Физическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2019–2020 учебный год. Отборочный этап

Задачи для 8 класса

1) (10 баллов) Лестница в небо, построенная бароном Мюнхгаузеном, сломалась, поэтому он решил долететь до Луны на аэростате. Масса корзины и креплений составила 23 кг, а оболочку воздушного шара он сшил из материала с поверхностной плотностью $\rho = 2$ кг/м^2.

Каков минимальный радиус шара, необходимый для того, чтобы поднять самого барона массой 80 кг и его астрологическое оборудование массой 170 кг? Ответ дайте в метрах.

Примечание. Шар наполняется гелием, температура и давление внутри и снаружи шара нормальные. Объём шара вычисляется по формуле $V = 4\pi R^3/3$, а площадь поверхности сферы — $S = 4\pi R^2$, где R — радиус. Плотность воздуха — 1,225 кг/м^3, плотность гелия — 0,178 кг/м^3.

Ответ: 7 м.

Решение. Сила Архимеда должна уравновешиваться силой тяжести:

$$\rho_{\text{возд}} V g = M g, \tag{8.1.1}$$

где M — общая масса оболочки шара, гелия, корзины, барона и астрологического оборудования. Масса гелия в шаре находится по формуле:

$$M_{\text{гел}} = \rho_{\text{гел}} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3. \tag{8.1.2}$$

Масса оболочки — по формуле:

$$M_{\text{обол}} = \rho_{\text{обол}} \cdot 4\pi R^2. \tag{8.1.3}$$

Подставляем (8.1.2) и (8.1.3) в (8.1.1) и преобразуем получившееся уравнение:

$$\rho_{\text{возд}} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = \rho_{\text{гел}} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 + \rho_{\text{обол}} \cdot 4\pi R^2 + M_{\text{бар}} + M_{\text{корз}} + M_{\text{обол}} \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad (\rho_{\text{возд}} - \rho_{\text{гел}}) \frac{4}{3}\pi R^3 = \rho_{\text{обол}} \cdot 4\pi R^2 + M_{\text{бар}} + M_{\text{корз}} + M_{\text{обол}}.$$

Подставим числа из условия. Размерности величин указывать не будем (все в системе СИ):

$$\frac{4}{3}\pi(1{,}225 - 0{,}178)R^3 = 2 \cdot 4\pi R^2 + 23 + 80 + 170 \quad \Leftrightarrow \quad 4{,}38R^3 - 25{,}1R^2 = 273.$$

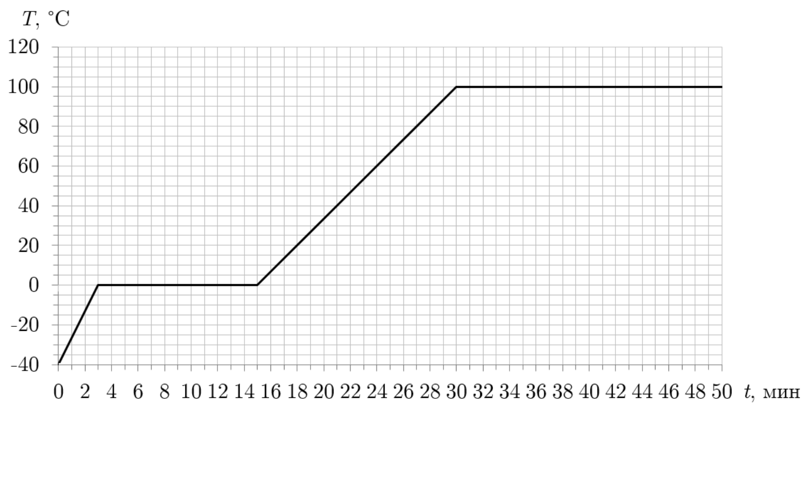
Не будем решать это уравнение в общем виде, а подберём ответ методом последовательных приближений:

	R	Подстановка	Вывод
1)	10	$1870 = 273$	$R < 10$
2)	6	$42{,}5 = 273$	$R > 6$
3)	8	$636{,}2 = 273$	$R < 8$
4)	7	$272{,}4 = 273$	$R \approx 7$
5)	7,1	$302{,}3 = 273$	$R < 7{,}1$

То есть с точностью до десятых $R = 7{,}0$ м. Искать ответ с большей точностью не имеет смысла в силу погрешности начальных данных.

2) (10 баллов) Русские учёные проводят на арктической станции эксперименты по выживаемости растений. Для поддержания необходимой влажности воздуха в теплице они используют обычную печку, в которой топят лёд и снег.

В пустую нагретую печку положили 4 кг льда. График зависимости температуры от времени представлен на рисунке.



Сколько минут в печке было больше 2 литров жидкой воды?
Примечание. Удельная теплоёмкость воды — 4200 $\frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot{}^\circ\text{C}}$, удельная теплота плавления льда — 336 кДж/кг, удельная теплота парообразования воды — 2240 кДж/кг.

Ответ: 61 минуту.

Решение. Из графика видно, что первые 3 минуты в печке находился только лёд (и снег), так как температура оставалась меньше 0°C, а вода при таких температурах находится в твёрдом агрегатном состоянии. С 3-й по 15-ю минуту температура оставалась равной 0°C. То есть всё тепло печки уходило на плавление воды. В начале процесса в печке было 0 кг воды и 4 кг льда, а в конце — 0 кг льда и 4 кг воды. Так как нагревание происходило равномерно, количество жидкой воды стало равным 2 кг (или 2 л) ровно в середине этого промежутка, в начале 9-й минуты.

Далее, с 15-й минуты по 30-ю вода нагревалась, и её объём был 4 л.

После 30-й минуты температура воды постоянна и равна 100°C, значит, всё тепло уходит на выкипание воды. Осталось определить, когда её количество станет меньше 2 л. Для этого вода должна получить:

$$Q_2 = Lm = 4480 \text{ кДж}.$$

Для вычисления времени, необходимого для испарения 2 л, найдём мощность печки. Она расплавила 4 кг за льда за 12 минут, поэтому:

$$P = \frac{\lambda m}{t_1} = 1867 \text{ Вт}.$$

Тогда время:

$$t_2 = \frac{Q_2}{P} = 40 \text{ мин}.$$

Воды станет меньше 2 л через 40 минут после начала кипения, на 70-й минуте.

Таким образом, в печке было более 2 л жидкой воды с 9-й по 70-ю минуту, то есть $70 - 9 = 61$ минуту.

3) (10 баллов) В первый день соревнований по гребле на байдарке одна команда спустилась и поднялась по реке со средней скоростью 3 км/ч.
На следующий день эта же команда решила прийти к финишу первой, для чего удвоила собственную скорость. Теперь спуск и подъём прошёл со средней скоростью 7,5 км/ч.
Найдите скорость течения реки. Ответ выразите в км/ч.

Ответ: 2 км/ч.

Решение. Пусть V — собственная скорость лодки в первый день, а u — скорость течения реки. Тогда скорость лодки при движении по течению в первый день:

$$V_{\text{по теч}_1} = V + u,$$

а скорость против течения в первый день:

$$V_{\text{пр. теч}_1} = V - u.$$

Средняя скорость равна отношению полного пути ко времени, за который этот путь проделан. Пусть путь в одну сторону равен L. Тогда средняя скорость:

$$V_{\text{ср}_1} = \frac{2L}{\frac{L}{V+u} + \frac{L}{V-u}} = \frac{2(V^2 - u^2)}{2V} = \frac{V^2 - u^2}{V}. \tag{8.3.1}$$

Аналогичным образом получаем выражение для средней скорости во второй день, только собственная скорость лодки на этот раз равна $2V$:

$$V_{\text{ср}_2} = \frac{4V^2 - u^2}{2V} \tag{8.3.2}$$

Соединим уравнения (8.3.1) и (8.3.2) в систему:

$$\begin{cases} V_{\text{ср}_1} = \frac{V^2 - u^2}{V}, \\ V_{\text{ср}_2} = \frac{4V^2 - u^2}{2V}. \end{cases}$$

Подставляя данные из условия ($V_{\text{ср}_1} = 3$ км/ч и $V_{\text{ср}_2} = 7{,}5$ км/ч), решаем её и находим $V = 4$ км/ч, $u = 2$ км/ч.

4) **(10 баллов)** Два парня кинули друг в друга снежками с одинаковой скоростью. Снежки столкнулись в воздухе и от удара полностью растаяли. Масса каждого снежка 120 г.
С какой минимальной скоростью брошен каждый снежок? Ответ дайте в м/с, округлите до целых.
Примечание. Удельная теплота плавления снега — 336 кДж/кг. Считайте, что вся кинетическая энергия от столкновения перешла в тепло.

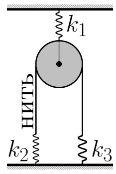
Ответ: 820 м/с.

Решение. Нас интересует минимальная скорость, необходимая для таяния снежков. Будем считать, что их начальная температура 0°C, а вся кинетическая энергия перешла в тепло. Так как массы снежков одинаковы:

$$\frac{2mv^2}{2} = \Delta Q \quad \Rightarrow \quad \frac{2mv^2}{2} = \lambda 2m \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2\lambda}.$$

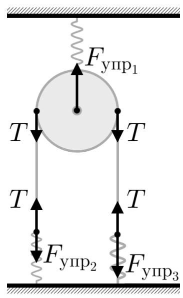
Подставив числа из условия и округлив ответ до целых, получим $v \approx 820$ м/с.

5) **(10 баллов)** В конструкции, изображённой на рисунке, жёсткости пружин таковы: $k_1 = 2000$ Н/м, $k_2 = 500$ Н/м, $k_3 = 1000$ Н/м. Нить, соединяющая пружины, невесомая и нерастяжимая, блок тоже невесомый.
На сколько сантиметров опустится блок, если укоротить нить на 15 см?



Ответ: 3 сантиметра.

Решение. Пусть Δx_1, Δx_2 и Δx_3 — начальные растяжения соответственно первой, второй и третьей пружины. На блок вверх действует сила упругости первой пружины $F_{\text{упр}_1} = k_1 \Delta x_1$, а вниз — удвоенная сила натяжения нити:



$$k_1 \Delta x_1 = 2T. \tag{8.5.1}$$

Для обеих нижних пружин натяжение нити равно силе упругости пружины:

$$T = F_{\text{упр}_2} = F_{\text{упр}_3} \quad \Leftrightarrow \quad T = k_2 \Delta x_2 = k_3 \Delta x_3. \tag{8.5.2}$$

Совместив уравнения (8.5.1) и (8.5.2), получим:

$$k_1 \Delta x_1 = k_2 \Delta x_2 + k_3 \Delta x_3. \tag{8.5.3}$$

Пусть длина нити изменилась на Δx. Назовём $\Delta x_1'$, $\Delta x_2'$ и $\Delta x_3'$ добавочные растяжения пружин. Теперь суммарные растяжения пружин равны $\Delta x_1 + \Delta x_1'$, $\Delta x_2 + \Delta x_2'$ и $\Delta x_3 + \Delta x_3'$. Запишем уравнения, аналогичные уравнениям (8.5.2) и (8.5.3):

$$k_2(\Delta x_2 + \Delta x_2') = k_3(\Delta x_3 + \Delta x_3'), \tag{8.5.4}$$
$$k_1(\Delta x_1 + \Delta x_1') = k_2(\Delta x_2 + \Delta x_2') + k_3(\Delta x_3 + \Delta x_3'). \tag{8.5.5}$$

Вычитая из уравнения (8.5.4) уравнение (8.5.2) и из уравнения (8.5.5) уравнение (8.5.3), получим:

$$k_2 \Delta x_2' = k_3 \Delta x_3', \tag{8.5.6}$$
$$k_1 \Delta x_1' = k_2 \Delta x_2' + k_3 \Delta x_3'. \tag{8.5.7}$$

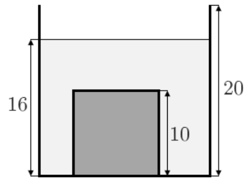
Изменение длины нити равно:

$$2\Delta x_1' + \Delta x_2' + \Delta x_3' = \Delta x. \tag{8.5.8}$$

Уравнения (8.5.6), (8.5.7) и (8.5.8) составляют систему из трёх уравнений и трёх неизвестных. Решая её и подставляя числа из условия, находим $\Delta x_1' = 3$ см.

Замечание. Начальные растяжения пружин оказываются не важны для уравнений (8.5.6) и (8.5.7)!

6) **(4 балла)** В мерном стакане в форме куба со стороной 20 см ко дну приклеен деревянный кубик с плотностью 600 кг/м^3 со стороной 10 см. В стакан налили воды по отметку 16 см.
На какой отметке окажется уровень воды, когда кубик отклеится и всплывёт? Ответ дайте в сантиметрах.



Ответ: 15 сантиметров.

Решение. Найдём объём воды в аквариуме:

$$V_{\text{в}} = V_1 - V_{\text{куб}},$$

где V_1 — весь объём аквариума ниже уровня воды, а $V_{\text{куб}}$ — объём воды, вытесненной кубом.

