Международный благотворительный фонд
поддержки математики имени Леонарда Эйлера

ЗАПИСКИ «ФОРМУЛЫ ЕДИНСТВА»

ВЫПУСК 4

ТУРНИР ТРЕТЬЕГО ТЫСЯЧЕЛЕТИЯ

2019 ГОД

ОЗНАКОМИТЕЛЬНАЯ ВЕРСИЯ

Издательство ВВМ
2020

Данный файл является ознакомительной версией 4 выпуска «Записок «Формулы Единства», содержащей только рассказ о первом Турнире Третьего Тысячелетия (ТТТ), правила матбоёв и условия задач.

Полную версию данной книги, включающую также подробные решения, вы можете заказать у организаторов ***по ссылке****.*

О первом ТТТ

Турнир проводился по довольно стандартной и распространённой схеме. А именно, в первый день была проведена командная олимпиада, по итогам которой было решено сформировать две лиги по 8 команд 6–7 классов и одну лигу из 10 команд 8–9 классов. В дальнейшем каждая из команд приняла участие в четырёх турах матбоёв с другими командами своей лиги, по одному бою в день. Первые три тура являются *групповым этапом*, а на последнем, четвёртом, происходят *стыковые бои* для определения победителей и призёров.

В каждом туре участники сначала в течение 4 часов решали задачи, а ближе к вечеру проводился сам бой — представители команд поочерёдно выступали с полученными решениями, защищая их перед оппонентом (представителем другой команды) и членами жюри (см. «Правила математических боёв» на стр. 6).

В параллели 6–7 классов для проведения группового этапа каждая лига дополнительно делилась на две корзины по 4 команды в каждой (тем самым за три тура внутри корзины все команды играли друг с другом), а стыковые бои проводились между командами разных корзин, занявших в них одинаковые места.

Поскольку многие задачи использовались в условиях матбоёв обеих лиг, в сборнике используется специальное обозначение: $\boxed{\text{II} \quad \text{I}}$ Серая цифра означает, что в этой лиге задача *не использовалась*.

Финальный тур существенно отличался от предыдущих. Так, в первой лиге параллели 6–7 классов потребовалось провести так называемый «блиц-бой», поскольку команды «610 к.г.» и «Новгородцы» имели не только равное количество очков, но и ничью в личной встрече! Помимо этого, для команд, занявших первые места в корзинах первой лиги параллели 6–7 классов, было решено провести «гранд финал» — математический бой по несколько отличающемуся набору задач. Эти задачи обозначены символом **ГФ**.

В параллели 8–9 классов, как уже упоминалось, было 10 команд, которые все играли в одной лиге, поэтому групповой этап проводился по швейцарской системе, а стыковые бои проводились между командами, набравшими одинаковое количество очков.

В последний день турнира для его участников была проведена личная олимпиада. Она была устной и проводилась по традиционным правилам Ленинградской/Санкт-Петербургской математической олимпиады. Каждый участник получил 4 задачи (*довыводные задачи*) и 3 часа времени на их решение. Как только он решал одну из задач, он мог рассказать решение кому-либо из членов жюри. Если в результате обсуждения с членом жюри задача не была засчитана, можно было вернуться к её решению, использовав вторую и третью попытку, либо переключиться на решение других задач. Участник, которому были засчитаны 3 задачи, получал ещё 3 задачи (*вывод*) в дополнение к оставшейся нерешённой, а также дополнительный час на их решение.

Участники

№	Команда	Место
	Параллель 6–7 классов, первая лига	
1	АСГУ–30 (г. Санкт-Петербург)	I
2	610 к.г. (г. Санкт-Петербург)	V
3	Новгородцы (г. Великий Новгород)	IV
4	Сборная команда ФЕ–2	VIII
5	Фрактал–1 (г. Санкт-Петербург)	II
6	Курган ЦДМО–6–7 (г. Курган)	III

7	Фрактал–2 (г. Санкт-Петербург)	VII
8	ВМЛэнд (г. Вологда)	VI
	Параллель 6–7 классов, вторая лига	
9	Сборная команда ФЕ–1	II
10	Парус (г. Тюмень)	III
11	Альфа88 (г. Тюмень)	VII
12	УНИКУМ (Пермский край, г. Губаха)	V
13	Тверь–6 (г. Тверь)	I
14	Лапласы (г. Волгоград)	IV
15	Грифоны (Пермский край, г. Губаха)	VI
16	Математики (Вологодская обл., г. Череповец)	VIII
	Параллель 8–9 классов	
17	Барнаул 9 (г. Барнаул)	II
18	Морские котики (Воронежская обл., с. Семилуки)	III
19	Гагаринцы (г. Волгоград)	II
20	Тверь–8 (г. Тверь)	IV
21	Балтийские графы (г. Калининград)	I
22	Тайфун (г. Тюмень)	IV
23	Краснодар лицей 48 (1) (г. Краснодар)	V
24	Барнаул 8 (г. Барнаул)	IV
25	Краснодар лицей 48 (2) (г. Краснодар)	VI
26	Жарки (г. Абакан)	V

Результаты

Групповой этап

Результаты 1 тура написаны красным цветом, 2 — синим, 3 — зелёным. Столбцы **О** и **М** обозначают набранное количество очков и занятое место в группе, соответственно.

Параллель 6–7 классов, первая лига

Левая корзина						
	1	**2**	**3**	**4**	**О**	**М**
1	×	51:42	45:30	83:12	6	I
2	42:51	×	40:40	54:10	3	III
3	30:45	40:40	×	60:00	3	II
4	12:83	10:54	00:60	×	0	IV

Правая корзина						
	5	**6**	**7**	**8**	**О**	**М**
5	×	38:38	61:22	53:29	5	I
6	38:38	×	34:46	45:28	3	II
7	22:61	46:34	×	33:38	2	IV
8	29:53	28:45	38:33	×	2	III

Параллель 6–7 классов, вторая лига

Левая корзина							Правая корзина						
	9	**10**	**11**	**12**	**О**	**М**		**13**	**14**	**15**	**16**	**О**	**М**
9	×	41:15	30:00	35:11	6	I	**13**	×	53:25	73:03	74:00	6	I
10	15:41	×	30:26	36:21	4	II	**14**	25:53	×	52:16	28:14	4	II
11	00:30	26:30	×	09:42	0	IV	**15**	03:73	16:52	×	25:12	2	III
12	11:35	21:36	42:09	×	2	III	**16**	00:74	14:28	12:25	×	0	IV

Параллель 8–9 классов

	17	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**О**
17	×	39:45		55:12						60:00	4
18	45:39	×			27:28				51:24		5
19			×	54:15			37:06	23:35			4
20	12:55		15:54	×			50:22				2
21		28:27			×	60:00		47:06			5
22					00:60	×	29:12			24:01	4
23			06:37	22:50		12:29	×				0
24			35:23		06:47			×	60:00		4
25		24:51						00:60	×	06:24	0
26	00:60					01:24			24:06	×	2

Стыковые бои

Как уже объяснялось на странице 2, места группового этапа команд «610 к.г.» и «Новгородцы» (2 и 3) были определены с помощью блиц-боя. Для команд «Фрактал–2» и «ВМ-Лэнд» (7 и 8) блиц-бой не потребовался, так как в личной встрече команда «Фрактал–2» победила.

