного падения — 1,350 м/с^2. Сосуд и ведро цилиндрические, площади их оснований равны 100 см^2 и 200 см^2 соответственно. Сила сопротивления воздуха пропорциональна скорости тела и площади его поверхности, капли шарообразные, падают с большой высоты.

Ответ: 32/81.

Решение. Сосуд действует на падающие капли, останавливая их движение. Согласно третьему закону Ньютона, капли так же действуют на сосуд. Из-за этого отличаются показания весов под дождём и под крышей. Запишем второй закон Ньютона в импульсной форме $F\Delta t = \Delta p$ и найдём импульс капель, передаваемый сосуды в единицу времени. *В сноске. Так как $F = ma$, $F\Delta t = ma\Delta t = m\Delta v = \Delta p$

Пусть R — радиус капли, v — её скорость (капли падают с большой высоты, поэтому около земли их скорость постоянна), n — количество капель в единице объёма воздуха, ρ — плотность жидкого метана, S_c — площадь дна сосуда. Объём капли $\frac{4}{3}\pi R^3$, её масса

$$m = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho. \tag{10.4.1}$$

Рассмотрим промежуток времени Δt. В сосуд на весах упали капли, находящиеся на высоте меньше $\Delta t \cdot v$ от сосуда.
Их количество:

$$\Delta t \cdot v \cdot S_с \cdot n,$$

общая масса:

$$\Delta t \cdot v \cdot n \cdot S_с \cdot m = \Delta t \cdot v \cdot n \cdot S_с \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 \rho, \tag{10.4.2}$$

а суммарный импульс:

$$\Delta t \cdot v \cdot n \cdot S_с \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \cdot v = \Delta t \cdot v^2 \cdot n \cdot S_с \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 \rho.$$

Переданный импульс равен силе, умноженной на время.

$$\Delta F \Delta t = \Delta t \cdot v \cdot n \cdot S_с \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \cdot v = \Delta t \cdot v^2 \cdot n \cdot S_с \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \quad \Rightarrow$$

$$\Delta F = v^2 \cdot n \cdot S_с \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 \rho,$$

где ΔF — разность показаний весов под крышей и под дождём.
Запишем это выражение для двух ситуаций: до усиления дождя и после.

$$\Delta F_1 = v_1^2 \cdot n_1 \cdot S_с \cdot \frac{4}{3}\pi R_1^3 \rho,$$

$$\Delta F_2 = v_2^2 \cdot n_2 \cdot S_с \cdot \frac{4}{3}\pi R_2^3 \rho.$$

Поделим нижнее на верхнее

$$\frac{\Delta F_2}{\Delta F_1} = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 \cdot \frac{n_2}{n_1} \cdot \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3.$$

$\Delta F_1 = 7{,}14 \cdot 10^{-3}$, $\Delta F_2 = 2{,}142 \cdot 10^{-2} \quad \Rightarrow \quad \Delta F_2/\Delta F_1 = 3$.

$$3 = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 \cdot \frac{n_2}{n_1} \cdot \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3. \tag{10.4.3}$$

Рассмотрим ведро. Пусть c — скорость поступления метана в ведро (в литрах в минуту) $S_в$ — площадь дна. Аналогично (10.4.2):

$$с \cdot \Delta t = \Delta t \cdot v \cdot n \cdot S_в \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 \quad \Rightarrow \quad c = v \cdot n \cdot S_в \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Запишем это выражение для двух ситуаций: до усиления дождя и после.

$$c_1 = v_1 \cdot n_1 \cdot S_в \cdot \frac{4}{3}\pi R_1^3.$$

$$c_2 = v_2 \cdot n_2 \cdot S_в \cdot \frac{4}{3}\pi R_2^3.$$

Поделим нижнее на верхнее

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{v_2}{v_1} \cdot \frac{n_2}{n_1} \cdot \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3.$$

Так как $c_2/c_1 = 2$,

$$2 = \frac{v_2}{v_1} \cdot \frac{n_2}{n_1} \cdot \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3. \tag{10.4.4}$$

По условию сила сопротивления воздуха пропорциональна скорости капли и площади её поверхности (она выражается формулой $4\pi R^2$)

$$m \cdot g = k \cdot v \cdot 4\pi R^2.$$

Подставляем массу капли (10.4.1):

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \rho \cdot g = k \cdot v \cdot 4\pi R^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3} \cdot R \cdot g = k \cdot v.$$

Снова запишем выражение для двух ситуаций:

$$\frac{1}{3} \cdot R_1 \cdot g = k \cdot v_1$$
$$\frac{1}{3} \cdot R_2 \cdot g = k \cdot v_2,$$

