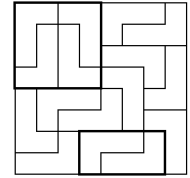




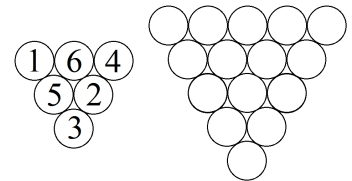
Задачі для 5–6 класів

1. На рисунку зображено квадрат 8×8 , розрізаний на L-тетраміно (чотириклітинні фігурки у формі літери L). При цьому деякі з них утворюють менші прямокутники (два такі прямокутники виділено на рисунку). Чи можна розрізати квадрат 8×8 на L-тетраміно так, щоб менші прямокутники не утворювалися? (А. Теслер)

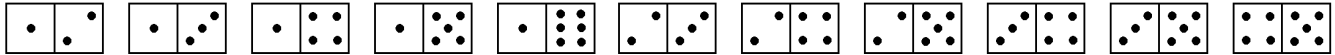


2. Петрик пише поему. У перший день він написав перші декілька рядків, а кожного наступного дня дописував на один рядок більше, ніж дописав у попередній день (наприклад, якщо в перший день він написав 3 рядки, то наприкінці другого дня поема містила 7 рядків, а наприкінці третього — 12).
- а) Чи може наприкінці якогось дня (не першого) кількість рядків в поемі закінчуватися цифрою 4?
б) Чи може наприкінці якогось дня (не першого) кількість рядків у поемі закінчуватися цифрою 4, а наприкінці якогось із наступних днів — цифрою 7? (І. Туманова)

3. Назвемо розташування чисел милим, якщо кожне число дорівнює різниці двох, що стоять над ним. Наприклад, на малюнку зліва показано миле розташування чисел від 1 до 6. Придумайте миле розташування чисел від 1 до 15 (кожне з них має використовуватися рівно один раз, утворюючи фігуру, намальовану праворуч). (А. Р. Араб)



4. Петрик і Василько грають в наступну гру. У них є шоколадка 2019×2020 клітин; кожним ходом гравець ламає її на два прямокутники, що складаються з клітин, і з'їдає один з них. Починає гру Петрик, далі ходять по черзі. Перемагає гравець, після ходу якого периметр шоколадки стане рівно 10. Хто з гравців може виграти за будь-якої гри суперника? Як йому треба для цього діяти? (О. А. Пайве)
5. Дано набір кісток доміно, зображений на рисунку.



- а) Чи можна скласти з них усіх ланцюжок за правилами доміно?
б) Чи можна прибрати одну кістку з набору так, щоб з усіх інших не можна було зробити ланцюжок? (А. Теслер)
6. На одному острові живуть чотири типи людей: лицарі (всі їхні твердження істинні), брехуни (всі їхні твердження неправдиві), звичайні люди (можуть говорити все що завгодно) і бояки (взагалі не роблять жодних тверджень). Одного разу зібралися кілька людей, і кожен з них вимовив одну з наступних фраз: «Хто ви?», «Я лицар», «Я брехун», «Я звичайний», «Я бояка». Кожну фразу сказали рівно 10 осіб. Чи можуть лицарі виявитися найчисленнішим типом людей у цій компанії? (А. Теслер)
7. **Тільки для 5 класу.** Дано три посудини. Перша посудина наповнена водою, а друга і третя порожні. О 12:00 з першої посудини починає литися вода в другу і третю, причому щохвилини в другу посудину надходить 2 літри, а в третю 4 літри. О 13:00 об'єм води в першій і другій посудинах зрівнявся. О котрій годині перша посудина спорожніє? (А. Теслер)

Тільки для 6 класу. У магазині є три сорти чаю: зелений, чорний і фруктовий. Спочатку кількості пачок різних сортів відносилися як $4 : 5 : 8$. Після тижня продажів і нової поставки це співвідношення змінилося і стало $5 : 7 : 12$. Відомо, що кількість пачок фруктового чаю зросла на 60%, а зеленого збільшилася не більше, ніж на 20 пачок. Скільки всього пачок чаю було в магазині спочатку? (Л. С. Корешкова)

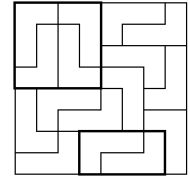
- Термін проведення відбіркового туру олімпіади — з **15 жовтня по 12 листопада включно**. Призерів відбіркового етапу буде запрошено на заключний етап, що проходить у січні-лютому 2020 року.
- Пам'ятайте, що в більшості завдань потрібна не тільки відповідь, але й повне її обґрунтування.
- Олімпіадні роботи приймаються в електронному вигляді (допустимі як текстові файли, так і відскановані копії паперових робіт). Докладніше див. на сайті formulo.org.
- У роботі не повинні міститися особисті дані учасника, тобто **підписувати роботу не слід**.
- Роботи з ознаками списування та колективної творчості розглядатися не будуть.