Параллель 6–7

Первая лига		
1	68:26	**5**
3	31:45	**6**
2	50:24	**8**
4	01:38	**7**

Вторая лига		
9	39:48	**13**
10	37:31	**14**
12	16:10	**15**
11	52:02	**16**

Параллель 8–9

17	26:36	**24**
18	49:00	**21**
19	50:00	**22**
20	28:00	**26**
23	39:03	**25**

Правила математических боёв

Общие положения

Математический бой (сокращённо *матбой*) — соревнование двух команд в решении математических задач. Сначала команды получают условия задач и определённое время на их решение. По истечении отведённого времени начинается собственно *бой*, когда команды по очереди рассказывают друг другу решения задач в соответствии с данными правилами.

Если одна из команд рассказывает решение, то другая выступает в качестве оппонента, то есть ищет в нём ошибки (недочёты). Выступления оппонента и докладчика оцениваются жюри в баллах. Если команды, обсудив предложенное решение, всё-таки не решили задачу до конца или не обнаружили допущенные ошибки, то часть баллов (или даже все) может забрать себе жюри боя. В следующем раунде (который проходит по другой задаче) команды обычно меняются ролями: команда, которая рассказывала решение, по следующей задаче оппонирует (исключение составляет случай некорректного вызова, см. ниже).

Победителем боя объявляется команда, которая в итоге наберёт большее количество баллов. Если по окончании боя результаты команд отличаются не более чем на *три* балла, то принято считать, что бой закончился вничью. Если по каким-то причинам бой не может закончиться вничью, то жюри объявляет это командам до боя и оглашает процедуру определения победителя.

Общая схема боя

Бой состоит из нескольких *раундов*. В начале каждого раунда (если не происходит отказа от вызова — см. пункт «Окончание боя» на стр. 13) одна из команд *вызывает* другую на одну из задач, решение которой ещё не рассказывалось (например: «Мы вызываем команду соперников на задачу номер 8»). После этого вызванная команда сообщает, *принимает ли она вызов*, то есть согласна ли она рассказывать решение этой задачи (на решение о принятии вызова отводится не более *одной* минуты). Если команда принимает вызов, то она выставляет *докладчик*а, который должен рассказать решение, а вызвавшая команда выставляет *оппонента*, обязанность которого — искать ошибки в представленном решении. Если вызов не принят, то команда, которая вызывала, обязана выставить докладчика, а команда, отклонившая вызов, выставляет оппонента. В этом случае говорят, что происходит *проверка корректности вызова.*

Процесс решения задач

В начале боя командам даётся несколько часов на решение задач. Рекомендуется следить за тем, чтобы каждую задачу кто-нибудь решал (обычно за этим следит капитан), и заранее распределить задачи между собой. Помните об ограничениях по количеству выходов на человека (не более двух, см. ниже).

Во время решения задач *нельзя* пользоваться литературой в печатной или электронной форме (можно пользоваться бумажными записями), интернетом, а также калькуляторами. Команда не может общаться с другими людьми (за исключением членов жюри) об условиях и решениях задач, количестве решённых задач, их сложности и т. д. Если становится известно о нарушении командой этих правил, ей может быть засчитано техническое поражение в бою.

Конкурс капитанов

Кто будет делать первый вызов, определяет команда, победившая в так называемом *конкурсе капитанов (КК).* Он проводится в начале боя. Капитанам предлагается задача. Капитан, первым сообщивший жюри о своём желании отвечать, получает такое право. Если он рассказывает правильное решение, то он победил, а если неправильное — победил его соперник. При этом что понимается под «правильным решением»: просто верный ответ, ответ с объяснением и т. п. — жюри уточняет перед началом КК. Вместо задачи жюри может предложить капитанам сыграть в какую-либо игру. Возможны и другие схемы проведения КК.

Команда имеет право выставить на КК любого члена команды (не только капитана).

Ход раунда

Доклад. В начале раунда докладчик рассказывает решение у доски. Доклад должен содержать ответы на все поставленные в задаче вопросы и доказательство правильности и полноты полученных ответов. В частности, докладчик обязан доказать каждое сформулированное им промежуточное утверждение либо сослаться на него, как на общеизвестное. Докладчик должен стремиться к ясности изложения; по просьбе оппонента или жюри он обязан повторить любую часть своего доклада. Время на доклад ограничено 15 минутами, по истечении которых жюри имеет право попросить докладчика сообщить ответ и описать общую схему решения.

Докладчик может иметь при себе бумагу с чертежами и (с отдельного разрешения жюри) вычислениями, но не имеет права брать с собой текст решения.

Докладчик имеет право:

- до начала выступления вынести на доску всю необходимую ему информацию;
- не отвечать на вопросы оппонента, заданные до начала обсуждения;
- просить оппонента уточнить свой вопрос (в частности, докладчик может предложить свою версию вопроса: «Правильно ли я понимаю, что вы спросили о ...?»);

- отказаться отвечать на вопрос, сказав, что:
  1) он не имеет ответа на этот вопрос;
  2) он уже ответил на этот вопрос (объяснив, когда и как);
  3) вопрос некорректен или выходит за рамки научной дискуссии по поставленной задаче.

  В случае несогласия оппонента с основаниями 2) и 3) арбитром в споре выступает жюри.

Докладчик не обязан:

- излагать способ получения ответа, если он может доказать его правильность и полноту;
- сравнивать свой метод решения с другими возможными методами, в том числе с точки зрения краткости, красоты и пригодности для решения других задач.

Оппонирование. Пока доклад не окончен, оппонент может задавать вопросы только с согласия докладчика, но имеет право попросить повторить часть решения. Он может разрешить докладчику не доказывать какие-либо очевидные факты (со своей точки зрения). После окончания доклада оппонент имеет право задавать вопросы докладчику. Если в течение минуты оппонент не задал ни одного вопроса, то считается, что вопросов у него нет. Если докладчик не начинает отвечать на вопрос в течение минуты, то считается, что у него нет ответа.

В качестве вопроса оппонент может:

- потребовать повторить любую часть доклада;
- попросить уточнения любого из высказываний докладчика, в том числе:
  1) попросить дать определение любого термина («Что Вы понимаете под ...»);
  2) переформулировать утверждение докладчика своими словами и попросить подтверждения («Правильно ли я понимаю, что Вы утверждаете следующее: ...»);

- попросить доказать сформулированное докладчиком утверждение, если оно не является очевидным или общеизвестным (в спорных случаях вопрос об известности или очевидности решает жюри; во всяком случае, известными считаются факты, включённые в общеобразовательную программу по математике);
- после ответа на вопрос выразить удовлетворённость или мотивированную неудовлетворённость ответом.

Если оппонент считает, что докладчик тянет время, придумывая решение у доски, или что существенная часть доклада не является изложением решения обсуждаемой задачи, он имеет право (но не ранее, чем через 10 минут после начала доклада) попросить докладчика предъявить ответ или план дальнейших рассуждений.

Докладчик и оппонент обязаны:

- высказываться в вежливой и корректной форме, обращаясь к друг другу на «Вы»;
- критикуя высказывания друг друга, не «переходить на личности»;
- повторять и уточнять свои вопросы и ответы по просьбе друг друга или жюри.

По итогам доклада и ответов на вопросы *оппонент* должен дать свою оценку докладу и обсуждению в одной из следующих форм:

1) признать решение правильным;
2) признать решение в целом правильным, но имеющим недостатки и (или) пробелы с обязательным их указанием;
3) признать решение неправильным, указав ошибки в обоснованиях ключевых утверждений доклада, или приведя контрпример, или указав существенные пробелы в обоснованиях или плане решения.