и опять поделим нижнее на верхнее

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{v_2}{v_1}. \tag{10.4.5}$$

Итак, у нас три соотношения: (10.4.3), (10.4.4) и (10.4.5). Выпишем их.

$$\begin{cases} 3 = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 \cdot \frac{n_2}{n_1} \cdot \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3 \\ 2 = \frac{v_2}{v_1} \cdot \frac{n_2}{n_1} \cdot \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3 \\ \frac{R_2}{R_1} = \frac{v_2}{v_1} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 3 = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^5 \cdot \left(\frac{n_2}{n_1}\right) \\ 2 = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^4 \cdot \frac{n_2}{n_1} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{n_2}{n_1} = \frac{32}{81}.$$

Критерии:

- Показана связь между импульсами капель и изменением показаний весов — 1 балл.
- Рассмотрен импульс, переданный каплей сосуду — 2 балла.
- Рассмотрено ведро — 3 балла.
- Рассмотрено сопротивление воздуха — 2 балла.
- Получен верный ответ — 2 балла.

5) На день рождения экспериментатору Глюку подарили цилиндрический сосуд с теплоизолирующими стенками, разделённый на две части свободно движущимся поршнем. Как только праздник закончился, Глюк побежал в лабораторию, где накачал в обе части сосуда некоторое (не одинаковое) количество гелия из воздушных шариков. Дождавшись, пока давление в обеих частях уравняется, Глюк медленно нагрел газ в правой половине до температуры T_1, а в левой — до T_2. Экспериментатор обнаружил, что поршень медленно движется со скоростью v. Через некоторое время газ в левой части нагрелся до температуры T_3, а в правой остыл до T_4. С какой скоростью в этот момент двигается поршень?

Примечание. Мощность теплопередачи через поршень невелика и пропорциональная разности температур; цилиндр теплоизолирован идеально.

Ответ: $u_{\text{к}} = u_{\text{н}} \frac{T_4 - T_3}{T_2 - T_1}$.

Решение. Так как поршень двигается свободно, и скорость процесса невелика, в любой момент времени давление в левой части сосуда равно давлению в правой:

$$P_1 = P_2.$$

По закону Менделеева-Клапейрона:

$$\frac{\nu_1 R T_1}{V_1} = \frac{\nu_2 R T_2}{V_2}.$$

Газ в обеих частях сосуда одноатомный. Домножим обе части на 3/2:

$$\frac{\frac{3}{2}\nu_1 R T_1}{V_1} = \frac{\frac{3}{2}\nu_2 R T_2}{V_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{U_1}{V_1} = \frac{U_2}{V_2}, \tag{10.5.1}$$

где U_1 и U_2 — внутренняя энергия газа в соответствующей части сосуда.

Пусть U — суммарная внутренняя энергия, V — суммарный объём, $U_1 = aU$, $V_1 = bV$. Тогда $U_2 = (1-a)U$, $V_2 = (1-b)V$. Подставим эти значения в уравнение (10.5.1):

$$\frac{aU}{bV} = \frac{(a-1)U}{(b-1)V} \quad \Rightarrow \quad a = b.$$

Внутренняя энергия газа в левой части сосуда:

$$U_1 = \frac{3}{2} P_1 V_1 \quad \Rightarrow \quad P_1 = \frac{2}{3}\frac{U_1}{V_1} = \frac{2}{3}\frac{aU}{aV} = \frac{2}{3}\frac{U}{V}.$$

Внешние стенки сосуда жёсткие и теплоизолированные, поэтому суммарные объём и внутренняя энергия не меняются. Следовательно, P_1 — постоянная величина.
В ходе передачи тепла через поршень меняется объём, а давление остаётся тем же. Рассмотрим изменение состояния левой части сосуда за малый промежуток времени Δt. По первому началу термодинамики:

$$\Delta Q_1 = \Delta U_1 + A \quad \Rightarrow \quad \Delta Q_1 = \frac{3}{2}\nu R \Delta T_1 + A$$

Давление постоянно, следовательно, работа равна произведению давления и изменения объёма:

$$\Delta Q_1 = \frac{3}{2}\nu R \Delta T_1 + P\Delta V_1. \tag{10.5.2}$$

По закону Менделеева-Клапейрона:

$$PV_1 = \nu R T_1 \quad \Rightarrow \quad P\Delta V_1 = \nu R \Delta T_1 \quad \Rightarrow \quad \Delta T_1 = \frac{P\Delta V_1}{\nu R}.$$

Подставим ΔT_1 в выражение (10.5.2):

$$\Delta Q_1 = \frac{3}{2}\nu R \frac{P\Delta V_1}{\nu R} + P\Delta V \quad \Rightarrow \quad \Delta Q_1 = \frac{5}{2}P\Delta V_1.$$