Міжнародна математична олімпіада
«Формула Єдності» / «Третє тисячоліття»
2019–2020 навчальний рік. Відбірковий етап

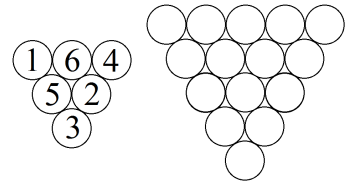
Задачі для 7 класу

1. На рисунку зображено квадрат 8×8 , розрізаний на L-тетраміно (чотириклітинні фігурки у формі літери L). При цьому деякі з них утворюють менші прямокутники (два такі прямокутники виділено на рисунку). Чи можна розрізати квадрат 8×8 на L-тетраміно так, щоб менші прямокутники не утворювалися? (А. Теслер)



2. Петрик пише поему. У перший день він написав перші декілька рядків, а кожного наступного дня дописував на один рядок більше, ніж дописав у попередній день (наприклад, якщо в перший день він написав 3 рядки, то наприкінці другого дня поема містила 7 рядків, а наприкінці третього — 12).
- а) Чи може наприкінці якогось дня (не першого) кількість рядків в поемі закінчуватися цифрою 4?
б) Чи може наприкінці якогось дня (не першого) кількість рядків у поемі закінчуватися цифрою 4, а наприкінці якогось із наступних днів — цифрою 7? (И. Туманова)

3. Назвемо розташування чисел милем, якщо кожне число дорівнює різниці двох, що стоять над ним. Наприклад, на малюнку зліва показано миле розташування чисел від 1 до 6. Придумайте миле розташування чисел від 1 до 15 (кожне з них має використовуватися рівно один раз, утворюючи фігуру, намальовану праворуч). (А. Р. Араб)



4. У магазині є три сорти чаю: зелений, чорний і фруктовий. Спочатку кількості пачок різних сортів відносилися як $4 : 5 : 8$. Після тижня продажів і нової поставки це співвідношення змінилося і стало $5 : 7 : 12$. Відомо, що кількість пачок фруктового чаю зросла на 60%, а зеленого збільшилася не більше, ніж на 20 пачок. Скільки всього пачок чаю було в магазині спочатку? (Л. С. Корешкова)
5. Є два резервуари, кожен із яких вміщує 2020 м^3 води. Опівночі в першому резервуарі 100 м^3 води, а в другому 2020 м^3 . У перший резервуар щогодини надходить 110 м^3 води (поки він не заповниться), а з другого щогодини викачують 50 м^3 (поки він не спорожніє). У які моменти часу різниця між об'ємами води в резервуарах становитиме половину початкової? (И. Ж. Ибатуллин)
6. У Гаррі Поттера є коробка розміру $10 \times 10 \times 10$ сантиметрів і чарівний апарат. Якщо помістити коробку в апарат, то один з її вимірів (довжина, ширина або висота) збільшується на 50%, а кожен із двох інших зменшується на 20%. Чи може у Гаррі після декількох застосувань апарату вийти коробка $20 \times 20 \times 20$ сантиметрів? (А. Теслер)
7. На одному острові живуть чотири типи людей: лицарі (всі їхні твердження істинні), брехуни (всі їхні твердження неправдиві), звичайні люди (можуть говорити все що завгодно) і бояки (взагалі не роблять жодних тверджень). Одного разу зібралися кілька людей, і кожен з них вимовив одну з наступних фраз: «Хто ви?», «Я лицар», «Я брехун», «Я звичайний», «Я бояка». Кожну фразу сказали рівно 6 осіб. Відомо, що людей усіх типів була різна і ненульова кількість. Найбільше було лицарів. А скільки саме? (Знайдіть усі можливі варіанти відповіді на це питання і доведіть, що інших немає.) (А. Теслер)