Если оппонент согласился с решением, то он и его команда в этом раунде больше не участвуют.

Цель оппонента — опровергнуть решение докладчика, а не рассказать своё решение! Указав на ошибку, оппонент должен предоставить докладчику возможность её исправить (дав минуту на раздумье).

Если оппонент имеет контрпример, опровергающий решение докладчика в целом, и этот контрпример сам является решением задачи (такое бывает, например, в случаях, когда вопрос задачи звучит как «Можно ли …?», «Верно ли, что …?» и т. п.), то оппонент имеет право заявить: «Я с решением не согласен, у меня есть контрпример», но сам контрпример пока докладчику не предъявлять (жюри имеет право потребовать предъявления контрпримера в письменном виде, чтобы убедиться в корректности заявления оппонента). В этом случае, если докладчик не изменит своего решения в течение минуты или после взятого командой перерыва, оппонент получает право предъявить докладчику упомянутый контрпример, причём докладчик и его команда уже не имеют права изменять решение или ответ. Аналогично, если решение требует перебора случаев, оппонент имеет право заявить «Я с решением не согласен, рассмотрены не все случаи», не указывая докладчику, какой именно случай не рассмотрен.

Участие жюри в обсуждении. После окончания диалога докладчика и оппонента жюри задаёт свои вопросы. При необходимости оно имеет право вмешаться и ранее, во время их диалога.

Выступающие и команда. Докладчик и оппонент могут обращаться к своим капитанам с просьбой о замене или перерыве для консультации (но окончательное решение остаётся за капитаном). Другое общение между командой и докладчиком (оппонентом) допускается только во время полуминутного перерыва, который любая команда может взять в любой момент (при этом соперники также могут пользоваться этим временем). Каждая команда может взять в течение одного боя *не более шести полуминутных перерывов* (см. также пункт «Количество выходов к доске» на стр. 13).

Перемена ролей. Перемена ролей в раунде может произойти только в том случае, если вызов в этом раунде был принят. Если оппонент доказал, что у докладчика нет решения (так ли это, решает жюри, см. пункт «Начисление баллов» на стр. 14) то оппонент получает право (но не обязан) рассказать своё решение. Если оппонент взялся рассказывать своё решение, то происходит *полная перемена ролей*, то есть бывший докладчик становится оппонентом. Если же оппонент не доказал, что у докладчика нет решения, но выявил в предложенном решении некоторые конкретные недостатки, то он получает право (но не обязан) устранить все (или некоторые) из этих недостатков (*«залатать дыры»*). Такое же право оппонент получает, если он доказал, что у докладчика решения нет, но собственное решение рассказывать отказался. Если оппонент взялся «латать дыры», то происходит *частичная перемена ролей*: оппонент формулирует, что именно он собирается делать (например: разбирать случай, не разобранный докладчиком; доказывать утверждение, не доказанное докладчиком; и т. п.), а бывший докладчик ему оппонирует.

Обратной перемены ролей не происходит в любом случае!

Корректность вызова. Если вызов *принят*, то вопрос о его корректности не ставится, то есть, *принятый вызов всегда считается корректным.*

Если вызов *не принят*, то возможны два случая:

1) вызывавшая команда также отказалась отвечать, и тогда, вызов «автоматически» признаётся *некорректным*;
2) вызывавшая команда выставила докладчика, тогда корректность вызова зависит от дальнейшего хода раунда, а именно, вызов признаётся *некорректным*, если оппоненту удаётся доказать, что задача не решена. В случае, *если*

оппонент признал задачу решённой, вызов «автоматически» *признаётся корректным.*

Количество выходов к доске

Каждый член команды имеет право выйти к доске в качестве представителя (докладчика или оппонента) не более двух раз за бой (выход на конкурс капитанов в это число не входит). Команда имеет право заменить докладчика или оппонента, причём в каждом таком случае выход засчитывается обоим членам команды.

При каждой замене время, отведённое команде на перерывы, уменьшается на одну минуту (если времени осталось слишком мало, замена невозможна). Эту минуту можно как использовать непосредственно перед заменой (сообщив о намерении заменить представителя), так и не использовать. В последнем случае команда соперников тоже *не имеет права* её использовать.

Порядок вызовов. Окончание боя

В случае, если вызов был признан *некорректным*, команда должна в следующем раунде *повторить вызов.* Во всех остальных случаях команды вызывают друг друга поочерёдно.

В любой момент боя та команда, которая должна вызывать, может отказаться делать это (обычно это происходит, когда у команды больше нет решённых задач, а делать вызов, который может оказаться некорректным, она не рискует). Тогда другая команда получает право (но не обязана) рассказать решения всех или некоторых оставшихся задач. При этом команда, отказавшаяся делать вызов, может выставлять оппонентов и получать баллы только за оппонирование, но рассказывать решения она уже не имеет права (то есть после отказа от вызова не происходит ни полной, ни частичной перемены ролей). *Бой заканчивается*, когда все задачи обсуждены или когда одна из команд отказалась от вызова, а другая команда отказалась рассказывать решения оставшихся задач.

Начисление баллов

Каждая задача оценивается в 12 баллов, которые по итогам раунда распределяются между докладчиком, оппонентом и жюри. Если докладчик рассказал правильное и полное решение, все 12 баллов достаются ему. Если оппонент сумел найти в решении более или менее существенные ошибки, жюри прежде всего решает вопрос о том, *удалось ли оппоненту доказать, что задача докладчиком не решена.* Если это оппоненту не удалось, то он тем не менее может получить баллы за оппонирование в зависимости от серьёзности указанных недочётов и от того, насколько докладчику (или оппоненту, если произошла частичная перемена ролей) удалось их исправить. Как правило, за обнаружение «дыры» в решении оппонент получает половину её стоимости (*принцип «половины»*). Если докладчик сумел изложить полное решение только после существенных наводящих вопросов оппонента и (или) жюри (*«грязь» в решении*), то жюри может отобрать у докладчика 1–2 балла и передать их оппоненту или оставить себе. Если же произошла частичная перемена ролей, то бывший оппонент получает дополнительно баллы за доказательство сформулированных им предварительно утверждений, а бывший докладчик — за их оппонирование (при этом «стоимость» рассматриваемых утверждений определяет жюри, а распределение оставшихся баллов происходит так же, как при оппонировании полного решения — с учётом *принципа «половины»*). Остальные баллы распределяются между докладчиком и жюри, и раунд заканчивается.

Если же оппонент сумел доказать, что решения у докладчика нет, он получает баллы за оппонирование (с учётом *принципа «половины»*) и, если вызов был принят, право рассказать своё решение (см. «Перемена ролей» на стр. 12). При полной или частичной перемене ролей начисление баллов происходит по схеме, изложенной выше.

Таким образом, максимально возможное количество баллов, получаемое докладчиком — 12, оппонентом — 6 (при перемене ролей оппонент становится докладчиком и может суммарно получить до 12 баллов).

Если ошибки или пробелы в докладе указаны самим докладчиком и не устранены его командой, то оппонент получает за них баллы так, как если бы он нашёл эти недостатки сам. В частности, если, получив отказ от вызова, капитан вызывающей команды сразу признаётся, что у его команды нет решения, команда соперников получает 6 баллов за оппонирование (которое в этом случае состоит из одной фразы: «У Вас нет решения»), а вызов признаётся *некорректным.* Докладчик и оппонент в этом случае не назначаются и выходы к доске не засчитываются.