Деля на время Δt, получаем:

$$\frac{\Delta Q_1}{\Delta t} = \frac{\frac{5}{2}P\Delta V_1}{\Delta t}.$$

Изменение объёма пропорционально скорости поршня u, а $\frac{\Delta Q_1}{\Delta t} = N$ — мощность теплопередачи через поршень. Значит,

$$N \sim u.$$

Мощность теплопередачи пропорциональна разнице температур в правой и левой части сосуда. Итак, отношение конечной скорости к начальной:

$$\frac{u_\text{к}}{u_\text{н}} = \frac{T_4 - T_3}{T_2 - T_1} \quad \Rightarrow \quad u_\text{к} = u_\text{н}\frac{T_4 - T_3}{T_2 - T_1}$$

Критерии:

- Сформулирована идея о равенстве давлений между двумя частями сосуда в каждый момент времени — 1 балл.
- Записан закон Менделеева-Клапейрона — 1 балл.
- Сформулирована и доказана идея постоянства давления в системе — 3 балла.
- Доказана пропорциональность скорости движения поршня скорости изменения температуры — 2 балла.
- Доказана пропорциональность скорости движения поршня мощности теплопередачи через поршень — 2 балла.
- Получен верный ответ — 1 балл.

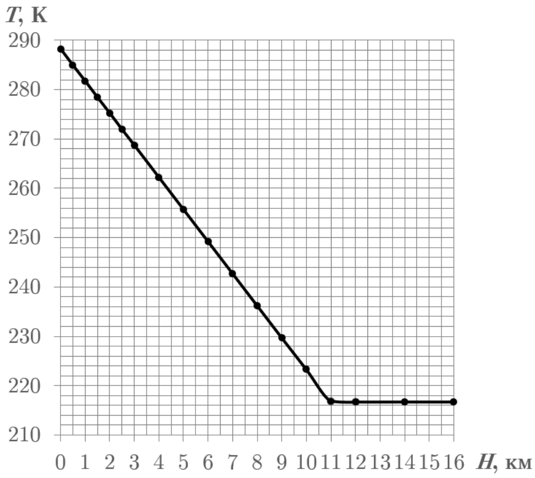
Физическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2019–2020 учебный год. Заключительный этап

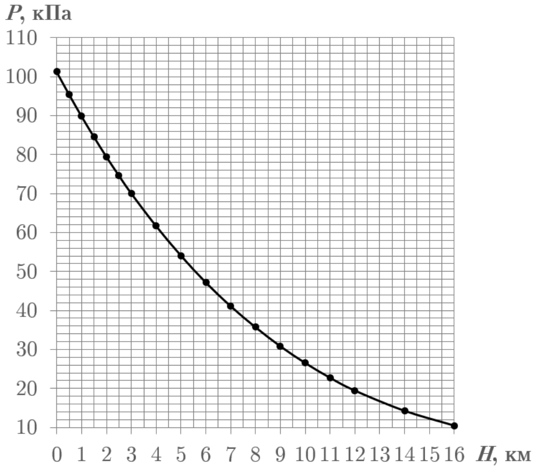
Решение задач для 11 класса

1) Вдохновившись романом Жюля Верна «Таинственный остров», Пашка Гераскин соорудил небольшой воздушный шар. Для нагревания воздуха в шаре он использовал горелку из школьной лаборатории. В качестве пробного полёта Пашка запустил шар около самой земли и обнаружил, что для этого хватает трети максимальной мощности горелки. При этом температура воздуха в шаре оказалась на 40°C выше температуры окружающего воздуха.

Попросив на метеостанции данные о зависимости давления и температуры от высоты (см. графики справа), он решил рассчитать, на какую же максимальную высоту сможет подняться шар. Помогите ему это сделать.

Примечание. Теплопотери пропорциональны разности температур воздуха внутри и снаружи шара, нагреванием шара Солнцем можно пренебречь.





Ответ: 10 км.

Решение. Сила тяжести равна подъёмной силе шара:

$$Mg + \rho_1 Vg = \rho_0 Vg,$$

где M — общая масса шара (оболочки, горелки, креплений и т.д), V — объём шара, ρ_1 и ρ_0 — плотность воздуха внутри шара и снаружи.