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= 16 \cdot 20 \cdot 20 = 6400 \text{ см}^3 \\ V_{\text{куб}} &= 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000 \text{ см}^3 \end{aligned}\right| \Rightarrow \quad V_{\text{в}} = 5400 \text{ см}^3.$$

Теперь определим, какой объём воды продолжит вытеснять куб после того, как всплывёт. На него будут действовать только две силы — сила тяжести и сила Архимеда, они равны между собой:

$$F_{\text{т}} = F_{\text{Арх}} \quad \Leftrightarrow \quad V_{\text{куб}}\rho_{\text{куб}}g = V_{\text{выт}}\rho_{\text{в}}g \quad \Rightarrow \quad V_{\text{выт}} = \frac{\rho_{\text{куб}}}{\rho_{\text{в}}}V_{\text{куб}} = 600 \text{ см}^3.$$

Отсюда найдём объём аквариума, оказавшийся ниже уровня воды — он сложится из объёма самой воды и объёма, вытесненного кубом:

$$V_2 = V_{\text{выт}} + V_{\text{в}} = 6000 \text{ см}^3.$$

Деля этот объём на площадь сечения аквариума ($20 \cdot 20 = 400$ см^2), получим высоту нового уровня $h = 15$ см.

Другое решение. Применяя закон объём Архимеда, найдём объём подводной части куба после всплытия:

$$V_{\text{н}} = 600 \text{ см}^3.$$

Значит, над водой окажется

$$V_{\text{в}} = 1000 - 600 = 400 \text{ см}^3.$$

Такой объём освободится снизу, для его заполнения необходимо понизить уровень на:

$$\Delta h = \frac{V_{\text{в}}}{S} = 1 \text{ см}.$$

Уровень понизится на 1 см, значит, конечный уровень воды $h = 16 - 1 = 15$ см.

7) **(4 балла)** На дачу привезли сухие дрова плотностью $\rho_1 = 0{,}64$ г/см^3. Дрова напилены на поленья массой 1 кг каждое. В первый день выяснилось, что при сгорании полена выделяется 9,2 МДж тепла. Ночью прошёл ливень, дрова намокли, и их плотность стала равной 0,8 г/см^3.
Сколько тепла выделится при сгорании полена? Ответ дайте в МДж и округлите до десятых.
Примечание. Температура воздуха в комнате — 20°C, удельная теплоемкость воды $c = 4200\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot{}^\circ\text{C}}$, удельная теплота парообразования воды $\lambda = 2{,}3$ МДж/кг.

Ответ: 8,5 МДж.

Решение. Плотность дров после намокания повысилась с 0,64 г/см^3 до 0,8 г/см^3. Это означает, что в каждом 1 см^3 содержится 0,64 г древесины и 0,16 г воды, то есть в любом объёме масса воды в 4 раза меньше массы древесины. Таким образом, масса всей воды в полене равна 250 г.

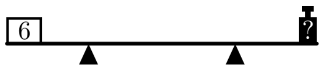
При сгорании 1 кг древесины по-прежнему выделяется 9,2 МДж тепла, но теперь часть этого тепла тратится на нагревание воды до температуры кипения и её выпаривание. Определим необходимое для этого количество теплоты:

$$Q = cm(T_{\text{кип}} - T_0) + Lm = 4{,}2 \cdot 10^3 \cdot 0{,}25 \cdot (100 - 20) + 2{,}3 \cdot 10^6 \cdot 0{,}25 = 6{,}6 \cdot 10^5 \text{ Дж} \approx 0{,}7 \text{ МДж}.$$

Эффективное выделение тепла равно разности теплоты сгорания полена и тепла, затраченного на нагревание и выпаривание воды:

$$q = 9{,}2 - 0{,}7 = 8{,}5 \text{ МДж}.$$

8) **(4 балла)** На левый край скамейки поставили 6-килограммовый кирпич. Чтобы она не опрокинулась, на правый край нужно положить гирю массой хотя бы 2 килограмма.



А какую самую тяжёлую гирю можно положить, чтобы скамейка устояла?
Примечание. Скамейка стоит на двух ножках, закреплённых на равном расстоянии от краев (см. рисунок). Скамейку считайте невесомой.

Ответ: 18 килограмм.

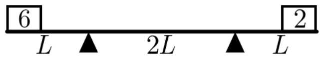
Решение. Если чуть-чуть уменьшить массу двухкилограммовой гири, скамейка опрокинется. Скамейка также опрокинется, если чуть-чуть увеличить груз на левом краю. То есть 6 кг — это максимальный груз, который может удержать правая гиря. Если её массу увеличить в три раза, она сможет удержать в три раза больший вес (то есть шестикилограммовая гиря на правом краю удержит 18 кг на левом).

Заметим, что скамейка полностью симметрична, поэтому мы можем поменять местами грузы на левом и правом плече. Значит, масса самой тяжёлой гири, которую можно противопоставить кирпичу весом 6 кг — это 18 кг.

Другое решение. Заметим, что если чуть-чуть уменьшить массу на правом конце, то скамейка начнёт вращаться вокруг левой опоры. То есть её давление на правую опору (а значит, и сила реакция опоры с её стороны) равно 0. Рассмотрим моменты сил относительно левой опоры:

$$MgL_{\text{л}} = mgL_{\text{п}} \quad \Rightarrow \quad \frac{L_{\text{п}}}{L_{\text{л}}} = \frac{M}{m} = \frac{6}{2}.$$

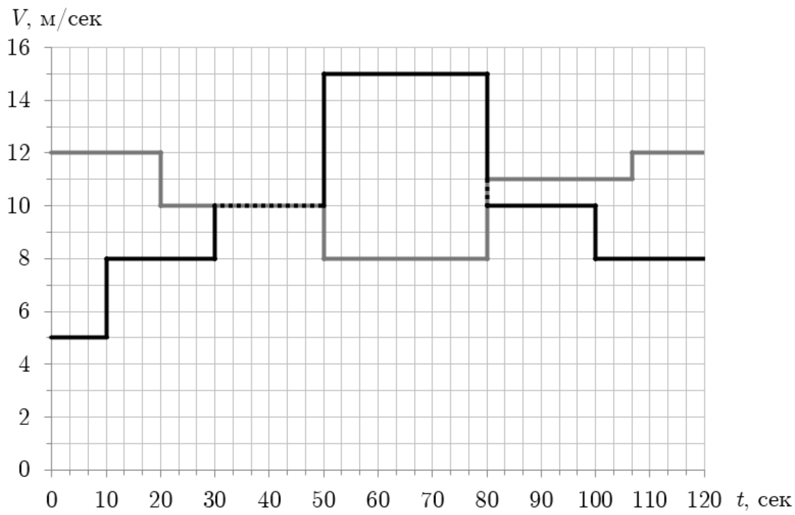
То есть правый рычаг в три раза длиннее левого. Пусть расстояние от левой опоры до края — L. Тогда (по условию) расстояние от правой опоры до правого края тоже L. Значит, расстояние между опорами равно $2L$.



В случае, если на правом краю лежит максимально допустимая для сохранения равновесия масса, весь вес скамейки приходится на правую опору. Рассмотрим моменты сил относительно неё:

$$Mg(L + 2L) = mgL \quad \Rightarrow \quad m = M\frac{L + 2L}{L} = 3M \quad \Rightarrow \quad m = 18 \text{ кг}.$$

9) **(4 балла)** Две экспериментальные наномашины конкурирующих компаний-разработчиков участвуют в гонке. Размер машин не позволяет наблюдать за ними визуально, поэтому в них установлены наноакселерометры, отслеживающие скорость в каждый момент времени. Соответствующие графики зависимости от времени $v(t)$ изображены на рисунке.
На сколько секунд первая машина проехала первые 1000 метров быстрее, чем вторая?



Ответ: 6 секунд.

Решение. При равномерном движении путь находится по формуле $S = vt$. Движение обеих машин можно разбить на несколько участков, на каждом из которых оно было равномерно.

Рассмотрим движение первой машины.

На первом участке она двигалась со скоростью 5 м/с в течении 10 с, поэтому пройденный путь:

$$S_1 = 5 \cdot 10 = 50 \text{ м}.$$

На втором участке — со скоростью 8 м/с в течении 20 с:

$$S_2 = 8 \cdot 20 = 160 \text{ м.}$$

При этом общий путь к концу второго участка:

$$S_2' = S_1 + S_2 = 210 \text{ м.}$$

Аналогично:

$$S_3' = 210 + 10 \cdot 20 = 410 \text{ м,}$$
$$S_4' = 410 + 15 \cdot 30 = 860 \text{ м,}$$
$$S_5' = 860 + 10 \cdot 20 = 1060 \text{ м.}$$

Отметка в 1000 м была достигнута ей на пятом участке пути, между 80-й и 100-й секундами. Теперь найдём точный момент времени. Заметим, что в начале пятого участка (на 80-й секунде) машина уже прошла 860 м, до «финиша» ей оставалось $S_{\text{ост}} = 140$ м:

$$t_{\text{ост}} = \frac{S_{\text{ост}}}{v_5} = \frac{140}{10} = 14\text{с} \quad \Rightarrow \quad t_1 = t_4 + t_{\text{ост}} = 80 + 14 = 94 \text{ с.}$$

Теперь рассмотрим движение второй машины:

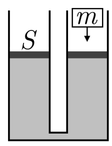
$$S_1 = 12 \cdot 20 = 240 \text{ м,}$$
$$S_2' = 240 + 10 \cdot 30 = 540 \text{ м,}$$
$$S_3' = 540 + 8 \cdot 30 = 780 \text{ м,}$$
$$S_4' = 780 + 11 \cdot 26{,}6 = 1072{,}6 \text{ м.}$$

Отметка в 1000 м была достигнута ей на четвёртом участке пути. В момент начала участка ей оставалось $S_{\text{ост}} = 220$ м:

$$t_{\text{ост}} = \frac{S_{\text{ост}}}{v_4} = 20 \text{ с} \quad \Rightarrow \quad t_2 = 80 + 20 = 100 \text{ с.}$$

То есть первая машина пересекла километровую черту на 94-й секунде, вторая — на сотой. Значит, первая машина проехала 1000 м на $t_2 - t_1 = 6$ с быстрее.

10) (4 балла) Два высоких сообщающихся сосуда (с сечением площадью $S = 10$ см^2) наполнены водой. Сосуды закрыты одинаковыми поршнями.
Какая будет разница уровней воды в сосудах, если на один из поршней положить груз массой $m = 150$ г? Ответ дайте в сантиметрах.

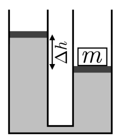


Ответ: 15 сантиметров.

Решение. Давления воды в нижних точках левого и правого колена равны.

Давление в левом колене:

$$P_1 = \rho g(h + \Delta h).$$



Давление в правом колене складывается из давления воды и давления груза, которое равно отношению его веса к площади поршня:

$$P_2 = \rho g h + \frac{mg}{S}.$$

Приравниваем P_1 и P_2:

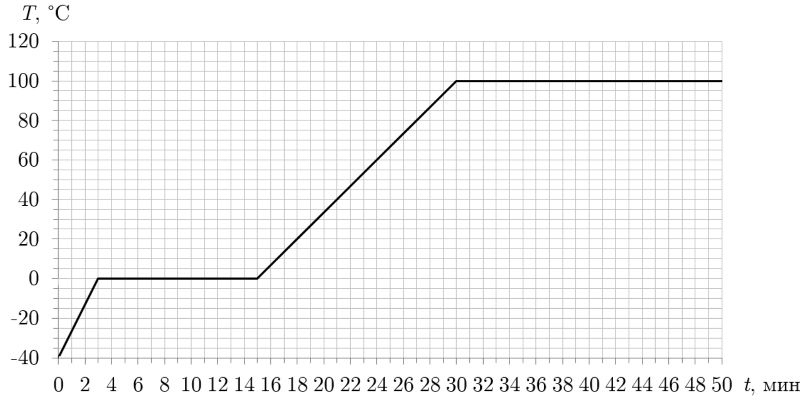
$$\rho g(h + \Delta h) = \rho g h + \frac{mg}{S} \quad \Leftrightarrow \quad \rho g \Delta h = \frac{mg}{S} \quad \Rightarrow \quad \Delta h = \frac{mg}{S\rho} = 15 \text{ см.}$$

Физическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2019–2020 учебный год. Отборочный этап

Задачи для 9 класса

1) (10 баллов) Русские учёные проводят на арктической станции эксперименты по выживаемости растений. Для поддержания необходимой влажности воздуха в теплице они используют обычную печку, в которой топят лёд и снег.

В пустую нагретую печку положили 4 кг льда. График зависимости температуры от времени представлен на рисунке.



Сколько минут в печке было больше 2 литров жидкой воды?

Примечание. Удельная теплоёмкость воды — 4200 $\frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot{}^\circ\text{C}}$, удельная теплота плавления льда — 336 кДж/кг, удельная теплота парообразования воды — 2240 кДж/кг.

Ответ: 61 минуту.

Решение. Из графика видно, что первые 3 минуты в печке находился только лёд (и снег), так как температура оставалась меньше 0°C, а вода при таких температурах находится в твёрдом агрегатном состоянии. С 3-й по 15-ю минуту температура оставалась равной 0°C. То есть всё тепло печки уходило на плавление воды. В начале процесса в печке было 0 кг воды и 4 кг льда, а в конце — 0 кг льда и 4 кг воды. Так как нагревание происходило равномерно, количество жидкой воды стало равным 2 кг (или 2 л) ровно в середине этого промежутка, в начале 9-й минуты.

Далее, с 15-й минуты по 30-ю вода нагревалась, и её объём был 4 л.