Капитан

Во время боя только капитан может от имени команды обращаться к жюри и соперникам: сообщать о вызове или отказе, просить перерыв и т. д. Он имеет право в любой момент прекратить доклад или оппонирование представителя своей команды. Если капитан у доски, он оставляет за себя заместителя, исполняющего в это время обязанности капитана. Имена обоих сообщаются жюри до начала боя.

Во время решения задач главная обязанность капитана — координировать действия членов команды так, чтобы имеющимися силами решить как можно больше задач. Для этого капитан с учётом пожеланий членов команды распределяет между ними задачи для решения, следит, чтобы каждая задача кем-то решалась, организует проверку найденных решений. Капитан заранее выясняет, кто будет докладчиком или оппонентом по той или иной задаче, определяет тактику команды на предстоящем бое.

Капитаны команд имеют право попросить жюри о предоставлении в ходе боя *перерывов* на 5–10 минут (примерно через каждые полтора часа). Перерыв может предоставляться только *между раундами*. При этом команда, которая должна сделать вызов, делает его в письменной форме (без оглашения) непосредственно перед началом перерыва и сдаёт жюри, которое оглашает этот вызов сразу после окончания перерыва.

Жюри

Жюри является верховным толкователем правил боя. В случаях, не предусмотренных правилами, оно принимает решение по своему усмотрению. Решения жюри являются обязательными для команд.

Во время решения командами задач всякое существенное разъяснение условий, данное одной из команд, должно быть в кратчайшее время сообщено всем остальным командам.

Жюри может снять вопрос оппонента (например, если он не по существу), прекратить доклад или оппонирование, если они затягиваются. Если жюри не может быстро разобраться в решении, оно может с согласия обоих капитанов выделить своего представителя, который продолжит обсуждение задачи совместно с докладчиком и оппонентом в другом помещении. При этом бой продолжается по другим задачам, а очки по этой задаче начисляются позже. (При проверке корректности так сделать нельзя.)

Жюри ведёт протокол боя. Если команда не согласна с принятым жюри решением по задаче, она имеет право немедленно потребовать перерыв для разбора ситуации с участием председателя жюри. После начала следующего раунда счёт предыдущего раунда изменён быть не может.

Жюри следит за порядком. Оно может оштрафовать команду за шум, некорректное поведение, общение со своим представителем, находящимся у доски.

Жюри обязано мотивировать все свои решения, не вытекающие непосредственно из правил боя.

Текст этих правил основан на правилах, опубликованных на сайте olympiads.mccme.ru.

Командная олимпиада

Параллель 6–7 классов

1. Сборник состоит из 30 статей различной длины от 1 до 30 страниц в некотором порядке. Первая статья начинается на первой странице, каждая статья начинается с новой страницы. Какое максимальное количество статей могут начинаться на нечётных страницах?

2. В школе строгий дресс-код. Все девушки ходят либо в блузках и юбках, либо в блузках и брюках, либо в платьях. Любой предмет одежды может быть одного из четырёх цветов: чёрного, белого, зелёного или синего. Если две девочки пришли одетыми абсолютно одинаково, они ссорятся и срывают урок. Какое наибольшее количество девочек может быть в классе, чтобы уроки проходили в спокойном режиме?

3. Василиса заметила, что каждый из 25 её одноклассников имеет разное количество друзей в классе. Сколько может быть друзей у самой Василисы?

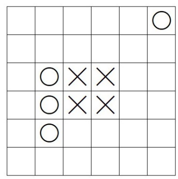
4. Учёный-психолог проводит опыты над лосями и оленями. После неудачного опыта $1/10$ всех оленей считает, что они — лоси, а $1/10$ всех лосей — что они олени. $1/6$ всех животных считает себя оленями. А какова доля оленей среди всех животных на самом деле?

5. Паша и Люба играют в следующую игру (Паша ходит первым). Вначале перед ними лежит куча из 2019 конфет. За один ход разрешается выбрать любой делитель текущего количества конфет в куче и съесть такое количество конфет. Кто выиграет при правильной игре, если проигрывает тот, кто съест последнюю конфету?

6. У Полины есть карточки с цифрами от 0 до 9, по одной каждого вида. Какое наибольшее количество карточек она может выбрать, чтобы никакое число, составленное из этих карточек (возможно, не из всех), не делилось на 9? Переворачивать карточки нельзя.

7. Сумма пяти различных чисел равна 50, сумма каких-то четырёх из них равна 40, а сумма каких-то трёх равна 30. Докажите, что из этих пяти чисел можно выбрать четыре различных числа a, b, c и d так, что $a + b = c + d$.

8. Разрежьте данный квадрат на 4 равных и по форме, и по размеру части так, чтобы в каждой оказалось по одному кружку и крестику.



Параллель 8–9 классов

1. Сумма пяти различных чисел равна 50, сумма каких-то четырёх из них равна 40, а сумма каких-то трёх равна 30. Докажите, что из этих пяти чисел можно выбрать четыре различных числа a, b, c и d так, что $a + b = c + d$.

2. У каждого из 10 мальчиков есть несколько (не менее одного) воздушных шариков. У всех мальчиков разное количество шариков, и все шарики у каждого мальчика разного цвета. Докажите, что каждый мальчик может отдать один из своих шариков учительнице так, чтобы все шарики, полученные учительницей, тоже были разного цвета.

3. Положительные числа a, b, c, d удовлетворяют следующим условиям:
$$\begin{cases} a+b+c+d=19, \\ \dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+d}+\dfrac{1}{d+a}=\dfrac{19}{21}. \end{cases}$$
Чему равно
$$\frac{a+b}{c+d}+\frac{b+c}{d+a}+\frac{c+d}{a+b}+\frac{d+a}{b+c}?$$

4. Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ таков, что как бы ни разрезали его на 3 треугольника, всегда среди них найдётся треугольник площади 1. Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм площади 2.

5. Докажите, что если
$$\frac{\text{НОК}\,(a,b)}{\text{НОД}\,(a,b)}=a-b,$$
то
$$\text{НОК}\,(a,b)=\bigl(\text{НОД}\,(a,b)\bigr)^2.$$

6. Дано натуральное число n. Медведь и Крокодил по очереди выписывают в строку по одной цифре (первую цифру пишет Медведь, она должна быть отлична от нуля; далее каждый игрок приписывает цифру справа). Игрок, у которого получится число, кратное n, выигрывает. При каких n у одного из игроков есть стратегия, позволяющая ему выиграть, как бы ни играл другой?

7. В Тридевятом царстве живут 2019 человек. 600 из них честные, а остальные — жулики. Честные люди на все вопросы отвечают правду, а жулики отвечают на вопросы так, как им хочется (в том числе, возможно, и правду). Василиса Премудрая хочет изобличить как можно больше жуликов. Какое наибольшее количество жуликов ей гарантированно удастся обнаружить?

8. В четырёхугольнике $ABCD$ $\angle A = 85°$, $\angle B = 115°$, $AD = BC$. Серединные перпендикуляры к сторонам AB и CD пересекаются в точке M. Найдите $\angle MAB$.

Математические бои

Первый день

Параллель 6–7 классов

1. II I Клетки доски 9×9 раскрасили в три цвета. Оказалось, что из всех синих клеток можно сложить полый контур квадрата толщиной в одну клетку, а красные можно разрезать на доминошки. Можно ли сложить из зелёных клеток два одинаковых прямоугольника?