Плотность газа выражается формулой $\rho = P\mu/RT$*:

$$Mg + \frac{P\mu}{RT_1}Vg = \frac{P\mu}{RT_0}Vg, \quad \Rightarrow \quad \frac{MR}{V\mu} + \frac{P}{T_1} = \frac{P}{T_0}.$$

$MR/V\mu$ — константа, не зависящая от давления и температуры. Обозначим её k:

$$k + \frac{P}{T_1} = \frac{P}{T_0} \quad \Rightarrow \quad k = P\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_1}\right).$$

Около земли $P = 101$ кПа, $T_0 = 288$ К, $T_1 = T_0 + 40\ K = 328$ К. Отсюда $k = 42{,}8$ Па/К.

Горелка может выдавать в три раза большую мощность. Значит, разница температур снаружи и внутри шара может достигать $\Delta T = 120$ К.

На некоторой высоте h получаем:

$$k = P\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_0 + \Delta T}\right) \quad \Rightarrow \quad T_0(T_0 + \Delta T)\frac{k}{\Delta T} = P.$$

Левая часть выражения зависит только от температуры. Пусть $F(h) = T_0(T_0 + \Delta T)k/\Delta T$. Теперь надо найти высоту h_1, для которой $F(h_1) = P(h_1)$. После 11 км температура почти не меняется, то есть на этой высоте $F > P$, поэтому $h_1 < 11$ км.

Воспользуемся методом последовательных приближений. Функции F и P монотонно убывают, притом F быстрее, чем P:

h (км)	P (кПа)	F (кПа)	Вывод
6	47	33	$P > F \Rightarrow h_1 \in (6; 11)$
8	36	30	$P > F \Rightarrow h_1 \in (8; 11)$
10	27	27	$F = P \Rightarrow h = 10$ км

Примечание. Другой способ найти h — на одном листе построить графики $P(h)$ и $F(h)$ и найти их пересечение (не обязательно считать много точек для графика $F(h)$, для достаточно точной оценки хватит трёх-пяти).

Критерии:

- Записано выражение для подъёмной силы и зависимость плотности газа от температуры и давления — 2 балла.
- Найдено k — 2 балла.
- Указано ΔT при максимальной мощности горелки, написано выражение, связывающее P и T_0 — 3 балла.
- Получен верный ответ — 3 балла.

*Получается из уравнения Менделеева-Клапейрона: $PV = (m/\mu) \cdot RT$.

2) На профиле «Экспериментальная физика» в лагере «Формула Единства» ребята собрали простенькую тепловую машину: взяли металлическую трубу, один конец закупорили, а в другой вставили поршень. Цикл тепловой машины состоит из следующих этапов:

1. Цилиндр подносят к нагревателю, а поршень фиксируют на месте.

2. К поршню прикладывают силу F. Газ нагревается и расширяется, пока его температура не сравнится с температурой нагревателя.

3. Убрав нагреватель, снова фиксируют объём и ждут, пока давление внутри не станет равным атмосферному.

4. Отпускают поршень, давая газу охладиться до температуры окружающего воздуха.

А) Может ли КПД такой машины быть больше 60%?

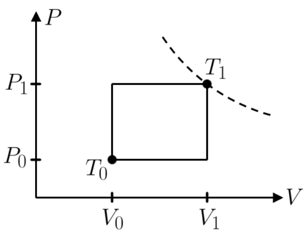
Б) Оцените (с точностью до 5%), при какой силе F КПД будет максимальным.

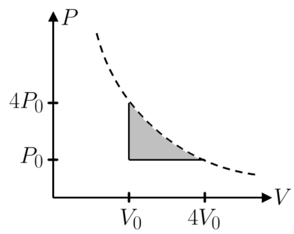
В) Чему равен этот КПД?

Примечание. Площадь поршня — 0,1 м^2. Температура воздуха — 300 К, температура нагревателя — 1200 К. Воздух считайте идеальным двухатомным газом.

Ответ: **А)** не может; **Б)** $F = 9$ кН; **В)** $\eta \approx 10{,}6\%$.

Решение. Цикл тепловой машины состоит из двух изобар и двух изохор. Пусть V_0 — начальный объём; P_0 — атмосферное давление; $T_0 = 300$ К, $T_1 = 1200$ К — начальная и конечная температуры.





Запишем уравнения Менделеева-Клапейрона:

$$P_0V_0 = \nu RT_0, \quad P_1V_1 = \nu RT_1.$$

Отсюда $4P_0V_0 = P_1V_1$.