После 30-й минуты температура воды постоянна и равна 100°C, значит, всё тепло уходит на выкипание воды. Осталось определить, когда её количество станет меньше 2 л. Для этого вода должна получить:

$$Q_2 = Lm = 4480 \text{ кДж}.$$

Для вычисления времени, необходимого для испарения 2 л, найдём мощность печки. Она расплавила 4 кг за льда за 12 минут, поэтому:

$$P = \frac{\lambda m}{t_1} = 1867 \text{ Вт}.$$

Тогда время:

$$t_2 = \frac{Q_2}{P} = 40 \text{ мин}.$$

Воды станет меньше 2 л через 40 минут после начала кипения, на 70-й минуте.

Таким образом, в печке было более 2 л жидкой воды с 9-й по 70-ю минуту, то есть $70 - 9 = 61$ минуту.

2) (10 баллов) Два парня кинули друг в друга снежками с одинаковой скоростью. Снежки столкнулись в воздухе и от удара полностью растаяли. Масса каждого снежка 120 г.

С какой минимальной скоростью брошен каждый снежок? Ответ дайте в м/с, округлите до целых.

Примечание. Удельная теплота плавления снега — 336 кДж/кг. Считайте, что вся кинетическая энергия от столкновения перешла в тепло.

Ответ: 820 м/с.

Решение. Нас интересует минимальная скорость, необходимая для таяния снежков. Будем считать, что их начальная температура 0°C, а вся кинетическая энергия перешла в тепло. Так как массы снежков одинаковы:

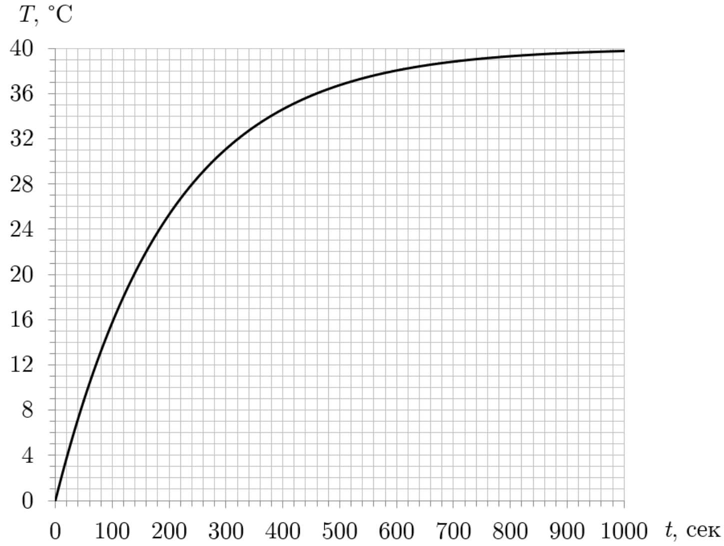
$$\frac{2mv^2}{2} = \Delta Q \quad \Rightarrow \quad \frac{2mv^2}{2} = \lambda 2m \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2\lambda}.$$

Подставив числа из условия и округлив ответ до целых, получим $v \approx 820$ м/с.

3) (10 баллов) Медный провод подключили к источнику тока с напряжением $U = 10$ В. В момент, когда ключ замкнули, провод стал нагреваться. График зависимости температуры от времени изображён на рисунке.

Определите длину провода. Ответ дайте в метрах, округлите до целых (допускается отклонение от точного ответа на 10%).

Примечание. Потери тепла пропорциональны разности температур, сопротивление проволоки считайте постоянным.



Ответ: 93 метра.

Решение. Пусть L — длина провода, S — площадь сечения, q — удельное сопротивление меди, ρ — её плотность, c — удельная теплоёмкость. Работа электрического тока:

$$A_{\text{ток}} = \frac{U^2}{R}\Delta t = \frac{U^2 S}{qL}\Delta t.$$

Рассмотрим маленький промежуток времени Δt в самом начале нагревания. За это время провод ещё не успел нагреться, поэтому теплопотерь нет, а значит вся энергия уходит на нагревание провода:

$$A_{\text{ток}} = \Delta Q \quad \Leftrightarrow \quad \frac{U^2 S}{qL}\Delta t = cm_{\text{провод}}\Delta T = c\rho SL\Delta T \quad \Rightarrow \quad L = \sqrt{\frac{U^2}{\rho c q} : \frac{\Delta T}{\Delta t}}.$$

Напряжение U нам известно из условия; плотность, удельное сопротивление и удельная теплоёмкость меди — справочные величины:

$$c = 380\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot {}^\circ\text{C}},$$
$$q = 1{,}7 \cdot 10^{-8}\ \text{Ом} \cdot \text{м},$$
$$\rho = 8900\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Для нахождения $\Delta T/\Delta t$ проведём касательную графика в начальной точке. Тангенс её наклона и есть скорость изменения температуры в самом начале:

$$k = \frac{\Delta T}{\Delta t} \approx \frac{4}{20} = 0{,}2\ \frac{{}^\circ\text{C}}{\text{с}}.$$

Подставляя числа, находим $L \approx 93$ м.

Замечание. В силу возможных неточностей при проведении касательной допускается отклонение ответа на 10%.

4) (10 баллов) В первый день соревнований по гребле на байдарке одна команда спустилась и поднялась по реке со средней скоростью 3 км/ч.
На следующий день эта же команда решила прийти к финишу первой, для чего удвоила собственную скорость. Теперь спуск и подъём прошёл со средней скоростью 7,5 км/ч.
Найдите скорость течения реки. Ответ выразите в км/ч.

Ответ: 2 км/ч.

Решение. Пусть V — собственная скорость лодки в первый день, а u — скорость течения реки. Тогда скорость лодки при движении по течению в первый день:

$$V_{\text{по теч}_1} = V + u,$$

а скорость против течения в первый день:

$$V_{\text{пр. теч}_1} = V - u.$$

Средняя скорость равна отношению полного пути ко времени, за который этот путь проделан. Пусть путь в одну сторону равен L. Тогда средняя скорость:

$$V_{\text{ср}_1} = \frac{2L}{\frac{L}{V+u} + \frac{L}{V-u}} = \frac{2(V^2 - u^2)}{2V} = \frac{V^2 - u^2}{V}. \tag{9.4.1}$$

Аналогичным образом получаем выражение для средней скорости во второй день, только собственная скорость лодки на этот раз равна $2V$:

$$V_{\text{ср}_2} = \frac{4V^2 - u^2}{2V} \tag{9.4.2}$$

Соединим уравнения (9.4.1) и (9.4.2) в систему:

$$\begin{cases} V_{\text{ср}_1} = \frac{V^2-u^2}{V}, \\ V_{\text{ср}_2} = \frac{4V^2-u^2}{2V}. \end{cases}$$

Подставляя данные из условия ($V_{\text{ср}_1} = 3$ км/ч и $V_{\text{ср}_2} = 7{,}5$ км/ч), решаем её и находим $V = 4$ км/ч, $u = 2$ км/ч.

5) (10 баллов) Лестница в небо, построенная бароном Мюнхгаузеном, сломалась, поэтому он решил долететь до Луны на аэростате. Масса корзины и креплений составила 23 кг, а оболочку воздушного шара он сшил из материала с поверхностной плотностью $\rho = 2$ кг/м^2.
Каков минимальный радиус шара, необходимый для того, чтобы поднять самого барона массой 80 кг и его астрологическое оборудование массой 170 кг? Ответ дайте в метрах.
Примечание. Шар наполняется гелием, температура и давление внутри и снаружи шара нормальные. Объём шара вычисляется по формуле $V = 4\pi R^3/3$, а площадь поверхности сферы — $S = 4\pi R^2$, где R — радиус. Плотность воздуха — 1,225 кг/м^3, плотность гелия — 0,178 кг/м^3.

Ответ: 7 м.

Решение. Сила Архимеда должна уравновешиваться силой тяжести:

$$\rho_{\text{возд}} V g = M g, \tag{9.5.1}$$

где M — общая масса оболочки шара, гелия, корзины, барона и астрологического оборудования. Масса гелия в шаре находится по формуле:

$$M_{\text{гел}} = \rho_{\text{гел}} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3. \tag{9.5.2}$$

Масса оболочки — по формуле:

$$M_{\text{обол}} = \rho_{\text{обол}} \cdot 4\pi R^2. \tag{9.5.3}$$

Подставляем (9.5.2) и (9.5.3) в (9.5.1) и преобразуем получившееся уравнение:

$$\rho_{\text{возд}} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = \rho_{\text{гел}} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 + \rho_{\text{обол}} \cdot 4\pi R^2 + M_{\text{бар}} + M_{\text{корз}} + M_{\text{обол}} \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad (\rho_{\text{возд}} - \rho_{\text{гел}})\,\frac{4}{3}\pi R^3 = \rho_{\text{обол}} \cdot 4\pi R^2 + M_{\text{бар}} + M_{\text{корз}} + M_{\text{обол}}.$$

Подставим числа из условия. Размерности величин указывать не будем (все в системе СИ):

$$\frac{4}{3}\pi(1{,}225 - 0{,}178)R^3 = 2 \cdot 4\pi R^2 + 23 + 80 + 170 \quad \Leftrightarrow \quad 4{,}38R^3 - 25{,}1R^2 = 273.$$

Не будем решать это уравнение в общем виде, а подберём ответ методом последовательных приближений:

	R	Подстановка	Вывод
1)	10	$1870 = 273$	$R < 10$
2)	6	$42{,}5 = 273$	$R > 6$
3)	8	$636{,}2 = 273$	$R < 8$
4)	7	$272{,}4 = 273$	$R \approx 7$
5)	7,1	$302{,}3 = 273$	$R < 7{,}1$

То есть с точностью до десятых $R = 7{,}0$ м. Искать ответ с большей точностью не имеет смысла в силу погрешности начальных данных.

6) (4 балла) На дачу привезли сухие дрова плотностью $\rho_1 = 0{,}64$ г/см^3. Дрова напилены на поленья массой 1 кг каждое. В первый день выяснилось, что при сгорании полена выделяется 9,2 МДж тепла. Ночью прошёл ливень, дрова намокли, и их плотность стала равной 0,8 г/см^3.
Сколько тепла выделится при сгорании полена? Ответ дайте в МДж и округлите до десятых.
Примечание. Температура воздуха в комнате — 20°C, удельная теплоемкость воды $c = 4200\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot{}^\circ\text{C}}$, удельная теплота парообразования воды $\lambda = 2{,}3$ МДж/кг.

Ответ: 8,5 МДж.

Решение. Плотность дров после намокания повысилась с 0,64 г/см^3 до 0,8 г/см^3. Это означает, что в каждом 1 см^3 содержится 0,64 г древесины и 0,16 г воды, то есть в любом объёме масса воды в 4 раза меньше массы древесины. Таким образом, масса всей воды в полене равна 250 г.

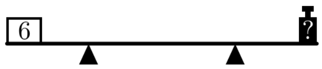
При сгорании 1 кг древесины по-прежнему выделяется 9,2 МДж тепла, но теперь часть этого тепла тратится на нагревание воды до температуры кипения и её выпаривание. Определим необходимое для этого количество теплоты:

$$Q = cm(T_{\text{кип}} - T_0) + Lm = 4{,}2 \cdot 10^3 \cdot 0{,}25 \cdot (100 - 20) + 2{,}3 \cdot 10^6 \cdot 0{,}25 = 6{,}6 \cdot 10^5 \text{ Дж} \approx 0{,}7 \text{ МДж}.$$

Эффективное выделение тепла равно разности теплоты сгорания полена и тепла, затраченного на нагревание и выпаривание воды:

$$q = 9{,}2 - 0{,}7 = 8{,}5 \text{ МДж}.$$

7) (4 балла) На левый край скамейки поставили 6-килограммовый кирпич. Чтобы она не опрокинулась, на правый край нужно положить гирю массой хотя бы 2 килограмма.



А какую самую тяжёлую гирю можно положить, чтобы скамейка устояла?
Примечание. Скамейка стоит на двух ножках, закреплённых на равном расстоянии от краев (см. рисунок). Скамейку считайте невесомой.

Ответ: 18 килограмм.

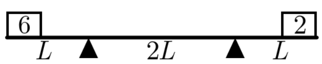
Решение. Если чуть-чуть уменьшить массу двухкилограммовой гири, скамейка опрокинется. Скамейка также опрокинется, если чуть-чуть увеличить груз на левом краю. То есть 6 кг — это максимальный груз, который может удержать правая гиря. Если её массу увеличить в три раза, она сможет удержать в три раза больший вес (то есть шестикилограммовая гиря на правом краю удержит 18 кг на левом).

Заметим, что скамейка полностью симметрична, поэтому мы можем поменять местами грузы на левом и правом плече. Значит, масса самой тяжёлой гири, которую можно противопоставить кирпичу весом 6 кг — это 18 кг.

Другое решение. Заметим, что если чуть-чуть уменьшить массу на правом конце, то скамейка начнёт вращаться вокруг левой опоры. То есть её давление на правую опору (а значит, и сила реакция опоры с её стороны) равно 0. Рассмотрим моменты сил относительно левой опоры:

$$MgL_{\text{л}} = mgL_{\text{п}} \quad \Rightarrow \quad \frac{L_{\text{п}}}{L_{\text{л}}} = \frac{M}{m} = \frac{6}{2}.$$

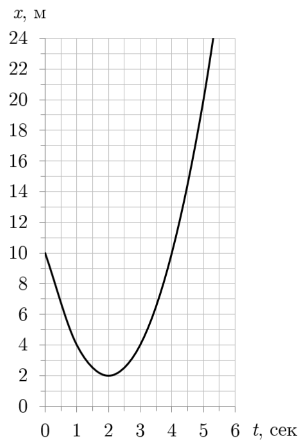
То есть правый рычаг в три раза длиннее левого. Пусть расстояние от левой опоры до края — L. Тогда (по условию) расстояние от правой опоры до правого края тоже L. Значит, расстояние между опорами равно $2L$.