2. II I Можно ли выписать в ряд все числа от 0 до 9 так, чтобы сумма любых двух соседних чисел была простым числом?

3. II I Восемь команд сыграли круговой турнир матбоёв (то есть каждая сыграла с каждой ровно один раз). За победу присуждается 2 очка, за ничью — 1, за поражение — 0. Так получилось, что 7 команд поделили второе место. Сколько очков могло быть у победившей команды?

4. II I Найдите все решения буквенного ребуса ТУРНИР = ТРИ + ТЫСЯЧА (одинаковые буквы обозначают одинаковые цифры, а разные буквы — разные цифры) и докажите, что других нет.

5. II I Ипполит едет в автобусе и от скуки считает количество пассажиров. На первой остановке зашёл мальчик, и Ипполит записал, во сколько раз увеличилось количество пассажиров. Затем зашла женщина, и Ипполит вновь записал, во сколько раз увеличилось количество пассажиров. На 13 следующих остановках зашло по 1 человеку, и всякий раз Ипполит записывал, во сколько раз увеличилось количество пассажиров. На последней остановке зашёл класс из 20 человек и их классный руководитель, Ипполит сделал последнюю запись и вышел. Оказалось, что произведение записанных у Ипполита чисел равно 1,25. Сколько человек ехало в автобусе изначально?

6. II I На чаепитии присутствует 100 человек. Известно, что среди любых 50 из них есть хотя бы одна пара однофамильцев. Обязательно ли там найдётся три однофамильца?

7. II I Лягушка Клава играет в «классики». Она прыгает по полоске 1×15 с клетками, пронумерованными подряд с 1 по 15. Сейчас она стоит на старте. Она умеет прыгать на следующую клетку и через одну. Назад Лягушка прыгать боится. В конце пути Лягушка считает сумму чисел, которые были написаны на клетках, на которых она побывала. Сколько различных чисел она может получить?

8. II I Андроид умеет распознавать сказанные ему слова как наборы команд. Так, если ему сказать:
ТУРНИР — он посмотрит фильм, решит задачу, крикнет «Кавабунга!» два раза, поест и ляжет спать;
ИНВАРИАНТ — он решит две задачи, позвонит двум друзьям, сделает зарядку, посмотрит два фильма, крикнет «Кавабунга!» и ляжет спать;
ВНУТРИ — он сделает зарядку, посмотрит фильм, крикнет «Кавабунга!», поест, решит задачу и ляжет спать;
ВИТРИНА — он решит две задачи, позвонит другу, сделает зарядку, крикнет «Кавабунга!», посмотрит фильм и ляжет спать.
Что сделает Андроид, если сказать ему **АНТАНАНАРИВУ**?

9. II I Клетки доски 9×9 раскрасили в три цвета. Оказалось, что из всех синих клеток можно сложить полый контур квадрата толщиной в одну клетку, и из зелёных клеток тоже можно сложить полый контур квадрата толщиной в одну клетку, не равного синему. Красные клетки можно разрезать на пентаминошки (многоугольники из 5 клеточек). Какое максимальное количество красных клеток может быть?

10. II I Даны 100 натуральных чисел таких, что произведение всяких двух является делителем суммы всех остальных. Найдите все такие наборы чисел.

Параллель 8–9 классов

1. Найдите все пары $(m; n)$ натуральных чисел m и n, удовлетворяющих равенству

$$\frac{m}{9} + \frac{8}{m} = n.$$

2. На сторонах AB и AD параллелограмма $ABCD$ отмечены точки M и N соответственно. Биссектриса угла MND пересекает сторону BC в точке K. Найдите отношение суммы площадей треугольников AMN и BMK к площади параллелограмма $ABCD$, если $MN = AN = AD/3$.

3. На крыше здания сидели вороны. Когда пришёл хулиган Вася и пальнул в них из рогатки, 75% ворон улетели; вместо них на крышу прилетело 80 других ворон. Тогда хулиган Вася пальнул в них ещё раз, и 80% ворон улетело, а взамен прилетело 75 других ворон. В результате ворон на крыше оказалось меньше, чем до начала хулиганских действий Васи. Какое наименьшее число ворон могло сидеть на крыше до Васиного прихода?

4. На турнире провели две интеллектуальных игры: «Чужая игра» и «Куда? Зачем?». Для каждой игры участники разбивались на команды (не обязательно равной численности; в каждой команде был хотя бы один участник). Оказалось, что каждый участник турнира играл в «Чужую игру» в не меньшей по численности команде, чем в «Куда? Зачем?». Докажите, что в «Куда? Зачем?» играло не меньше команд, чем в «Чужую игру».

5. 99-значное натуральное число N записали два раза подряд. Может ли получившееся 198-значное число делиться на N^2?

6. В квадрате $ABCD$ на стороне BC взята точка M, а на стороне CD — точка N так, что $\angle MAN = 45°$. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника AMN, принадлежит диагонали AC.

7. В однокруговом футбольном турнире участвовало 20 команд. Оказалось, что если какие-то две команды сыграли между собой вничью, то хотя бы одна из них завершила вничью не больше трёх игр. Каково наибольшее возможное число ничьих в таком турнире?

8. Положительные числа x и y таковы, что $x + y > 1$. Докажите, что $2(x^2 + y^2) > x + y$.

Второй день

Параллель 6–7 классов

1. **II** I Двое играют в игру «крестики-крестики» на поле 5×5 клеток. За ход разрешается поставить один крестик в любую не занятую клетку. Крестики игроков ничем не отличаются. Выигрывает тот, после чьего хода получается 3 крестика по вертикали, горизонтали или диагонали. Кто выигрывает при правильной игре, и как ему для этого надо играть?

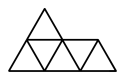
2. **II** I Саша собирается нарисовать у себя в тетради в клетку несколько необязательно различных непересекающихся квадратов (однако, участки общей границы у них могут быть). Женя утверждает, что в любом случае сможет раскрасить их в три цвета так, что никакие два квадрата одного цвета не будут иметь общей границы (единственная точка общим участком границы не считается), а Саша с ним не согласен. Кто из них прав?

3. **II I** Очень продуктивный математик Федот решил составить себе расписание по следующему правилу: если сумма текущих дня, месяца и года чётна, то он формулирует очередную математическую проблему, а если нечётна, то он решает одну из уже сформулированных.
Случится ли у него выходной (когда надо решать проблему, а запас кончился), если он начал 1 января 2018 года?

4. **II I** У кролика есть шахматная доска с восемью не бьющими друг друга ладьями. Он утверждает, что количество ладей, стоящих на чёрных клетках доски, нечётно. Прав ли он?

5. **II I** Представители ордена являются рыцарями и лжецами. Каждый представитель ордена написал каждому другому письмо, содержащее одну из двух фраз: «Я знаю, что ты лжец» или «Я знаю, что ты рыцарь». При этом фраз первого типа оказалось 2020. Какое наименьшее число фраз могло быть второго типа?

6. **II I** Можно ли разрезать равносторонний треугольник со стороной 30 на фигурки как на рисунке?



7. **II I** Что больше: сумма пятых степеней натуральных чисел от 1 до 10000 или сумма десятых степеней натуральных чисел от 1 до 100?

8. **II I** 20 друзей играли в «пятнашки» с несколькими «водами» одновременно. После игры 9 ребят подсчитали, что каждый из них «запятнал» больше раз, чем запятнали его. Сколько человек были водами изначально?