КПД тепловой машины выражается формулой

$$\eta = \frac{A_{\text{полезная}}}{A_{\text{полная}} + \Delta U}. \tag{11.2.1}$$

Полезная работа равна площади, ограниченной графиком цикла. Изменение внутренней энергии:

$$\Delta U = \frac{5}{2}\nu R\Delta T = \frac{5}{2}(P_1V_1 - P_0V_0) = \frac{5}{2}(4P_0V_0 - P_0V_0) = 7{,}5P_0V_0. \tag{11.2.2}$$

Узнаем, может ли КПД этой машины быть больше 60%. Пренебрежём полной работой в знаменателе:

$$\frac{A_{\text{полезная}}}{\Delta U} > 0{,}6 \quad \Rightarrow \quad A_{\text{полезная}} > 0{,}6\Delta U.$$

Тогда (см. (11.2.2)):

$$A_{\text{полезная}} > 0{,}6 \cdot 7{,}5P_0V_0 = 4{,}5P_0V_0.$$

Найдём площадь под изотермой — она заведомо больше работы в цикле (какой бы цикл мы не взяли, ограниченная графиком площадь будет частью заштрихованного участка). Максимально возможный объём $4V_0$, максимально возможное давление $4P_0$. Тогда площадь заштрихованного участка меньше площади треугольника со сторонами $3P_0$ и $3V_0$, равной $3P_0 \cdot 3V_0/2 = 4{,}5P_0V_0$*. Таким образом, работа в цикле заведомо меньше $4{,}5P_0V_0$, следовательно, КПД меньше 60%.

Для нахождения максимального КПД воспользуемся формулой (11.2.1). При этом:

$$A_{\text{полезная}} = (V_1 - V_0)(P_1 - P_0),$$
$$A_{\text{полная}} = (V_1 - V_0)P_1,$$
$$\Delta U = 7{,}5P_0V_0.$$

Подставив, получаем:

$$\eta = \frac{(V_1 - V_0)(P_1 - P_0)}{(V_1 - V_0)P_1 + 7{,}5P_0V_0}.$$

Найдём максимально возможную полезную работу. Пусть $V_1 = xV_0$, $P_1 = yP_0$. Так как $4P_0V_0 = P_1V_1$, то $xy = 4$. Тогда полезная работа:

$$A = (V_1 - V_0)(P_1 - P_0) = (xV_0 - V_0)(yP_0 - P_0) \quad \Rightarrow \quad \frac{A}{V_0P_0} = (x-1)(y-1) = (x-1)\left(\frac{4}{x} - 1\right) = 5 - x - \frac{4}{x}.$$

Для нахождения максимума этого выражения возьмём производную и приравняем её нулю†:

$$\left(5 - x - \frac{4}{x}\right)' = -1 + \frac{4}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2, \quad y = 2.$$

При таких x и y КПД равен:

$$\eta = \frac{(x-1)(y-1)}{(x-1)y + 7{,}5} = \frac{1}{9{,}5} \approx 10{,}5\%,$$

---

*Есть множество других способов доказать, что площадь меньше $0{,}6\Delta U$.

†Можно было обойтись и без производной — среднее арифметическое двух чисел всегда больше или равно среднему геометрическому:

$$\frac{1}{2}\left(x + \frac{4}{x}\right) \geqslant \sqrt{\frac{4}{x} \cdot x} \quad \Rightarrow \quad x + \frac{4}{x} \geqslant 4.$$

$x + 4/x$ должно быть как можно меньше, это достигается при $x = 2$.

однако максимальное значение работы не гарантирует максимальность КПД. Так, КПД может быть больше при уменьшении x (ΔU не изменится, а $A_{\text{полезная}}$ и $A_{\text{полная}}$ уменьшатся):

x	y	η	
1,7	$\approx 2{,}35$	$\approx 10{,}3\%$	КПД меньше, чем при $x = 2 \Rightarrow x \in (1{,}7; 2)$
1,8	$\approx 2{,}22$	$\approx 10{,}5\%$	КПД такой же
1,9	$\approx 2{,}11$	$\approx 10{,}6\%$	КПД оказался больше, а бóльшая точность не требовалась

Осталось рассчитать силу, действующую на поршень на верхнем изобарическом участке. Она равна произведению площади и разности давлений изнутри и снаружи цилиндра:

$$F = S(P_1 - P_0) = SP_0(y-1) = 0{,}1 \cdot 10^5 \cdot (1{,}9 - 1) = 9 \cdot 10^3 \text{ Н}.$$

Другое решение. Максимальный КПД можно было найти и напрямую. Для этого выразим КПД через x и y и продифференцируем:

$$\eta = \frac{(x-1)(y-1)}{(x-1)y + 7{,}5} = \frac{xy - x - y + 1}{xy - y + 7{,}5} = \frac{5 - \frac{4}{y} - y}{11{,}5 - y} \quad \Rightarrow$$

$$\eta' = \frac{\left(5 - \frac{4}{y} - y\right)' \cdot (11{,}5 - y) - \left(5 - \frac{4}{y} - y\right) \cdot (11{,}5 - y)'}{(11{,}5 - y)^2} = \frac{\left(\frac{4}{y^2} - 1\right) \cdot (11{,}5 - y) - \left(5 - \frac{4}{y} - y\right) \cdot (-1)}{(11{,}5 - y)^2}.$$