В случае, если на правом краю лежит максимально допустимая для сохранения равновесия масса, весь вес скамейки приходится на правую опору. Рассмотрим моменты сил относительно неё:

$$Mg(L+2L) = mgL \quad \Rightarrow \quad m = M\frac{L+2L}{L} = 3M \quad \Rightarrow \quad m = 18 \text{ кг}.$$

8) (4 балла) Одним из навыков, отрабатываемых на курсах экстремального вождения автомобиля, является «торможение двигателем», когда число оборотов двигателя становится меньше числа оборотов самих колёс. Наиболее опасным считается такое торможение с использованием задней передачи (то есть машина едет вперёд, а двигатель крутит колёса назад) — в этом случае для уменьшения вероятности заноса рекомендуется сохранять постоянным ускорение автомобиля.
На рисунке представлен график зависимости координаты автомобиля от времени. Найдите ускорение, если водителю удалось сохранять его постоянным в течение всего манёвра. Ответ дайте в м/с^2.



Ответ: 4 м/с^2.

Решение. В конце второй секунды скорости автомобиля равна нулю. За это время он проехал 8 метров. Запишем формулу для нахождения пути при равноускоренном движении:

$$S = \frac{v_0 + v_1}{2}t,$$

где v_0 — начальная скорость, а v_1 — конечная.

$$S = \frac{v_0 + 0}{2}t \quad \Rightarrow \quad v_0 = 8 \ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

За 2 с скорость тела изменилась с 8 м/с до нуля. Значит, ускорение тела:

$$a = \frac{8}{2} = 4 \ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Другое решение. Запишем уравнение равноускоренного движения:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2},$$

где $x_0 = 10$ м.

Возьмём две любые точки на графике (здесь и далее мы не указываем размерность величин, по умолчанию имея в виду систему СИ):

$$\begin{cases} t_1 = 1,\ x_1 = 4; \\ t_2 = 2,\ x_2 = 2. \end{cases}$$

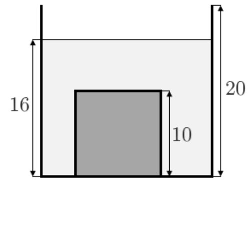
Получаем систему:

$$\begin{cases} 4 = 10 + v_0 \cdot 1 + \frac{a \cdot 1^2}{2} \\ 2 = 10 + v_0 \cdot 2 + \frac{a \cdot 2^2}{2} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 0 = 6 + v_0 + \frac{a}{2} \\ 0 = 8 + 2v_0 + 2a \end{cases}$$

Умножаем первое уравнение системы на 2 и вычитаем первое из второго:

$$0 = -4 + a \quad \Rightarrow \quad a = 4 \ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

9) (4 балла) В мерном стакане в форме куба со стороной 20 см ко дну приклеен деревянный кубик с плотностью 600 кг/м^3 со стороной 10 см. В стакан налили воды по отметку 16 см.
На какой отметке окажется уровень воды, когда кубик отклеится и всплывёт? Ответ дайте в сантиметрах.



Ответ: 15 сантиметров.

Решение. Найдём объём воды в аквариуме:

$$V_{\text{в}} = V_1 - V_{\text{куб}},$$

где V_1 — весь объём аквариума ниже уровня воды, а $V_{\text{куб}}$ — объём воды, вытесненной кубом.

$$\left.\begin{aligned} V_1 = 16 \cdot 20 \cdot 20 = 6400 \text{ см}^3 \\ V_{\text{куб}} = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000 \text{ см}^3 \end{aligned}\right| \Rightarrow \quad V_{\text{в}} = 5400 \text{ см}^3.$$

Теперь определим, какой объём воды продолжит вытеснять куб после того, как всплывёт. На него будут действовать только две силы — сила тяжести и сила Архимеда, они равны между собой:

$$F_{\text{т}} = F_{\text{Арх}} \quad \Leftrightarrow \quad V_{\text{куб}}\rho_{\text{куб}}g = V_{\text{выт}}\rho_{\text{в}}g \quad \Rightarrow \quad V_{\text{выт}} = \frac{\rho_{\text{куб}}}{\rho_{\text{в}}}V_{\text{куб}} = 600 \text{ см}^3.$$

Отсюда найдём объём аквариума, оказавшийся ниже уровня воды — он сложится из объёма самой воды и объёма, вытесненного кубом:

$$V_2 = V_{\text{выт}} + V_{\text{в}} = 6000 \text{ см}^3.$$

Деля этот объём на площадь сечения аквариума ($20 \cdot 20 = 400$ см^2), получим высоту нового уровня $h = 15$ см.

Другое решение. Применяя закон объём Архимеда, найдём объём подводной части куба после всплытия:

$$V_{\text{н}} = 600 \text{ см}^3.$$

Значит, над водой окажется

$$V_{\text{в}} = 1000 - 600 = 400 \text{ см}^3.$$

Такой объём освободится снизу, для его заполнения необходимо понизить уровень на:

$$\Delta h = \frac{V_{\text{в}}}{S} = 1 \text{ см}.$$

Уровень понизится на 1 см, значит, конечный уровень воды $h = 16 - 1 = 15$ см.

10) (4 балла) Во время подготовки к битве против Саурона разведчики Гондора донесли, что орки начали использовать неизвестное ранее электрическое оружие, поэтому король Эльдарион распорядился создать новую кольчугу, для которой требуется 300 ярдов металлической «проволоки» общим сопротивлением не более 4 феаноров.

Из чего выгоднее её делать (и сколько это будет стоить для одного человека), если в распоряжении у Гондора есть 4 металла: мифрил, итильдин, тилкал и галворн, характеристики которых указаны справа? Ответ дайте в кастарах, округлив до целых.

Металл	**Плотность**	**Удел. сопротивление**	**Цена**
	фунт/ярд^3	10^{-6} феанор · ярд	кастар/фунт
мифрил	150	0,6	131,5
итильдин	245	0,9	135,2
тилкал	710	6,2	2,5
галворн	780	7,5	2,3

Ответ: 248 кастаров.

Решение. Пусть q — удельное сопротивление материала, ρ — его плотность, а k — цена. Определим стоимость P необходимого куска проволоки.

Известно, что сопротивление проволоки зависит от её удельного сопротивления, длины и площади сечения:

$$R = \frac{qL}{S}.$$

По условию, длина проволоки L, а максимальное разрешённое сопротивление R, отсюда находим минимально возможную площадь сечения:

$$S = \frac{\rho L}{R}.$$

Тогда объём, масса и стоимость проволоки:

$$V = SL = \frac{qL^2}{R}, \qquad m = \kappa V = \frac{\rho q L^2}{R}, \qquad P = km = \frac{k\rho q L^2}{R}.$$

Так как L и R всегда одинаковы, для минимизации стоимости кольчуги необходимо подобрать материал с минимальным произведением цены, удельного сопротивления и плотности:

$$\beta = \rho q c.$$

Посчитаем β для каждого из четырёх материалов:

Металл	$\boldsymbol{\beta}$ $\left(10^{-6}\ \frac{\text{кастар}\cdot\text{феанор}}{\text{ярд}^2}\right)$
мифрил	11835
итильдин	29812
тилкал	11005
галворн	13455

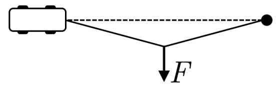
Наиболее выгодным материалом оказывается тилкал. Осталось вычислить стоимость проволоки:

$$P = \frac{\beta L^2}{R} \approx 248 \text{ кастаров.}$$

Физическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2019–2020 учебный год. Отборочный этап

Задачи для 10 класса

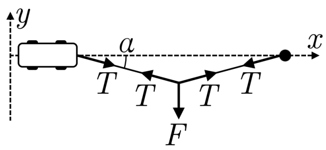
1) (10 баллов) Чтобы вытащить машину из канавы, водитель использует трос жёсткостью $k = 100000$ Н/м и длиной $L = 8$ м. Он натянул его между машиной и деревом, а сам потянул за середину троса так, как показано на рисунке. Какую силу ему надо приложить к тросу, чтобы вытащить машину? Известно, что для того, чтобы вытащить машину без троса, требуется приложить усилие $F_0 = 1000$ Н. Ответ дайте в ньютонах, округлите до целых.



Ответ: 100 ньютонов.

Решение. Пусть α — угол между натянутым тросом и прямой, соединяющей машину и дерево. Тогда новая длина троса:

$$L_{\text{кон}} = \frac{L}{\cos\alpha},$$



а сила натяжения:

$$T = k\Delta L = k\left(\frac{L}{\cos\alpha} - L\right) = kL\frac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha}. \qquad (10.1.1)$$

Для того, чтобы вытащить машину из канавы, необходимо приложить силу F_0 вдоль оси x:

$$F_0 = T\cos\alpha \quad\Rightarrow\quad F_0 = kL\frac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha}\cos\alpha \quad\Rightarrow\quad 1-\cos\alpha = \frac{F_0}{kL}. \qquad (10.1.2)$$

Запишем условие равновесия для точки изгиба троса в проекции на ось y:

$$F = 2T\sin\alpha. \qquad (10.1.3)$$

Подставляем уравнения (10.1.1) и (10.1.2) в уравнение (10.1.3):

$$F = 2kL\frac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha}\sin\alpha = 2kL\cdot\frac{F_0}{kL}\operatorname{tg}\alpha = 2F_0\operatorname{tg}\alpha. \qquad (10.1.4)$$

Отметим, что

$$1-\cos\alpha = \frac{F_0}{kL} = 0{,}00125$$

близко к 0. Значит, $\cos\alpha$ близок к единице, а сам угол малый. У малых углов

$$\alpha \approx \sin\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha \quad\Rightarrow\quad \cos\alpha\approx 1 \quad\Rightarrow\quad 1-\cos\alpha = \frac{1-\cos^2\alpha}{1+\cos\alpha} \approx \frac{\sin^2\alpha}{2} \approx \frac{\alpha^2}{2} \qquad (10.1.5)$$

(здесь и далее величина угла дана в радианах).

Подставляем (10.1.5) в (10.1.2), получаем:

$$\frac{\alpha^2}{2} = \frac{F_0}{kL} \quad\Rightarrow\quad \alpha = \sqrt{\frac{2F_0}{kL}}.$$

Подставляем полученное выражение в уравнение (10.1.4):

$$F = 2F_0\operatorname{tg}\alpha = 2F_0\alpha = 2F_0\sqrt{\frac{2F_0}{kL}}$$

Подставляя числа из условия, находим $F = 100$ Н.

Замечание. Уравнение (10.1.2) можно было решить и в явном виде:

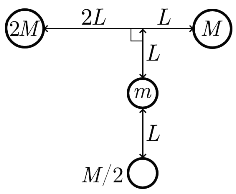
$$1-\cos\alpha = \frac{F_0}{kL} \quad\Rightarrow\quad \cos\alpha = 1-\frac{F_0}{kL} = 0{,}99875.$$

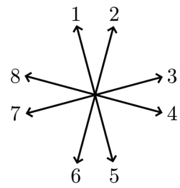
Так как $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$, уравнение (10.1.4) можно переписать:

$$F = 2F_0\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha},$$

откуда, подставляя числа, получаем $F \approx 100{,}09$ Н.

2) **(10 баллов)** Лаборатория имени экспериментатора Глюка проводит космический эксперимент по изучению гравитационного взаимодействия. Три больших шара закрепили неподвижно, а маленький поместили в начальную точку и отпустили (см.рисунок).





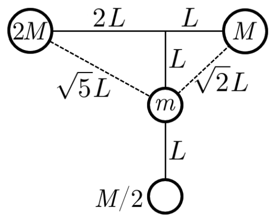
В какую сторону он начнёт двигаться (выберите вариант из предложенных на рисунке)?

Примечание. Шары взаимодействуют только гравитационно.

Ответ: 1.