9. II I По кругу написаны числа от 1 до 100 в произвольном порядке. Каждую минуту все числа меняются по следующему принципу: к числу прибавляется его сосед по часовой стрелке и вычитается сосед против часовой стрелки. Докажите, что всегда будет хотя бы одно нечётное число.

10. II I Вася пишет на доске несколько различных чисел через запятую. Потом Петя красит эти числа в несколько цветов так, чтобы числа каждого цвета образовывали монотонную последовательность (то есть, такую, что каждое следующее число всё время больше или меньше предыдущего). Какое наименьшее количество чисел должен написать Вася, чтобы Пете двух цветов не хватило?

Параллель 8–9 классов

1. В Америке температура измеряется в градусах Фаренгейта. Это линейная шкала, в которой точка таяния льда соответствует 32°F, а точке кипения воды соответствует 212°F. Нам сообщают температуру в Нью-Йорке по Фаренгейту, округлённую до ближайшего целого числа градусов. Затем мы переводим сообщённую нам температуру в шкалу Цельсия и округляем до ближайшего целого числа градусов. На какое наибольшее число градусов (по шкале Цельсия) может отличаться полученная нами температура от истинной?

2. Каждые два из n городов графства Липшир соединены прямым сухопутным (дилижанс) или водным (пароход) сообщением. Из каждого города можно и уехать в дилижансе, и уплыть на пароходе. Докажите, что в графстве есть четыре города A, B, C, D такие, что из A в B и из C в D ездит дилижанс, а из B в C и из D в A плавает пароход.

3. Квадрат 11×11 разбит на квадраты 4×4 и прямоугольники 1×3 или 3×1. Докажите, что в большом квадрате найдётся ряд (строка или столбец), пересекающий нечётное число фигур.

4. Точка M — середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC, в котором угол A равен 15°. На катете AC отмечена точка K такая, что $KM = BC$ и угол AMK — тупой. Найдите углы треугольника KBC.

5. На доске выписаны все натуральные делители числа 10^{1000}. Петя и Вася по очереди делают ходы в следующей игре. Первым ходом Петя стирает число 10^{1000}. Если последнее стёртое число равно d, то следующий игрок должен стереть делитель d или кратное d. Проигрывает не имеющий хода. Кто выигрывает при правильной игре?

6. Вещественные числа x и y удовлетворяют условию

$$\frac{x+22}{y} + \frac{290}{xy} = \frac{26-y}{x}.$$

Найдите xy.

7. В прямоугольном треугольнике ABC на гипотенузе AB отмечена точка M такая, что $CM = MB$ и $AM = BC$. Найдите $\angle ABC$.

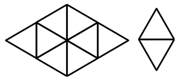
8. Натуральное число N равно произведению первых 25 простых чисел. Докажите, что любое натуральное число, меньшее N, может быть представлено как сумма нескольких различных натуральных делителей N.

Третий день

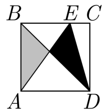
Параллель 6–7 классов

1. **II** I Пятеро братьев собирали грибы. Старший брат собрал столько же, сколько все остальные вместе. Средний брат собрал в четыре раза меньше, чем все остальные вместе. Второй по старшинству собрал вдвое больше, чем четвёртый, а младший собрал 9 грибов. Всего было собрано 500 грибов. Сколько грибов собрал каждый из братьев?

2. **II** I Можно ли расставить в большом ромбе на рисунке восемь различных цифр так, чтобы сумма в каждом маленьком ромбе была точным квадратом?



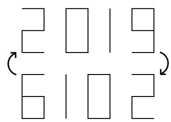
3. **II** I На рисунке изображён квадрат. Докажите, что площади чёрного и серого треугольников равны.



4. **II** **I** Алиса выкладывает мармеладных королей на шахматную доску, при этом после каждого хода называет число, равное количеству королей, которых он бьёт. Какова сумма всех названных Алисой чисел после заполнения доски?

5. **II** **I** Посередине между двумя сёлами в ряд росло несколько елей — голубых и зелёных. Начиная с 2012 года, все жители обоих сёл, коих было поровну, собирались вместе 1 мая и высаживали между каждыми двумя соседними ёлками по саженцу, причём жители первого села сажали только голубые ели, а второго — только зелёные. А 31 декабря каждый житель обоих сёл срубал себе по одной какой-то ёлке. Может ли оказаться так, что к 1 мая 2019 года голубых и зелёных елей будет поровну?

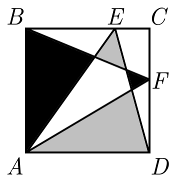
6. **II** **I** Наблюдательная Настя заметила, что некоторые числа на экране калькулятора можно «прочитать» и вверх тормашками — например, 2019 превратится в 6102 (см. рисунок). Может ли Настя придумать такое число, которое при перевороте увеличится на 518692?



7. **II** **I** Красный прямоугольник покрыт жёлтыми прямоугольниками так, что каждая точка красного покрыта по крайней мере двумя жёлтыми. Прямоугольники лежат «ровно»: каждая сторона каждого жёлтого параллельна стороне красного. Всегда ли можно часть жёлтых перекрасить в зелёный так, чтобы каждая точка была покрыта жёлтым и зелёным?

8. **II** **I** Тася пронумеровала страницы обычной школьной тетради 48 листов, начиная с первого. Лука разогнул скрепку, и тетрадь распалась на двойные листки. Тася взяла какие-то 12 из них, а Лука — остальные. После этого они сложили все номера страниц на своих листках. На сколько могут отличаться числа, полученные Тасей и Лукой?

9. II **I** Решите уравнение в натуральных числах: $(a + b) \cdot c! = (a! + b!) \cdot c$.



10. II **I** На рисунке изображён квадрат. Докажите, что площадь, закрашенная чёрным, равна площади, закрашенной серым.

11. II **I** В Зазеркалье есть 2019 городов. Каждую полночь дорожная карта страны меняется, но известно, что всегда можно добраться из любого города в любой другой. Туроператор вынужден каждое утро организовывать несколько туров по стране, причём:

- каждый город должен быть хотя бы в одном туре;
- в рамках одного тура города не могут повторяться.

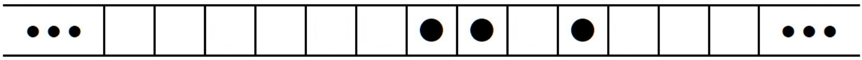
Для каждого тура нужен отдельный автобус. Какое наименьшее количество автобусов нужно туроператору?

Параллель 8–9 классов

1. Можно ли отпилить от кубика $10 \times 10 \times 10$ уголок так, чтобы срез имел форму треугольника со сторонами 2, 3, 4?

2. При каких натуральных $n > 2$ можно записать в одну строку числа от 1 до n так, чтобы среди любых трёх чисел, записанных подряд, одно из них было не меньше суммы двух других?

3. На бесконечной в обе стороны клетчатой полоске стоят три фишки так, как показано на рисунке:



Разрешается добавить в любые три клетки по фишке, если одна из этих клеток находится ровно посередине между двумя другими. Также разрешается убрать по одной фишке из трёх клеток, удовлетворяющих тем же требованиям. Можно ли при помощи данных действий убрать все фишки с полоски?

4. На плоскости синим и красным цветом окрашено несколько точек так, что никакие три точки одного цвета не лежат на одной прямой. Докажите, что какие-то три точки одного цвета образуют треугольник, на сторонах которого лежит не более двух точек другого цвета.