Точка экстремума достигается при $\eta' = 0$:

$$\left(\frac{4}{y^2} - 1\right) \cdot (11{,}5 - y) + 5 - \frac{4}{y} - y = 0$$

$$(4 - y^2) \cdot (11{,}5 - y) + 5y^2 - 4y - y^3 = 0$$

$$46 - 8y - 6{,}5y^2 = 0.$$

Отсюда $y \approx 2{,}12$, тогда $x = 4/y \approx 1{,}89 \approx 1{,}9$, а КПД равен

$$\eta = \frac{5 - x - y}{11{,}5 - y} \approx 10{,}6\%.$$

Критерии:

- Записано выражение для КПД — 1 балл.
- Показано, что он не может быть больше 60% — 2 балла.
- Найден максимальный КПД — 5 баллов.
- Найдена сила — 1 балл.

3) Одной тихой сентябрьской ночью юноша шёл на свидание через поле. Стоял густой туман. Проходя мимо станции, он заметил, что её огни видны со 150 метров, хотя в ясную ночь он мог их разглядеть с 1200 метров. С какого расстояния девушка увидит фонарь юноши в тумане, если в ясную ночь его видно со 100 метров?

Ответ: 50 м.

Решение. Рассмотрим, как распространяется свет в прозрачном пространстве. Пусть мощность источника света — L. Если источник светит во все стороны равномерно, на каждую единицу площади на расстоянии R от источника будет приходиться энергия:

$$E = \frac{L}{4\pi R^2}, \tag{11.3.1}$$

т.к. энергия никуда не исчезает и равномерно распределяется по всей поверхности сферы радиуса R.
Именно эту величину мы наблюдаем, как видимую «яркость» объекта. Заметим, что если в одном из направлений на пути света встретится препятствие (например, поверхность земли), то это никак не повлияет на его распространение в других направлениях, а значит, и на изменение яркости. Как видно из формулы (11.3.1), яркость обратно пропорциональна квадрату расстояния до источника света.
На расстоянии 1200 метров в прозрачном воздухе огни станции выглядят в

$$\left(\frac{1200}{150}\right)^2 = 8^2 = 64 \text{ раза}$$

тусклее, чем на расстоянии 150 метров. В тумане станция выглядит со 150 метров такой же, как обычно с 1200 метров (а именно, яркость определяет предел восприятия зрения юноши), значит, 150-метровый слой тумана ослабевает свет в 64 раза.
Рассмотрим, как распространяется свет в тумане. Пусть пройдя слой в n метров, он станет тусклее в m раз. Очевидно, что пройдя через следующий такой же слой, он станет тусклее ещё в m раз (а в итоге в m^2), то есть фиксированный слой тумана поглощает фиксированную долю света. Заметим, что $64 = 2^6$. Так как, проходя 150 метров, свет ослабевает в 64 раза, то в 2 раза он будет ослабевать, проходя через слой в $150/6 = 25$ метров. Отсюда можно вывести зависимость видимой яркости объекта от расстояния до него:

$$E = \frac{L}{4\pi R^2} \cdot 2^{-R/25}, \tag{11.3.2}$$

где R выражено в метрах.
Фонарь юноши девушка обычно видит со 100 метров. Подставив $R = 100$ м в формулу (11.3.1) (для ясной ночи), приравняем выражения (11.3.1) и (11.3.2) и найдём, на каком расстоянии фонарь даст ту же яркость

в тумане:
$$\frac{L}{4\pi 100^2} = \frac{L}{4\pi r^2}\cdot 2^{-r/25} \quad\Rightarrow\quad 100^2 = r^2 2^{r/25} \quad\Rightarrow\quad \frac{100^2}{r^2} = 2^{r/25}.$$
Отсюда ответ легко угадывается*: $r = 50$ м.

Критерии:

- Сформулировано правило ослабления яркости при распространении света в прозрачном пространстве — 3 балла.
- Сформулировано правило ослабления яркости при распространении света в тумане — 3 балла.
- Найдена расстояние, на котором туман ослабляет свет вдвое — 2 балла.
- Найден конечный ответ — 2 балла.

4) На боевых учениях два морских пехотинца сидят на плоту из пробкового дерева. Один из них стреляет с кормы из автомата, делая по 2 выстрела в секунду. У плота устанавливается средняя скорость 0,6 м/с. С берега на плот прыгает их товарищ. Он прыгает, когда до плота остаётся 1,12 м, прыжок занимает 0,2 с. Скорость плота становится равной 0,8 м/с. После этого стрельба прекращается. Какое расстояние пройдёт плот, прежде чем остановится?