Решение. По теореме Пифагора найдём расстояния от маленького шара до каждого из трёх больших:

$$L_1 = L\sqrt{5}, \qquad L_2 = L\sqrt{2}, \qquad L_3 = L.$$



Рассмотрим силы, действующие на маленький шар. Для упрощения записи введём обозначение:

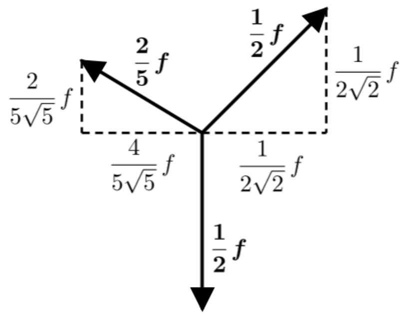
$$f = \frac{GMm}{L^2}.$$

Тогда:

$$f_1 = \frac{G\cdot 2Mm}{(L\sqrt{5})^2} = \frac{2}{5}\frac{GMm}{L^2} = \frac{2}{5}f,$$
$$f_2 = \frac{GMm}{(L\sqrt{2})^2} = \frac{1}{2}\frac{GMm}{L^2} = \frac{1}{2}f,$$
$$f_3 = \frac{G\frac{M}{2}m}{L^2} = \frac{1}{2}\frac{GMm}{L^2} = \frac{1}{2}f.$$

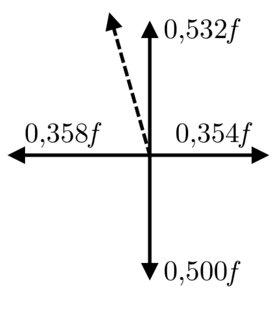
Спроецируем эти силы на оси x и y, направив оси влево и вверх:

$$f_{1_x} = -f_1\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{4}{5\sqrt{5}}f,$$
$$f_{1_y} = f_1\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{2}{5\sqrt{5}}f,$$
$$f_{2_x} = f_2\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}f,$$
$$f_{2_y} = f_2\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}f,$$
$$f_{3_y} = -f_3 = -\frac{1}{2}f.$$



Посчитаем каждую из проекций с точностью до трёх знаков и найдём их сумму:

$$f_x = f_{1_x} + f_{2_x} = -0{,}358f + 0{,}354f = -0{,}004f,$$
$$f_y = f_{1_y} + f_{2_y} + f_{3_y} = 0{,}179f + 0{,}354f - 0{,}500f = 0{,}033f.$$

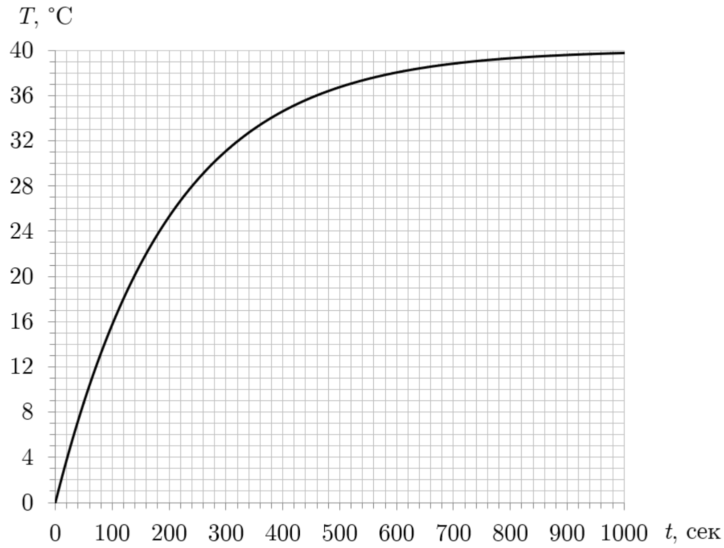


Таким образом, сила направлена вверх и влево, причём её вертикальная проекция значительно больше горизонтальной, то есть верный вариант — первый.

3) (10 баллов) Медный провод подключили к источнику тока с напряжением $U = 10$ В. В момент, когда ключ замкнули, провод стал нагреваться. График зависимости температуры от времени изображён на рисунке.

Определите длину провода. Ответ дайте в метрах, округлите до целых (допускается отклонение от точного ответа на 10%).

Примечание. Потери тепла пропорциональны разности температур, сопротивление проволоки считайте постоянным.



Ответ: 93 метра.

Решение. Пусть L — длина провода, S — площадь сечения, q — удельное сопротивление меди, ρ — её плотность, c — удельная теплоёмкость. Работа электрического тока:

$$A_{\text{ток}} = \frac{U^2}{R}\Delta t = \frac{U^2 S}{qL}\Delta t.$$

Рассмотрим маленький промежуток времени Δt в самом начале нагревания. За это время провод ещё не успел нагреться, поэтому теплопотерь нет, а значит вся энергия уходит на нагревание провода:

$$A_{\text{ток}} = \Delta Q \quad \Leftrightarrow \quad \frac{U^2 S}{qL}\Delta t = c m_{\text{провод}} \Delta T = c\rho S L \Delta T \quad \Rightarrow \quad L = \sqrt{\frac{U^2}{\rho c q} : \frac{\Delta T}{\Delta t}}.$$

Напряжение U нам известно из условия; плотность, удельное сопротивление и удельная теплоёмкость меди — справочные величины:

$$c = 380\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot{}^\circ\text{C}},$$
$$q = 1{,}7\cdot 10^{-8}\ \text{Ом}\cdot\text{м},$$
$$\rho = 8900\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

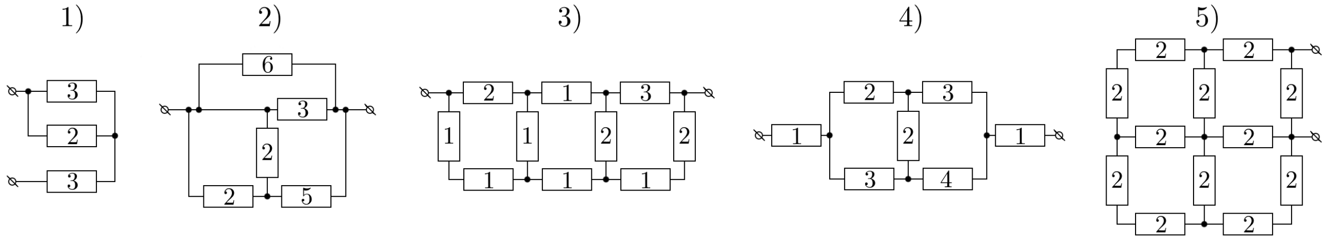
Для нахождения $\Delta T/\Delta t$ проведём касательную графика в начальной точке. Тангенс её наклона и есть скорость изменения температуры в самом начале:

$$k = \frac{\Delta T}{\Delta t} \approx \frac{4}{20} = 0{,}2\ \frac{{}^\circ\text{C}}{\text{с}}.$$

Подставляя числа, находим $L \approx 93$ м.

Замечание. В силу возможных неточностей при проведении касательной допускается отклонение ответа на 10%.

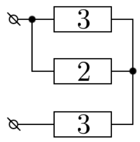
4) (10 баллов) Расположите приведённые схемы в порядке увеличения общего сопротивления. В ответе укажите цифры в нужном порядке в виде пятизначного числа (то есть без пробелов и запятых).



Ответ: 52314.

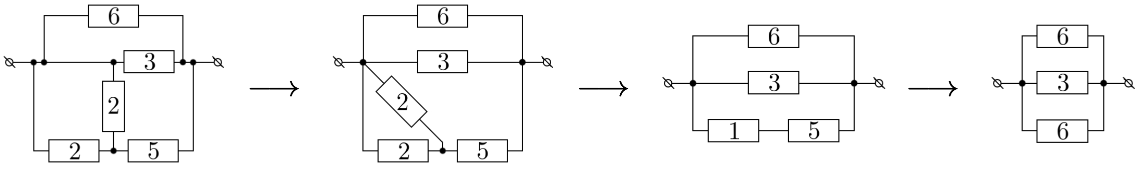
Решение. Вычислим общее сопротивление каждой схемы.

1 схема. Цепь состоит из параллельно подключённых R_1 и R_2 и последовательно подключенного к ним R_3:



$$R_{1_{\text{общ}}} = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2} + R_3 = \frac{3\cdot 2}{3+2} + 3 = 4{,}2\ \text{Ом}.$$

2 схема. Перерисуем схему:



Все три резистора соединены параллельно:

$$\frac{1}{R_{2_{\text{общ}}}} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6}\ \text{Ом}^{-1} \quad \Rightarrow \quad R_{2_{\text{общ}}} = 1{,}5\ \text{Ом}.$$

Схема 3. Перерисуем схему:

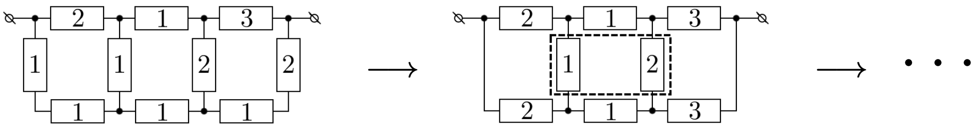
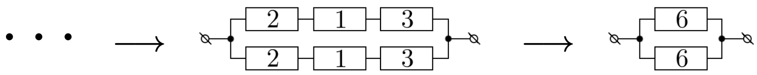
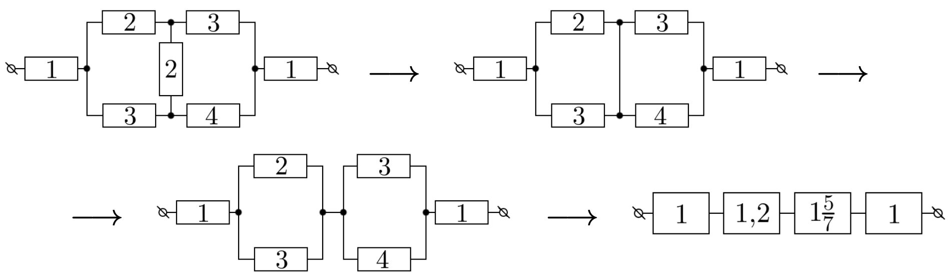


Схема симметрична, следовательно, ток не течёт через отмеченные резисторы. Их можно удалить, и сопротивление не изменится.



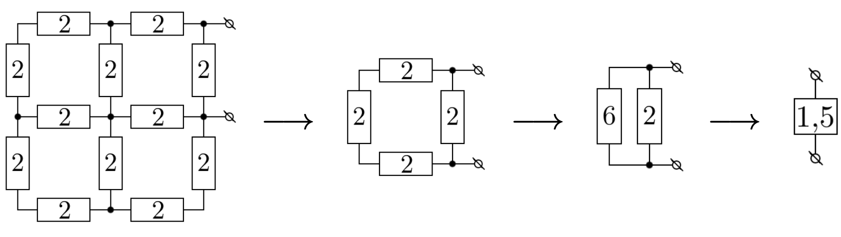
$$R_{3_{\text{общ}}} = 3\ \text{Ом}.$$

Схема 4. Не будем искать точное значение сопротивления, а сделаем оценку сверху. Если заменить один из резисторов проводом, то общее сопротивление может только уменьшиться (точно не увеличиться).



$$R_{4_{\text{общ}}} > 4{,}2\ \text{Ом} = R_{1_{\text{общ}}}.$$

Схема 5. Снова сделаем оценку сопротивления, на этот раз снизу. Если убрать часть резисторов, подключённых параллельно другому участку цепи, сопротивление увеличится (точно не уменьшится).



Следовательно,

$$R_{5_{\text{общ}}} < 1{,}5\ \text{Ом} = R_{2_{\text{общ}}}.$$

Итого, схемы по возрастанию сопротивления расположены так:

$$R_{5_{\text{общ}}} < R_{2_{\text{общ}}} < R_{3_{\text{общ}}} < R_{1_{\text{общ}}} < R_{4_{\text{общ}}}.$$

5) (10 баллов) В теплоизолированном сосуде постоянного объёма в начальный момент находятся $\nu_1 = 0{,}5$ молей метана и $\nu_2 = 10$ молей кислорода при температуре $T_0 = 300$ К. Подана искра. Найдите, какая установится температура, когда весь метан сгорит. Ответ дайте в кельвинах, округлив до целых.

Примечание. Удельная теплота сгорания метана — 50,1 МДж/кг. Уравнение реакции горения: $CH_4 + 2O_2 \to 2H_2O + CO_2$. Атомы в молекуле углекислого газа выстроены вдоль одной прямой, поэтому CO_2 ведёт себя как двухатомная молекула. Газы считайте идеальными.

Ответ: 2100 К.

Решение. Посчитаем, какое количество тепла выделяется при сгорании метана. Химическая формула метана — CH_4, поэтому его молярная масса $\mu = 12 + 1 \cdot 4 = 16$ г/моль. В сосуде находится 0,5 моль метана, то есть:

$$m = \nu\mu = 8 \text{ г} = 0{,}008 \text{ кг}.$$

Весь этот метан сгорает, поэтому выделится:

$$Q = qm = 400{,}8 \text{ кДж}.$$

Так как объём постоянен, всё тепло потратится на изменение внутренней энергии смеси газов:

$$U_1 + Q = U_2, \qquad (10.5.1)$$

где U_1 и U_2 — внутренняя энергия в начале и в конце процесса.

Внутренняя энергия газа находится по формуле:

$$U = \frac{i}{2}\nu RT,$$

где i — число степеней свободы газа. Согласно примечанию к условию задачи, $i = 5$ для кислорода и углекислого газа и $i = 6$ для метана и водяного пара.

В начальном состоянии в сосуде 0,5 молей многоатомного метана и 10 молей двухатомного кислорода. Внутренняя энергия:

$$U_1 = \frac{6}{2} \cdot 0{,}5RT_1 + \frac{5}{2} \cdot 10RT_1 = 26{,}5RT_1. \qquad (10.5.2)$$

В соответствии с уравнением реакции, в конце осталось:

1. 9 моль O_2 (так как задействованного в реакции кислорода в два раза больше задействованного метана, то есть 1 моль, осталось $10 - 1 = 9$),
2. 1 моль H_2O (так как образовавшегося водяного пара в два раза больше метана),
3. 0,5 моль CO_2 (аналогично H_2O):

$$U_2 = \frac{5}{2} \cdot 9RT_2 + \frac{6}{2}RT_2 + \frac{5}{2} \cdot 0{,}5RT_2 = 26{,}75RT_2. \qquad (10.5.3)$$

Подставляя формулы (10.5.2) и (10.5.3) в уравнение (10.5.1), получаем:

$$26{,}5RT_1 + Q = 26{,}75RT_2 \quad \Rightarrow \quad T_2 = \frac{26{,}5RT_1 + Q}{26{,}75R}.$$

Подставляя значения теплоты сгорания Q, начальной температуры T_1 и универсальной газовой постоянной R, получаем $T_2 \approx 2100$ К.