5. Пусть $a \geqslant b \geqslant c > 0$. Докажите, что
$$\frac{a^2-b^2}{c}+\frac{c^2-b^2}{a}+\frac{a^2-c^2}{b} \geqslant 3a-4b+c.$$

6. Боря задумал натуральное число и сообщил следующие сведения о нём:

- если оно делится на 3, то оно заключено между 50 и 59 (включительно);
- если оно не делится на 4, то оно заключено между 60 и 69;
- если оно не делится на 6, то оно заключено между 70 и 79.

Какое число это может быть?

7. Точка P на гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC такова, что $AC = AP$. На отрезке AP лежит точка Q такая, что $\angle PCQ = 45°$. Докажите, что треугольник CQB — равнобедренный.

8. После нескольких игровых дней однокругового футбольного чемпионата (каждая команда должна сыграть с каждой по одному разу) выяснилось, что любые 5 команд можно так расположить по кругу, чтобы каждая команда сыграла со стоящими справа и слева. Докажите, что чемпионат можно завершить в три дня (в один день команда может сыграть не более одной игры).

Четвёртый день

Блиц-бой

1. В США выпускаются монеты, указанные в таблице справа. Из какого количества монет можно составить стопку высотой ровно 14 мм?

Ценность (центы)	**Толщина** (мм)
1	1,55
5	1,95
10	1,35
25	1,75

2. На какую цифру оканчивается число
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 100^2?$$

3. Знаменатель дроби на 3521 больше числителя. После сокращения получилась дробь 4/11. Какова была дробь до сокращения?

4. На дискотеке каждый мальчик танцевал с тремя девочками, а каждая девочка — с двумя мальчиками. Мальчиков было 12. Сколько было девочек?

5. За лето однокомнатная квартира подорожала на 30%, двухкомнатная — на 10%. Обе в сумме подорожали на 15%. Во сколько раз однокомнатная квартира была дешевле двухкомнатной (до подорожания)?

6. Найдите наибольшее значение выражения $\frac{x+y}{x}$ при $-4 \leqslant x \leqslant -2$ и $2 \leqslant y \leqslant 4$.

7. Вася выписывает на своей доске числа $1, 4, \ldots$, прибавляя каждый раз 3, а Петя на своей доске — числа $9, 16, \ldots$, прибавляя каждый раз 7. Сколько всего разных чисел они напишут к моменту, когда на каждой доске будет по 2019 чисел?

8. На асфальте нарисована полоска в виде прямоугольника 1×10. Кенгуру хочет допрыгать с самой левой клеточки до самой правой. При этом за один прыжок он может прыгать на любое количество клеточек, но только вправо. Сколько у него разных способов допрыгать от начала до конца?

Параллель 6–7 классов

1. **II** I ГФ Повар сварил на обед не более чем 100 литров супа, которые ему требуется разлить в три кастрюли так, чтобы в первой кастрюле было на 9 литров больше, чем во второй, а после переливания 43 литров из первой кастрюли в третью, в третьей кастрюле стало в два раза больше супа, чем во второй. Получится ли у него это сделать?

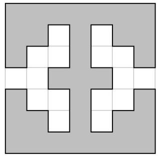
2. **II** I ГФ 17 студентов сдавали экзамен. Каждому из них выдали 3 задачи: по математическому анализу, линейной алгебре и дискретной математике. Все задачи, в том числе по одной теме, у разных студентов отличаются. Каждую минуту какие-то двое студентов выбирают по одной задаче и меняются ими. Могло ли в какой-то момент случиться так, что у каждого студента оказались задачи только по одной теме?

3. **II** **I** ГФ На командную олимпиаду одним из организаторов турнира была предложена следующая задача:

> Помогите Даше сопоставить числа от 1 до 14 буквам в выражении
>
> $$\begin{aligned}&\text{Т} > \text{У} > \text{Р} > \text{Н} > \text{И} < \text{Р} <\\ &\quad < \text{Т} > \text{Р} < \text{Е} > \text{Т} < \text{Ь} > \text{Е} > \text{Г} > \text{О} >\\ &\qquad > \text{Т} > \text{Ы} < \text{С} < \text{Я} < \text{Ч} > \text{Е} < \text{Л} > \text{Е} > \text{Т} > \text{И} > \text{Я}\end{aligned}$$
>
> так, чтобы оно осталось верным (одинаковым буквам соответствуют одинаковые числа, разным — разные).

Однако практически сразу стало ясно, что данная задача имеет несколько решений. А сколько именно?

4. **II** **I** **ГФ** Во время разработки логотипа турнира было предложено очень много вариантов, в том числе и изображённый на рисунке. А какое наибольшее количество таких фигур можно вырезать из квадрата 2079×2079?



5. **II** **I** **ГФ** В зоопарке живут 10 животных четырёх видов: львы, зебры, бегемоты и жирафы. Некоторые из них дружат между собой, но только с представителями своего вида. Обязательно ли найдутся трое животных с одинаковым числом знакомых?

6. **II** **I** **ГФ** На поле 8×8 расположен корабль 2×2. Выстрел состоит в указании некоторой клетки, на что отвечают «попал» или «мимо», в зависимости от того, содержит корабль эту клетку или нет. За какое наименьшее число выстрелов всегда можно обнаружить этот корабль? (Требуется указать все клетки, из которых состоит корабль, а не «утопить» его.)

7. **II** **I** **ГФ** Ювелирный магазин выставил в витрине 6 золотых слитков, из которых несколько слева — подделки из более лёгкого сплава, и предложил награду тому, кто за два взвешивания определит, сколько слитков настоящие. Помогите Диме выиграть приз.

8. **II** **I** **ГФ** На рождественском балу танцевали 20 юношей и девушек. Оказалось, что одиннадцать из них станцевали по три парных танца, один — пять, а остальные восемь — по шесть танцев. Могло ли оказаться так, что в каждом танце участвовали юноша и девушка?

9. **II** **I** **ГФ** Известно, что среднее арифметическое кубов двух чисел равно кубу среднего арифметического самих чисел. Найдите эти числа.

10. II **I** **ГФ** Однажды Скрудж МакДак заработал свою первую золотую монету, и с тех пор каждый год он удваивает свой запас монет. Он выкладывает монеты на полу своего хранилища в один слой. Как-то на день рождения Поночка подарила ему ещё 7 монет, и они смогли выложить все монеты в форме квадрата. Сколько у него могло быть монет перед днём рождения?

11. II I **ГФ** На командную олимпиаду одним из организаторов турнира была предложена следующая задача:

> Помогите Даше сопоставить числа от 1 до 14 буквам в выражении
>
> $$\text{Т} > \text{У} > \text{Р} < \text{Н} > \text{И} < \text{Р} <$$
> $$< \text{Т} > \text{Р} < \text{Е} > \text{Т} < \text{Ь} < \text{Е} > \text{Г} < \text{О} <$$
> $$< \text{Т} > \text{Ы} < \text{С} < \text{Я} < \text{Ч} < \text{Е} < \text{Л} > \text{Е} > \text{Т} > \text{И} > \text{Я}$$
>
> так, чтобы оно осталось верным (одинаковым буквам соответствуют одинаковые числа, разным — разные).

Однако практически сразу стало ясно, что данная задача имеет несколько решений. А сколько именно?