Примечание. Масса третьего пехотинца — 80 кг, масса пули — 5 г, скорость пули — 600 м/с. Сила сопротивления воды пропорциональна скорости лодки.

Ответ: 19,2 м.

Решение. Каждая выпущенная пуля добавляет к импульсу плота $m_{\text{пуля}}v_{\text{пуля}}$. Скорость плота неизменна, следовательно, сила сопротивления воды уменьшает импульс на эту же величину за время между выстрелами†:
$$F_{\text{сопр}}t = m_{\text{пуля}}v_{\text{пуля}} \quad\Rightarrow\quad F_{\text{сопр}} = \frac{m_{\text{пуля}}v_{\text{пуля}}}{t} = 6 \text{ Н}.$$
Сила сопротивления пропорциональна скорости движения. Пусть k_1 — коэффициент пропорциональности:
$$F_{\text{сопр}} = k_1 v_{\text{плот}} \quad\Rightarrow\quad k_1 = \frac{F_{\text{сопр}}}{v_{\text{плот}}} = 10\ \frac{\text{кг}}{\text{с}}.$$
Прыгнувший пехотинец преодолел 1,12 м за 0,2 с. Плот за эти 0,2 с прошёл $0{,}6\cdot 0{,}2 = 0{,}12$ м. Следовательно, скорость пехотинца (точнее, горизонтальная её составляющая) равна $(1{,}12 - 0{,}12)/0{,}2 = 5$ м/с.
После прыжка плот приобрёл скорость 0,8 м/с. Это больше его начальной скорости, значит, направление движения изменилось на противоположное. Запишем закон сохранения импульса для плота и пехотинца. Пусть $m_{\text{плот}}$ — масса плота и всего, что на нём находится, $v_{\text{общ}}$ — скорость плота (с третьим пехотинцем) после прыжка.
$$m_{\text{пех}}v_{\text{пех}} - m_{\text{плот}}v_{\text{плот}} = (m_{\text{пех}} + m_{\text{плот}})v_{\text{общ}} \quad\Rightarrow \tag{11.4.1}$$
$$\Rightarrow\quad m_{\text{плот}} = \frac{m_{\text{пех}}(v_{\text{пех}} - v_{\text{общ}})}{v_{\text{общ}} + v_{\text{плот}}} = 240 \text{ кг}. \tag{11.4.2}$$
Новая масса плота $M = m_{\text{плот}} + m_{\text{пех}} = 320$ кг, что в 4/3 раза больше начальной. Во столько же раз увеличилась глубина погружения плота, поэтому и коэффициент пропорциональности между силой сопротивления и скоростью движения увеличился в 4/3 раза: $k_2 = 40/3$ кг/с, и $F'_{\text{сопр}} = k_2 v$. По второму закону Ньютона
$$aM = k_2 v \quad\Rightarrow\quad a = \frac{vk_2}{M}.$$
Умножим обе части выражения на небольшой промежуток времени Δt:
$$a\Delta t = (v\Delta t)k_2/M.$$
Заметим, что $a\Delta t = \Delta v$ — изменение скорости за этот промежуток, а $v\Delta t = \Delta S$ — пройденное расстояние:
$$\Delta v = \frac{k_2}{M}\Delta S.$$
Это верно для каждого небольшого промежутка, значит, верно и для всего пути:
$$v_{\text{общ}} = \frac{k_2}{M}S \quad\Rightarrow\quad S = \frac{v_{\text{общ}}M}{k_2} = 0{,}8\cdot\frac{320}{\frac{40}{3}} = 19{,}2 \text{ м}.$$

Примечание. Некоторые участники решили, что плот плывёт от берега, а не к нему (стрельба, соответственно, ведётся в сторону третьего пехотинца). В таком случае в выражении (11.4.1) скорость плота берётся с противоположным знаком, и получается другое значение его массы. Жюри решило не считать это ошибкой, поэтому баллы за это не снижались.

Критерии:

- Найдена масса плота — 3 балла.
- Найдено изменение глубины погружения плота — 2 балла.
- Записано уравнение движения плота после приземления третьего пехотинца — 3 балла.
- Получен верный ответ — 2 балла.

---

*Можно аккуратно доказать, что этот ответ единственный. Действительно, левая часть этого уравнения есть монотонно убывающая гипербола, а правая часть — монотонно возрастающая показательная функция, поэтому они могут иметь не более 1 общей точки.