Примечание В случае, если значения молярной массы углерода и водорода не округлять до целых, возможны отклонение от ответа в пределах 1 %. Такие ответы также засчитывались жюри.

6) (4 балла) В мирно покоящийся на гладком столе деревянный брусок выстрелили очередью из пулемёта. После того как в него влетела первая пуля, брусок приобрёл скорость $V_1 = 4{,}1$ м/с, после второй пули — 8,1 м/с.
Какую скорость (в м/с) приобретёт брусок после того, как в нём окажутся все пули?
Примечание. В очереди десять пуль, все пули застряли в бруске.

Ответ: 36,9 м/с.

Решение. Пусть масса бруска M, масса пули m, скорость пули v. Тогда по закону сохранения импульса:

$$\begin{cases} mv = (M+m)v_1, \\ 2mv = (M+2m)v_2. \end{cases}$$

Разделим оба уравнения на m:

$$\begin{cases} v = \left(1+\frac{M}{m}\right)v_1, \\ 2v = \left(2+\frac{M}{m}\right)v_2. \end{cases} \tag{10.6.1}$$

Подставляем v из первого уравнения во второе:

$$2\left(1+\frac{M}{m}\right)v_1 = \left(2+\frac{M}{m}\right)v_2 \quad\Rightarrow\quad \frac{M}{m} = \frac{2(v_2-v_1)}{2v_1-v_2}.$$

Подставляя числа из условия, находим соотношение масс бруска и пули:

$$\frac{M}{m} = 80.$$

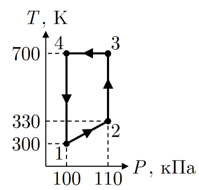
Подставляя это соотношение в первое уравнение из системы (10.6.1), находим скорость пули v:

$$v = 81v_1 = 332{,}1\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Для нахождения скорости бруска после десятой пули снова запишем закон сохранения импульса:

$$10mv = (M+10m)v_{10} \quad\Rightarrow\quad 10v = \left(10+\frac{M}{m}\right)v_{10} \quad\Rightarrow\quad v_{10} = \frac{10}{10+\frac{M}{m}}v = 36{,}9\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

7) (4 балла) Экспериментатор сконструировал микроскопическую тепловую машину и поместил в неё 0,02 моля идеального газа. Схематически термодинамический цикл этой машины изображён на рисунке.
Найдите работу, совершённую машиной за 1 цикл. Ответ дайте в джоулях, округлите до десятых. Допускается отклонение от точного ответа в пределах 0,1 Дж.



Ответ: 6,0, 6,1 или 6,2 Дж.

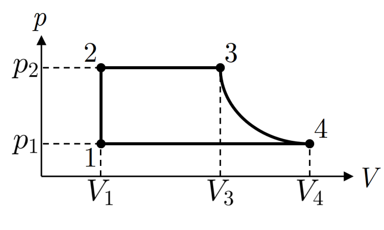
Решение. Переведём график цикла тепловой машины из координат (P,T) в координаты (P,V). Для нахождения объёма воспользуемся законом Менделеева-Клапейрона:

$$PV = \nu RT \quad\Rightarrow\quad V = \frac{\nu RT}{P},$$

где $\nu = 0{,}02$ моль — количество вещества газа, R — универсальная газовая постоянная.

Тогда наши точки:

$$(P_1,V_1) = 100\ \text{кПа},\ 0{,}499\ \text{л},$$
$$(P_2,V_2) = 110\ \text{кПа},\ 0{,}499\ \text{л},$$
$$(P_3,V_3) = 110\ \text{кПа},\ 1{,}058\ \text{л},$$
$$(P_4,V_4) = 100\ \text{кПа},\ 1{,}163\ \text{л}.$$

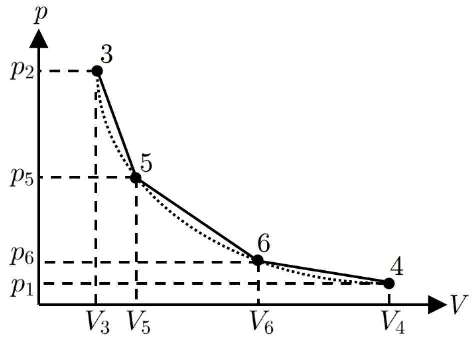


Заметим, что участок 1–2 — изохора, а значит, работа на нём равна 0.

Участки 2–3 и 4–1 — изобары, работа на них легко находится по формуле $A = P\Delta V$, поэтому:

$$A_{23} = 61{,}5\ \text{Дж}, \qquad A_{41} = -66{,}4\ \text{Дж}.$$

Участок 3–4 — изотерма. Работа равна площади под графиком $P(V)$. Для нахождения этой площади заменим график ломаной из нескольких отрезков и посчитаем площадь под этой ломаной (см. рисунок).



Координаты промежуточных точек:

$$(P_5, V_5) = 107 \text{ кПа}, \ 1{,}087 \text{ л},$$
$$(P_6, V_6) = 103 \text{ кПа}, \ 1{,}129 \text{ л}.$$

Работа на участке 3–4 (площадь под ломаной):

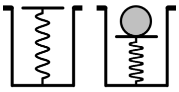
$$A_{34} = \frac{P_5 + P_3}{2}(V_5 - V_3) + \frac{P_5 + P_6}{2}(V_6 - V_5) + \frac{P_6 + P_4}{2}(V_4 - V_6) \approx 11{,}0 \text{ Дж}.$$

Общая работа за весь цикл:

$$A = A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41} = 6{,}1 \text{ Дж}.$$

Замечание. В силу возможных погрешностей при расчёте площади под графиком изотермы также принимаются ответы 6,0 Дж и 6,2 Дж.

8) **(4 балла)** Одна компания запатентовала устройство для ввода в игру шарика для пинг-понга. Оно представляет из себя крепящуюся к теннисному столу трубку с пружинкой с жёсткостью $k = 15$ Н/м, конец которой утоплен внутрь стола. Для старта раунда достаточно положить в трубку шарик и нажать на кнопку, чтобы отпустить пружину. На какую высоту (в сантиметрах) от стола подлетит шарик массой $m = 3$ г и диаметром $d = 4$ см? В спокойном состоянии верхняя часть пружины находится на одном уровне со столом.



Примечание. Высоту считайте от стола до нижней точки шарика. Трение о воздух и массу пружинки не учитывайте.

Ответ: 36 сантиметров.

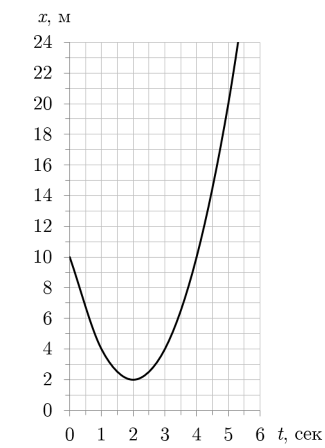
Решение. При распрямлении пружины её энергия перешла в кинетическую энергию шарика, а она, в свою очередь, в потенциальную энергию поднятого тела. Запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{kx^2}{2} = mgh \quad \Rightarrow \quad h = \frac{kx^2}{2mg} = 40 \text{ см}.$$

При этом высота считается от начального положения шарика, то есть на 4 см ниже поверхности стола. Тогда высота относительно поверхности равна 36 см.

9) **(4 балла)** Одним из навыков, отрабатываемых на курсах экстремального вождения автомобиля, является «торможение двигателем», когда число оборотов двигателя становится меньше числа оборотов самих колёс. Наиболее опасным считается такое торможение с использованием задней передачи (то есть машина едет вперёд, а двигатель крутит колёса назад) — в этом случае для уменьшения вероятности заноса рекомендуется сохранять постоянным ускорение автомобиля.

На рисунке представлен график зависимости координаты автомобиля от времени. Найдите ускорение, если водителю удалось сохранять его постоянным в течение всего манёвра. Ответ дайте в м/с^2.



Ответ: 4 м/с^2.

Решение. В конце второй секунды скорости автомобиля равна нулю. За это время он проехал 8 метров. Запишем формулу для нахождения пути при равноускоренном движении:

$$S = \frac{v_0 + v_1}{2} t,$$

где v_0 — начальная скорость, а v_1 — конечная.

$$S = \frac{v_0 + 0}{2} t \quad \Rightarrow \quad v_0 = 8 \ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

За 2 с скорость тела изменилась с 8 м/с до нуля. Значит, ускорение тела:

$$a = \frac{8}{2} = 4\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Другое решение. Запишем уравнение равноускоренного движения:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2},$$

где $x_0 = 10$ м.

Возьмём две любые точки на графике (здесь и далее мы не указываем размерность величин, по умолчанию имея в виду систему СИ):

$$\begin{cases} t_1 = 1,\ x_1 = 4; \\ t_2 = 2,\ x_2 = 2. \end{cases}$$

Получаем систему:

$$\begin{cases} 4 = 10 + v_0 \cdot 1 + \frac{a \cdot 1^2}{2} \\ 2 = 10 + v_0 \cdot 2 + \frac{a \cdot 2^2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 0 = 6 + v_0 + \frac{a}{2} \\ 0 = 8 + 2v_0 + 2a \end{cases}$$

Умножаем первое уравнение системы на 2 и вычитаем первое из второго:

$$0 = -4 + a \quad \Rightarrow \quad a = 4\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

10) (4 балла) Во время подготовки к битве против Саурона разведчики Гондора донесли, что орки начали использовать неизвестное ранее электрическое оружие, поэтому король Эльдарион распорядился создать новую кольчугу, для которой требуется 300 ярдов металлической «проволоки» общим сопротивлением не более 4 феаноров.

Из чего выгоднее её делать (и сколько это будет стоить для одного человека), если в распоряжении у Гондора есть 4 металла: мифрил, итильдин, тилкал и галворн, характеристики которых указаны справа? Ответ дайте в кастарах, округлив до целых.

Металл	Плотность	Удел. сопротивление	Цена
	фунт/ярд^3	10^{-6} феанор · ярд	кастар/фунт
мифрил	150	0,6	131,5
итильдин	245	0,9	135,2
тилкал	710	6,2	2,5
галворн	780	7,5	2,3

Ответ: 248 кастаров.

Решение. Пусть q — удельное сопротивление материала, ρ — его плотность, а k — цена. Определим стоимость P необходимого куска проволоки.

Известно, что сопротивление проволоки зависит от её удельного сопротивления, длины и площади сечения:

$$R = \frac{qL}{S}.$$

По условию, длина проволоки L, а максимальное разрешённое сопротивление R, отсюда находим минимально возможную площадь сечения:

$$S = \frac{\rho L}{R}.$$

Тогда объём, масса и стоимость проволоки:

$$V = SL = \frac{qL^2}{R}, \qquad m = \kappa V = \frac{\rho q L^2}{R}, \qquad P = km = \frac{k\rho q L^2}{R}.$$

Так как L и R всегда одинаковы, для минимизации стоимости кольчуги необходимо подобрать материал с минимальным произведением цены, удельного сопротивления и плотности:

$$\beta = \rho q c.$$

Посчитаем β для каждого из четырёх материалов:

Металл	$\boldsymbol{\beta}$ $\left(10^{-6}\ \frac{\text{кастар}\cdot\text{феанор}}{\text{ярд}^2}\right)$
мифрил	11835
итильдин	29812
тилкал	11005
галворн	13455

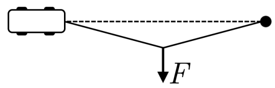
Наиболее выгодным материалом оказывается тилкал. Осталось вычислить стоимость проволоки:

$$P = \frac{\beta L^2}{R} \approx 248 \text{ кастаров.}$$

Физическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2019–2020 учебный год. Отборочный этап

Задачи для 11 класса

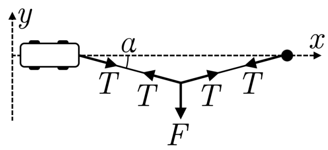
1) (10 баллов) Чтобы вытащить машину из канавы, водитель использует трос жёсткостью $k = 100000$ Н/м и длиной $L = 8$ м. Он натянул его между машиной и деревом, а сам потянул за середину троса так, как показано на рисунке. Какую силу ему надо приложить к тросу, чтобы вытащить машину? Известно, что для того, чтобы вытащить машину без троса, требуется приложить усилие $F_0 = 1000$ Н. Ответ дайте в ньютонах, округлите до целых.



Ответ: 100 ньютонов.