12. II I **ГФ** Божья коровка с одной точкой на спине стоит в точке 0. Раз в минуту она может или добавить точку себе на спину, или прыгнуть вперёд на количество клеток, равное количеству точек на спине. За какое наименьшее время она доберётся до точки 100000?

13. II I **ГФ** Из какого наименьшего количества выпуклых пятиугольников можно составить выпуклый 2019-угольник?

Параллель 8–9 классов

1. Докажите, что среди любых семи целых чисел найдутся четыре числа a, b, x, y такие, что $ab - xy$ делится на 7.

2. На сторонах AB и BC параллелограмма $ABCD$ во внешнюю сторону построены равносторонние треугольники ABE и BCF. Докажите, что $\angle CED + \angle AFD = 60^\circ$.

3. Из какого наименьшего количества выпуклых пятиугольников можно составить выпуклый 2019-угольник?

4. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 - yz = 3, \\ y^2 - xz = 4, \\ z^2 - xy = 5. \end{cases}$$

5. В магазине «Мелкий опт» продаются куздры. Если покупать меньше ста куздр, то их продают по 3 руб. 50 коп., а если 100 или больше, то по 3 рубля. Получается, что выгоднее купить 100 куздр по 3 руб., чем 99 по 3,5 руб. При покупке какого наименьшего числа куздр можно добавить ещё несколько куздр, чтобы после этого цена покупки уменьшилась?

6. На доске 100×100 расставлено 100 не бьющих друг друга ферзей. Докажите, что существует прямоугольник периметра 202 (со сторонами, идущими по линиям сетки), в противоположных углах которого стоит по ферзю.

7. Найдите все простые p и q, для которых число $p^q - pq$ также простое.

8. На поле 8×8 расположен корабль 2×2. Выстрел состоит в указании некоторой клетки, на что отвечают «попал» или «мимо», в зависимости от того, содержит корабль эту клетку или нет. За какое наименьшее число выстрелов всегда можно обнаружить этот корабль? (Требуется указать все клетки, из которых состоит корабль, а не «утопить» его.)

Личная олимпиада

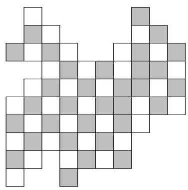
Параллель 6 класса

Довывод

1. Полина и Арина вышли из трамвая вместе и пошли в школу пешком вдоль трамвайной линии с разными скоростями. Полина дошла до школы за час, а Арина — за полчаса. Всё это время они считали трамваи, которые обгоняют их. Трамваи идут с постоянными скоростями и на равных расстояниях друг от друга. Кто из девочек насчитал больше трамваев?

2. Ася, Вася, Тася и Никодим провели круговой турнир. Каждый сыграл с каждым по одному разу (за победу присуждалось 2 очка, за ничью — 1 очко, за поражение — 0 очков). Оказалось, что вничью были сыграны 4 партии, а Никодим набрал 1 очко. Ася сказала, что за турнир набрала 5 очков. Может ли оказаться, что Ася права?

3. Настя вырезала из клетчатого листа фигуру и покрасила её в два цвета так, как показано на рисунке. Паша хочет разрезать её не более чем на 6 одинаковых по площади и форме частей, из которых можно было бы сложить шахматную доску. Возможно ли это?



4. На доске написано 5 чётных чисел. Среди последних и предпоследних цифр этих чисел нет одинаковых. Докажите, что сумма этих пяти чисел не может являться точным квадратом.

Вывод

5. Число 2020 представили в виде суммы трёх различных натуральных слагаемых и вычислили их наибольший общий делитель. Какое максимальное число могло получиться?

6. В ряд стоят 2019 человек, треть из которых зовут Саша, треть — Женя, треть — Валя. Если левый и правый сосед человека имеют одинаковое имя, то он загадывает желание. Какое наибольшее количество человек могут загадать желание?

7. Роту солдат выстроили в каре 4×4. Каждый может видеть солдат в своём ряду и во всех рядах перед ними. На солдат надевают зелёные и чёрные кепки. После этого солдаты последовательно в любом ими выбранном порядке называют цвет своих кепок. Если цвет не верен, то солдат идёт копать траншею, а если верен — идёт спать. Перед началом процедуры солдаты могут договориться, как им действовать. Какое наибольшее число солдат пойдёт спать?

Параллель 7 класса

Довывод

1. Сколько решений имеет буквенный ребус Т + У + Р + + Н + И + Р = 19 (одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные), если гласные буквы — цифры одной чётности, а согласные — другой чётности?

2. Настя пускает лазерный луч в стеклянную призму в виде равностороннего треугольника таким образом, что луч, отразившись от граней призмы, прошёл через некоторую точку три раза в трёх различных направлениях и вернулся в исходную точку. Получится ли у неё это? (Отражение происходит по закону «угол падения равен углу отражения»).

3. Даня, Ваня и Саня купили по набору карточек, на которых написаны числа от 1 до 2019, по одному на карточке. Каждый из них составил число, разложив все карточки в ряд в произвольном порядке. Затем они сложили полученные три числа. Докажите, что результат делится на 9 нацело.

4. Про 4 натуральных числа a, b, c, d известно, что $ab = cd$. Может ли их сумма $a+b+c+d$ быть простым числом?

Вывод

5. Положительные числа a, b, c, d удовлетворяют неравенству

$$\frac{a+b}{c+d} < 2.$$

Докажите, что

$$\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2} < 8.$$

6. Один катет и гипотенуза прямоугольного равнобедренного треугольника видны из некоторой точки под углами $135°$. Докажите, что данная точка лежит на медиане треугольника.

7. На симпозиум приехали делегаты из разных стран. Оказалось, что каждый делегат знает ровно 3 языка, каждый язык знают ровно 3 делегата, и среди каждых трёх делегатов по крайней мере один найдёт общий язык с каждым из двух других. Какое наибольшее количество делегатов могло приехать на симпозиум?

Параллель 8–9 классов

Довывод

1. Десять лыжников ушли со старта с интервалом в 1 минуту (в порядке возрастания номеров) и шли по дистанции с постоянными скоростями. Известно, что каждый лыжник в какой-то момент времени лидировал в гонке. В каком порядке лыжники пришли к финишу?

2. Можно ли числа 1, 2, 3, ..., 1001 расставить по кругу так, чтобы каждое число делилось на разность своих соседей?

3. Положительные числа a, b, c, d удовлетворяют неравенству

$$\frac{a+b}{c+d} < 2.$$

Докажите, что

$$\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2} < 8.$$

4. Выпуклый шестиугольник $ABCFGH$ таков, что $\angle A = \angle B$, $\angle C = \angle F$, $\angle G = \angle H$ и $BC = FG = HA$. Докажите, что около шестиугольника можно описать окружность.

Вывод

5. О целых числах x, y, z, a, b, c известно, что $x+y+z=0$ и $a+b+c=0$. Докажите, что число

$$\left(a^2yz+b^2xz+c^2xy\right)\left(x^2bc+y^2ac+z^2ab\right)$$

является четвёртой степенью целого числа.

6. В равнобедренном треугольнике ABC угол A тупой. На луче AB берётся точка D, а на луче CA — точка E так, что $AD = BC = CE$. Покажите, что если треугольник DAE равнобедренный, то угол BAC равен $100°$.

7. В классе некоторые школьники дружат друг с другом. Известно, что все, у кого есть хотя бы один друг, могут обменяться записками, последовательно передаваемыми только от друга к другу. Докажите, что кто-то может поссориться с двумя своими друзьями, а указанное свойство не нарушится.