†Мы пренебрегаем изменением скорости между выстрелами, потому что время между ними мало. Так, сила сопротивления воды равна 6 Н, а масса плота — 240 кг, следовательно, ускорение плота равно $F_{\text{сопр}}/m_{\text{плот}} = 0{,}025$ м/с^2, то есть за 0,5 с между выстрелами скорость менялась всего на 0,01 м/с.

5) Между двумя горизонтальными диэлектрическими пластинами помещён газ, состоящий из смеси нейтральных атомов и положительно заряженных ионов. Катионы равномерно распределены между пластинами, плотность заряда ρ. Сквозь газ горизонтально летит шарик зарядом q и массой m с постоянной скоростью v.

А) Определите расстояние между шариком и нижней пластиной.

В результате отклонения шарик приобрёл маленькую вертикальную скорость и стал описывать волнообразную траекторию.

Б) Определите длину этой волны.

Примечание. Расстояние между пластинами — d, ускорение свободного падения — g, силой трения пренебрегите.

Ответ:

А) Расстояние между шариком и нижней пластиной

$$H = \frac{mg\varepsilon_0}{q\rho} + \frac{d}{2} \text{ при } |q| > \frac{2mg\varepsilon_0}{d\rho}$$

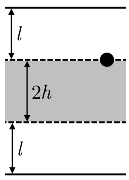
(иначе равновесия не существует).

Б) Длина волны

$$\lambda = 2\pi v\sqrt{\frac{m\varepsilon_0}{q\rho}} \text{ при } q < -\frac{2mg\varepsilon_0}{d\rho}$$

(иначе равновесие не устойчивое, и волнообразного движения быть не может).

Решение. Найдем, как зависит величина напряжённости поля от расстояния h до центральной плоскости системы. На самой центральной плоскости напряжённость равна 0, так как поле, создаваемое зарядами верхней половины полностью компенсируется действием зарядов нижней половины.



Пусть частица находится на h выше центральной плоскости. Сверху слой газа толщиной $d/2-h$, снизу — $d/2+h$ (см. рис.). Силы, создаваемые слоями толщиной $d/2-h$, друг друга компенсируют. И ещё снизу остаётся слой некомпенсированных зарядов толщиной $2h$. Эти заряды действуют эквивалентно бесконечной заряженной плоскости с поверхностью плотностью $\sigma = 2h\rho$.

Напряжённость поля:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\rho h}{\varepsilon_0}.$$

Шарик летит горизонтально с постоянной скоростью, значит, сила тяжести равна электростатической силе. Найдём расстояние h от шарика до центральной плоскости системы:

$$mg = qE \quad \Rightarrow \quad mg = \frac{q\rho h}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{mg\varepsilon_0}{q\rho}.$$

В задаче требуется найти расстояние не до центральной плоскости, а до нижней пластины, поэтому необходимо прибавить $d/2$:

$$H = \frac{mg\varepsilon_0}{q\rho} + \frac{d}{2}.$$

Заметим, если h больше полуширины заряженного слоя, равновесие невозможно:

$$\left|\frac{mg\varepsilon_0}{q\rho}\right| < \frac{d}{2} \quad \Rightarrow \quad |q| > \frac{2mg\varepsilon_0}{\rho d}.$$

Теперь рассмотрим волнообразное движение частицы.

Случай 1. Заряд частицы положительный.

Положение равновесия находится выше центральной плоскости системы. Если частица отклонится вверх, электростатическая сила увеличится. Равнодействующая сил будет направлена вверх, и частица отклонится ещё сильнее. Следовательно, равновесие неустойчиво, и волнообразное движение невозможно.

Случай 2. Заряд частицы отрицательный.

Частица находится ниже центральной плоскости. Смещение вверх уменьшает электростатическую силу, а смещение вниз — увеличивает. Равновесие устойчиво. Скорость по горизонтали остаётся постоянной, поэтому длина волны $\lambda = v \cdot T$, где T — период колебаний по вертикали.

Возвращающая сила пропорциональна отклонению по оси y, то есть это классический случай гармонических колебаний:

$$F = \frac{q\rho}{\varepsilon_0}y \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m\varepsilon_0}{q\rho}} \quad \Rightarrow \quad \lambda = 2\pi v\sqrt{\frac{m\varepsilon_0}{q\rho}}.$$

Критерии:

- Определена зависимость напряжённости поля от вертикальной координаты $E(h)$ — 3 балла.
- Определено положение равновесия — 1 балл.
- Сказано, что равновесие устойчиво только при отрицательном заряде частицы — 2 балла.
- Найден период колебаний — 2 балла.
- Найдена длина волны — 1 балл.
- Дан полный ответ — 1 балл.