Решение. Пусть α — угол между натянутым тросом и прямой, соединяющей машину и дерево. Тогда новая длина троса:

$$L_{\text{кон}} = \frac{L}{\cos\alpha},$$



а сила натяжения:

$$T = k\Delta L = k\left(\frac{L}{\cos\alpha} - L\right) = kL\frac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha}. \tag{11.1.1}$$

Для того, чтобы вытащить машину из канавы, необходимо приложить силу F_0 вдоль оси x:

$$F_0 = T\cos\alpha \quad\Rightarrow\quad F_0 = kL\frac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha}\cos\alpha \quad\Rightarrow\quad 1-\cos\alpha = \frac{F_0}{kL}. \tag{11.1.2}$$

Запишем условие равновесия для точки изгиба троса в проекции на ось y:

$$F = 2T\sin\alpha. \tag{11.1.3}$$

Подставляем уравнения (11.1.1) и (11.1.2) в уравнение (11.1.3):

$$F = 2kL\frac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha}\sin\alpha = 2kL\cdot\frac{F_0}{kL}\operatorname{tg}\alpha = 2F_0\operatorname{tg}\alpha. \tag{11.1.4}$$

Отметим, что

$$1-\cos\alpha = \frac{F_0}{kL} = 0{,}00125$$

близко к 0. Значит, $\cos\alpha$ близок к единице, а сам угол малый. У малых углов

$$\alpha \approx \sin\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha \quad\Rightarrow\quad \cos\alpha\approx 1 \quad\Rightarrow\quad 1-\cos\alpha = \frac{1-\cos^2\alpha}{1+\cos\alpha} \approx \frac{\sin^2\alpha}{2} \approx \frac{\alpha^2}{2} \tag{11.1.5}$$

(здесь и далее величина угла дана в радианах).

Подставляем (11.1.5) в (11.1.2), получаем:

$$\frac{\alpha^2}{2} = \frac{F_0}{kL} \quad\Rightarrow\quad \alpha = \sqrt{\frac{2F_0}{kL}}.$$

Подставляем полученное выражение в уравнение (11.1.4):

$$F = 2F_0\operatorname{tg}\alpha = 2F_0\alpha = 2F_0\sqrt{\frac{2F_0}{kL}}$$

Подставляя числа из условия, находим $F = 100$ Н.

Замечание. Уравнение (11.1.2) можно было решить и в явном виде:

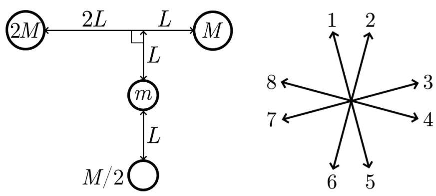
$$1-\cos\alpha = \frac{F_0}{kL} \quad\Rightarrow\quad \cos\alpha = 1-\frac{F_0}{kL} = 0{,}99875.$$

Так как $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$, уравнение (11.1.4) можно переписать:

$$F = 2F_0\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha},$$

откуда, подставляя числа, получаем $F \approx 100{,}09$ Н.

2) **(10 баллов)** Лаборатория имени экспериментатора Глюка проводит космический эксперимент по изучению гравитационного взаимодействия. Три больших шара закрепили неподвижно, а маленький поместили в начальную точку и отпустили (см.рисунок).



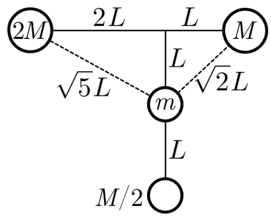
В какую сторону он начнёт двигаться (выберите вариант из предложенных на рисунке)?

Примечание. Шары взаимодействуют только гравитационно.

Ответ: 1.

Решение. По теореме Пифагора найдём расстояния от маленького шара до каждого из трёх больших:

$$L_1 = L\sqrt{5}, \qquad L_2 = L\sqrt{2}, \qquad L_3 = L.$$



Рассмотрим силы, действующие на маленький шар. Для упрощения записи введём обозначение:

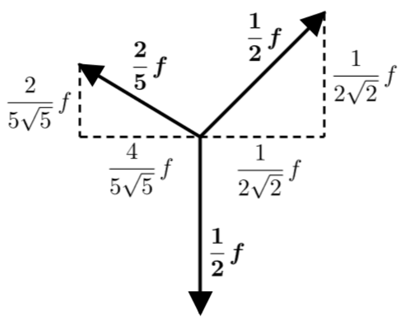
$$f = \frac{GMm}{L^2}.$$

Тогда:

$$f_1 = \frac{G\cdot 2Mm}{(L\sqrt{5})^2} = \frac{2}{5}\frac{GMm}{L^2} = \frac{2}{5}f,$$
$$f_2 = \frac{GMm}{(L\sqrt{2})^2} = \frac{1}{2}\frac{GMm}{L^2} = \frac{1}{2}f,$$
$$f_3 = \frac{G\frac{M}{2}m}{L^2} = \frac{1}{2}\frac{GMm}{L^2} = \frac{1}{2}f.$$

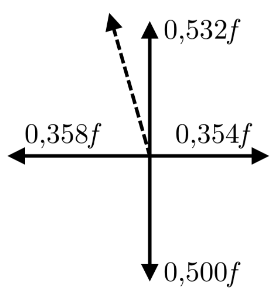
Спроецируем эти силы на оси x и y, направив оси влево и вверх:

$$f_{1_x} = -f_1\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{4}{5\sqrt{5}}f,$$
$$f_{1_y} = f_1\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{2}{5\sqrt{5}}f,$$
$$f_{2_x} = f_2\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}f,$$
$$f_{2_y} = f_2\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}f,$$
$$f_{3_y} = -f_3 = -\frac{1}{2}f.$$



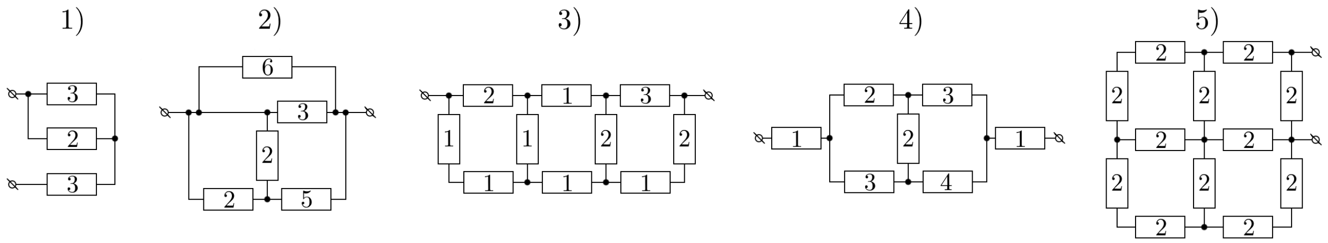
Посчитаем каждую из проекций с точностью до трёх знаков и найдём их сумму:

$$f_x = f_{1_x} + f_{2_x} = -0{,}358f + 0{,}354f = -0{,}004f,$$
$$f_y = f_{1_y} + f_{2_y} + f_{3_y} = 0{,}179f + 0{,}354f - 0{,}500f = 0{,}033f.$$



Таким образом, сила направлена вверх и влево, причём её вертикальная проекция значительно больше горизонтальной, то есть верный вариант — первый.

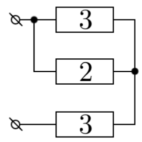
3) **(10 баллов)** Расположите приведённые схемы в порядке увеличения общего сопротивления.
В ответе укажите цифры в нужном порядке в виде пятизначного числа (то есть без пробелов и запятых).



Ответ: 52314.

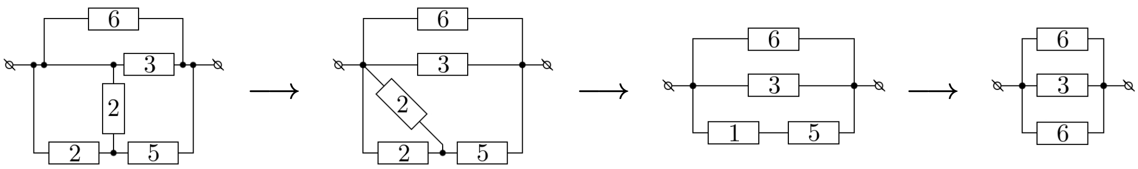
Решение. Вычислим общее сопротивление каждой схемы.

1 схема. Цепь состоит из параллельно подключённых R_1 и R_2 и последовательно подключенного к ним R_3:



$$R_{1_{\text{общ}}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3 = \frac{3 \cdot 2}{3+2} + 3 = 4{,}2 \text{ Ом}.$$

2 схема. Перерисуем схему:



Все три резистора соединены параллельно:

$$\frac{1}{R_{2_{\text{общ}}}} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} \text{ Ом}^{-1} \quad \Rightarrow \quad R_{2_{\text{общ}}} = 1{,}5 \text{ Ом}.$$

Схема 3. Перерисуем схему:

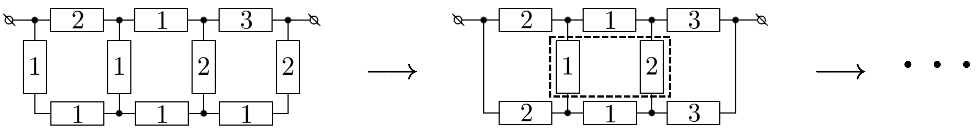
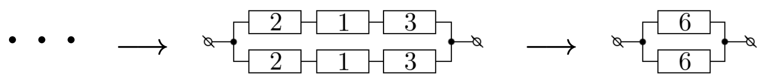
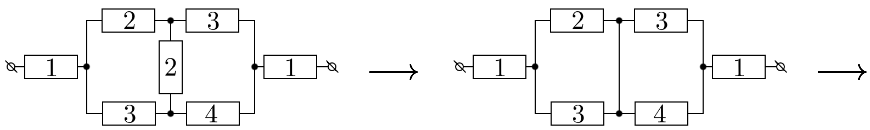


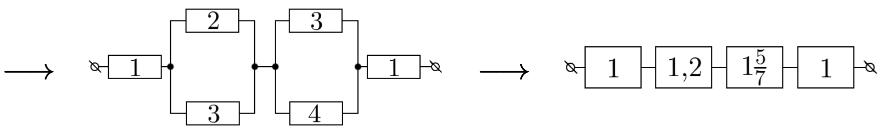
Схема симметрична, следовательно, ток не течёт через отмеченные резисторы. Их можно удалить, и сопротивление не изменится.



$$R_{3_{\text{общ}}} = 3 \text{ Ом}.$$

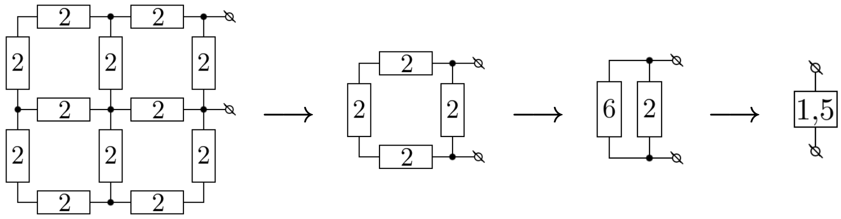
Схема 4. Не будем искать точное значение сопротивления, а сделаем оценку сверху. Если заменить один из резисторов проводом, то общее сопротивление может только уменьшиться (точно не увеличиться).





$$R_{4_{\text{общ}}} > 4{,}2 \text{ Ом} = R_{1_{\text{общ}}}.$$

Схема 5. Снова сделаем оценку сопротивления, на этот раз снизу. Если убрать часть резисторов, подключённых параллельно другому участку цепи, сопротивление увеличится (точно не уменьшится).



Следовательно,

$$R_{5_{\text{общ}}} < 1{,}5\ \text{Ом} = R_{2_{\text{общ}}}.$$

Итого, схемы по возрастанию сопротивления расположены так:

$$R_{5_{\text{общ}}} < R_{2_{\text{общ}}} < R_{3_{\text{общ}}} < R_{1_{\text{общ}}} < R_{4_{\text{общ}}}.$$

4) (10 баллов) В теплоизолированном сосуде постоянного объёма в начальный момент находятся $\nu_1 = 0{,}5$ молей метана и $\nu_2 = 10$ молей кислорода при температуре $T_0 = 300$ К. Подана искра. Найдите, какая установится температура, когда весь метан сгорит. Ответ дайте в кельвинах, округлив до целых.

Примечание. Удельная теплота сгорания метана — 50,1 МДж/кг. Уравнение реакции горения: $CH_4 + 2O_2 \to 2H_2O + CO_2$. Атомы в молекуле углекислого газа выстроены вдоль одной прямой, поэтому CO_2 ведёт себя как двухатомная молекула. Газы считайте идеальными.

Ответ: 2100 К.

Решение. Посчитаем, какое количество тепла выделяется при сгорании метана. Химическая формула метана — CH_4, поэтому его молярная масса $\mu = 12 + 1 \cdot 4 = 16$ г/моль. В сосуде находится 0,5 моль метана, то есть:

$$m = \nu\mu = 8\ \text{г} = 0{,}008\ \text{кг}.$$

Весь этот метан сгорает, поэтому выделится:

$$Q = qm = 400{,}8\ \text{кДж}.$$

Так как объём постоянен, всё тепло потратится на изменение внутренней энергии смеси газов:

$$U_1 + Q = U_2, \tag{11.4.1}$$

где U_1 и U_2 — внутренняя энергия в начале и в конце процесса.

Внутренняя энергия газа находится по формуле:

$$U = \frac{i}{2}\nu RT,$$

где i — число степеней свободы газа. Согласно примечанию к условию задачи, $i = 5$ для кислорода и углекислого газа и $i = 6$ для метана и водяного пара.

В начальном состоянии в сосуде 0,5 молей многоатомного метана и 10 молей двухатомного кислорода. Внутренняя энергия:

$$U_1 = \frac{6}{2} \cdot 0{,}5RT_1 + \frac{5}{2} \cdot 10RT_1 = 26{,}5RT_1. \tag{11.4.2}$$

В соответствии с уравнением реакции, в конце осталось:

1. 9 моль O_2 (так как задействованного в реакции кислорода в два раза больше задействованного метана, то есть 1 моль, осталось $10 - 1 = 9$),
2. 1 моль H_2O (так как образовавшегося водяного пара в два раза больше метана),
3. 0,5 моль CO_2 (аналогично H_2O):

$$U_2 = \frac{5}{2} \cdot 9RT_2 + \frac{6}{2}RT_2 + \frac{5}{2} \cdot 0{,}5RT_2 = 26{,}75RT_2. \tag{11.4.3}$$

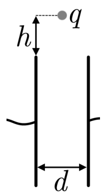
Подставляя формулы (11.4.2) и (11.4.3) в уравнение (11.4.1), получаем:

$$26{,}5RT_1 + Q = 26{,}75RT_2 \quad \Rightarrow \quad T_2 = \frac{26{,}5RT_1 + Q}{26{,}75R}.$$

Подставляя значения теплоты сгорания Q, начальной температуры T_1 и универсальной газовой постоянной R, получаем $T_2 \approx 2100$ К.

Примечание В случае, если значения молярной массы углерода и водорода не округлять до целых, возможны отклонение от ответа в пределах 1 %. Такие ответы также засчитывались жюри.

5) **(10 баллов)** Шарик массой $m = 10$ мг и зарядом $q = 2$ нКл падает с высоты $h = 1{,}25$ см точно в середину конденсатора с вертикальными пластинами. На конденсатор подано напряжение $U = 50$ В, обкладки конденсатора представляют из себя квадраты с длиной стороны $L = 3{,}75$ см.



При каком минимальном расстоянии d между обкладками шарик успеет пролететь сквозь конденсатор? Ответ дайте в миллиметрах.

Примечание. Размерами шарика и сопротивлением воздуха пренебрегите.

Ответ: 5 миллиметров.

Решение. Сначала определим промежуток времени t, за который частица пролетает сквозь конденсатор:

$$t = t_2 - t_1,$$

где t_2 — время от начала полета до прохождения нижней границы конденсатора, t_1 — от начала полета до прохождения верхней границы конденсатора. По вертикали частица движется с ускорением g, поэтому:

$$\left.\begin{aligned} \frac{gt_1^2}{2} = h \quad &\Rightarrow \quad t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} \\ \frac{gt_2^2}{2} = L + h \quad &\Rightarrow \quad t_2 = \sqrt{\frac{2(L+h)}{g}} \end{aligned}\right| \Longrightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2(L+h)}{g}} - \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Подставив числа из условия, найдём:

$$t = 0{,}05 \text{ с}.$$

Рассмотрим, на какое расстояние x по горизонтали частица отклонится за это время. Вдоль оси x на неё действует единственная сила — электростатическая:

$$F_x = qE,$$

где q — заряд частицы, а E — напряжённость электрического поля между пластинами конденсатора. Поле между пластинами конденсатора однородно, следовательно:

$$E = \frac{U}{d} \quad \Rightarrow \quad F_x = \frac{qU}{d}.$$

По второму закону Ньютона ускорение частицы вдоль горизонтальной оси:

$$a = \frac{F_x}{m} = \frac{qU}{dm}.$$

Так как начальная горизонтальная скорость частицы 0, её перемещение вдоль оси x:

$$x = \frac{at^2}{2} = \frac{qUt^2}{2dm}.$$

Чтобы шарик пролетел сквозь конденсатор, не успев коснуться пластин, необходимо, чтобы смещение частицы вдоль горизонтальной оси было меньше, чем половина расстояния между пластинами конденсатора:

$$x < \frac{d}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{qUt^2}{2dm} < \frac{d}{2} \quad \Rightarrow \quad d > \sqrt{\frac{qUt^2}{m}}.$$

Подставляя числа из условия, найдём минимальное подходящее $d = 5$ мм.

6) (4 балла) В мирно покоящийся на гладком столе деревянный брусок выстрелили очередью из пулемёта. После того как в него влетела первая пуля, брусок приобрёл скорость $V_1 = 4{,}1$ м/с, после второй пули — 8,1 м/с.

Какую скорость (в м/с) приобретёт брусок после того, как в нём окажутся все пули?

Примечание. В очереди десять пуль, все пули застряли в бруске.

Ответ: 36,9 м/с.

Решение. Пусть масса бруска M, масса пули m, скорость пули v. Тогда по закону сохранения импульса:

$$\begin{cases} mv = (M+m)v_1, \\ 2mv = (M+2m)v_2. \end{cases}$$

Разделим оба уравнения на m:

$$\begin{cases} v = \left(1 + \frac{M}{m}\right) v_1, \\ 2v = \left(2 + \frac{M}{m}\right) v_2. \end{cases} \tag{11.6.1}$$

Подставляем v из первого уравнения во второе:

$$2\left(1 + \frac{M}{m}\right) v_1 = \left(2 + \frac{M}{m}\right) v_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{M}{m} = \frac{2(v_2 - v_1)}{2v_1 - v_2}.$$

Подставляя числа из условия, находим соотношение масс бруска и пули:

$$\frac{M}{m} = 80.$$

Подставляя это соотношение в первое уравнение из системы (11.6.1), находим скорость пули v:

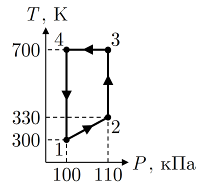
$$v = 81 v_1 = 332{,}1\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Для нахождения скорости бруска после десятой пули снова запишем закон сохранения импульса:

$$10mv = (M+10m)v_{10} \quad \Rightarrow \quad 10v = \left(10 + \frac{M}{m}\right) v_{10} \quad \Rightarrow \quad v_{10} = \frac{10}{10 + \frac{M}{m}} v = 36{,}9\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

7) (4 балла) Экспериментатор сконструировал микроскопическую тепловую машину и поместил в неё 0,02 моля идеального газа. Схематически термодинамический цикл этой машины изображён на рисунке.

Найдите работу, совершённую машиной за 1 цикл. Ответ дайте в джоулях, округлите до десятых. Допускается отклонение от точного ответа в пределах 0,1 Дж.



Ответ: 6,0, 6,1 или 6,2 Дж.

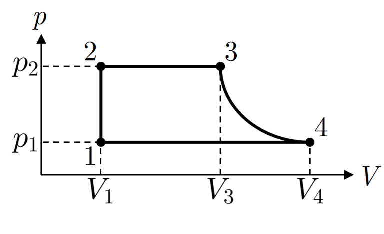
Решение. Переведём график цикла тепловой машины из координат (P,T) в координаты (P,V). Для нахождения объёма воспользуемся законом Менделеева-Клапейрона:

$$PV = \nu RT \quad \Rightarrow \quad V = \frac{\nu RT}{P},$$

где $\nu = 0{,}02$ моль — количество вещества газа, R — универсальная газовая постоянная.

Тогда наши точки:

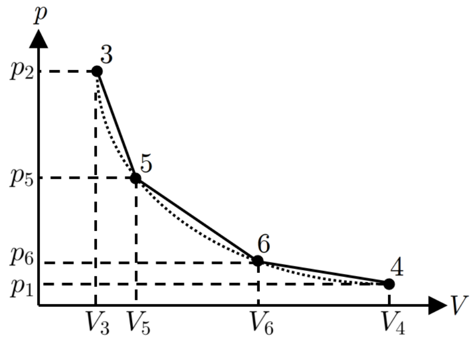
$$(P_1,V_1) = 100\ \text{кПа},\ 0{,}499\ \text{л},$$
$$(P_2,V_2) = 110\ \text{кПа},\ 0{,}499\ \text{л},$$
$$(P_3,V_3) = 110\ \text{кПа},\ 1{,}058\ \text{л},$$
$$(P_4,V_4) = 100\ \text{кПа},\ 1{,}163\ \text{л}.$$



Заметим, что участок 1–2 — изохора, а значит, работа на нём равна 0.

Участки 2–3 и 4–1 — изобары, работа на них легко находится по формуле $A = P\Delta V$, поэтому:

$$A_{23} = 61{,}5\ \text{Дж}, \qquad A_{41} = -66{,}4\ \text{Дж}.$$



Участок 3–4 — изотерма. Работа равна площади под графиком $P(V)$. Для нахождения этой площади заменим график ломаной из нескольких отрезков и посчитаем площадь под этой ломаной (см. рисунок).

Координаты промежуточных точек:

$$(P_5,V_5) = 107 \text{ кПа, } 1{,}087 \text{ л},$$
$$(P_6,V_6) = 103 \text{ кПа, } 1{,}129 \text{ л}.$$

Работа на участке 3–4 (площадь под ломаной):

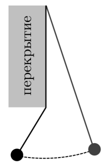
$$A_{34} = \frac{P_5 + P_3}{2}(V_5 - V_3) + \frac{P_5 + P_6}{2}(V_6 - V_5) + \frac{P_6 + P_4}{2}(V_4 - V_6) \approx 11{,}0 \text{ Дж}.$$

Общая работа за весь цикл:

$$A = A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41} = 6{,}1 \text{ Дж}.$$

Замечание. В силу возможных погрешностей при расчёте площади под графиком изотермы также принимаются ответы 6,0 Дж и 6,2 Дж.

8) **(4 балла)** Невесомую нерастяжимую нить с привязанным к её нижнему концу шариком подвесили к верхнему краю перекрытия. Длина нити — 3,6 м, толщина перекрытия — 2 м, масса шарика — 500 г.
Найдите период малых колебаний системы. Ответ дайте в секундах.



Ответ: 3,14 секунд.

Решение. Период малых колебаний обычного маятника вычисляется по формуле:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}.$$

Заметим, что колебания обычного маятника полностью симметричны, значит в левой половине он находится ровно столько же времени, сколько в правой, то есть время между последовательными проходами через нижнее положение:

$$T' = \pi\sqrt{\frac{L}{g}}.$$

Наша система в правой половине ведёт себя, как маятник с длиной нити 3,6 м, а в левой — как маятник с длиной нити 1,6 м. То есть проходя через нижнее положение влево, шарик вернётся через

$$T_{\text{л}} = \pi\sqrt{\frac{3{,}6}{10}} = 0{,}6\pi \text{ с},$$

а проходя через нижнее положение вправо, через

$$T_{\text{п}} = \pi\sqrt{\frac{1{,}6}{10}} = 0{,}4\pi \text{ с}.$$

Общий период колебаний:

$$T = T_{\text{п}} + T_{\text{л}} = 3{,}14 \text{ с}.$$

9) **(4 балла)** В лаборатории создано однородное электрическое поле напряжённостью $E = 100$ В/м, направленное вдоль оси x, и однородное магнитное поле индукцией $B = 20$ мТл, направленное вдоль оси y. Напряжённость гравитационного поля направлена вдоль оси z и равна $g = 1{,}6$ Н/кг. Из начала координат в установку влетает частица зарядом $q = 3{,}2 \cdot 10^{-19}$ Кл и массой $m = 8{,}96 \cdot 10^{-26}$ кг. Проекции начальной скорости частицы на оси координат равны $V_x = 305$ м/с, $V_y = 320$ м/с и $V_z = 405$ м/с.
Найдите координату y через 10^{-3} с после начала опыта. Ответ дайте в метрах.

Ответ: 0,32 метра.

Решение. Заметим, что ни одно из трёх полей не создаёт силы, направленной вдоль оси y. Гравитационное и электрическое поле направлены перпендикулярно этой оси. Магнитное поле направлено вдоль оси y, следовательно, сила Лоренца также направлена перпендикулярно к ней. Поэтому V_y не меняется. Координата равна:

$$V_y \cdot t = 320 \cdot 10^{-3} = 0{,}32 \text{ м.}$$

10) (4 балла) Любитель экспериментальной физики решил собрать колебательный контур. Он обнаружил, что в школьной лаборатории есть только три конденсатора и три катушки. Ёмкости конденсаторов $C_1 = 1$ нФд, $C_2 = 2$ нФд и $C_3 = 0{,}4$ нФд. Индуктивности катушек $L_1 = 2$ мГн, $L_2 = 10$ мГн, $L_3 = 2{,}5$ мГн. Подумав, он решил собрать колебательный контур с минимальным периодом колебаний.
Каким будет этот период? Ответ дайте в микросекундах.

Ответ: 3,14 мкс.

Решение. Период колебаний выражается формулой

$$T = 2\pi\sqrt{LC}. \tag{11.10.1}$$

Для минимизации периода колебаний необходимо минимизировать ёмкость и индуктивность.

Для минимизации ёмкости все три конденсатора необходимо подключить последовательно. В этом случае общая ёмкость находится по формуле:

$$\frac{1}{C_{\text{общ}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} = \frac{1}{10^{-9}} + \frac{1}{2\cdot 10^{-9}} + \frac{1}{0{,}4\cdot 10^{-9}} = 4\cdot 10^9 \text{ Фд}^{-1} \quad \Rightarrow \quad C_{\text{общ}} = 2{,}5\cdot 10^{-10} \text{ Фд.}$$

Для минимизации индуктивности три катушки подключим параллельно. Тогда

$$\frac{1}{L_{\text{общ}}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} = \frac{1}{2\cdot 10^{-3}} + \frac{1}{10\cdot 10^{-3}} + \frac{1}{2{,}5\cdot 10^{-3}} = 10^3 \text{ Гн}^{-1} \quad \Rightarrow \quad L_{\text{общ}} = 10^{-3} \text{ Гн.}$$

Подставляя $C_{\text{общ}}$ и $L_{\text{общ}}$ в формулу (11.10.1), получаем:

$$T = 3{,}14\cdot 10^{-6} \text{ с} = 3{,}14 \text{ мкс.}$$