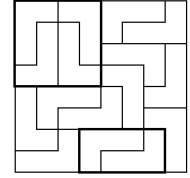
- Термін проведення відбіркового туру олімпіади — з **15 жовтня по 12 листопада включно**. Призерів відбіркового етапу буде запрошено на заключний етап, що проходить в січні-лютому 2020 року.
- Пам'ятайте, що в більшості завдань потрібна не тільки відповідь, але й повне її обґрунтування.
- Олімпіадні роботи приймаються в електронному вигляді (допустимі як текстові файли, так і відскановані копії паперових робіт). Докладніше див. на сайті formulo.org.
- У роботі не повинні міститися особисті дані учасника, тобто **підписувати роботу не слід**.
- Роботи з ознаками списування та колективної творчості розглядатися не будуть.



Міжнародна математична олімпіада
«Формула Єдності» / «Третє тисячоліття»
2019–2020 навчальний рік. Відбірковий етап

Задачі для 8 класу

1. На рисунку зображено квадрат 8×8 , розрізаний на L-тетраміно (чотириклітинні фігурки у формі літери L). При цьому деякі з них утворюють менші прямокутники (два такі прямокутники виділено на рисунку). Чи можна розрізати квадрат 8×8 на L-тетраміно так, щоб менші прямокутники не утворювалися? (А. Теслер)



2. У магазині є три сорти чаю: зелений, чорний і фруктовий. Спочатку кількості пачок різних сортів відносилися як $4 : 5 : 8$. Після тижня продажів і нової поставки це співвідношення змінилося і стало $5 : 7 : 12$. Відомо, що кількість пачок фруктового чаю зросла на 60%, а зеленого збільшилася не більше, ніж на 20 пачок. Скільки всього пачок чаю було в магазині спочатку? (Л. С. Корешкова)
3. Два хакери створили різні програми для аналізу ступеня зміни чисел при деяких діях. Перша програма за один цикл домножує будь-яке натуральне число на 3, а потім віднімає від результату його суму цифр, і далі з новим результатом повторює 7 таких самих циклів. Підсумковий результат роботи програми першого хакера — відношення отриманого результату до початкового числа.
- Програма другого хакера бере число, що складається лише з дев'яток, і за один цикл ділить це число на суму цифр, якщо воно ділиться, а в іншому випадку віднімає суму цифр; далі з результатом повторює 7 таких самих циклів. Підсумковий результат роботи програми другого хакера — відношення початкового числа до отриманого результату.
- Хакери вирішили зіграти в гру: кожен вигадує собі початкове число; у кого підсумковий результат більше, той і переміг. Хто з хакерів зуміє перемогти за будь-якої гри суперника? (И. Ж. Ибатуллин)
4. Є два резервуари, кожен із яких вміщує 2020 м^3 води. Опівночі в першому резервуарі 100 м^3 води, а в другому 2020 м^3 . У перший резервуар щогодини надходить 110 м^3 води (поки він не заповниться), а з другого щогодини викачують 50 м^3 (поки він не спорожніє). У які моменти часу різниця між об'ємами води в резервуарах становитиме половину початкової? (И. Ж. Ибатуллин)
5. ABC і BCD — рівнобедрені прямокутні трикутники з гіпотенузами $BC = 7$ і $CE = 14$. C лежить на відрізку BE , а точки A і D лежать по один бік від прямої BE . Відрізки AE і BD перетинаються в точці O . Знайдіть площу трикутника CDE . (А. Р. Араб)
6. На одному острові живуть чотири типи людей: лицарі (всі їхні твердження істинні), брехуни (всі їхні твердження неправдиві), звичайні люди (можуть говорити все що завгодно) і бояки (взагалі не роблять жодних тверджень). Одного разу зібралися кілька людей, і кожен з них вимовив одну з наступних фраз: «Хто ви?», «Я лицар», «Я брехун», «Я звичайний», «Я бояка». Кожну фразу сказали рівно 6 осіб. Відомо, що людей усіх типів була різна і ненульова кількість. Найбільше було лицарів. А скільки саме? (Знайдіть усі можливі варіанти відповіді на це питання і доведіть, що інших немає.) (А. Теслер)
7. Стіл має форму квадрата зі стороною 1 метр. На ньому лежать, не накладаючись, 12 монет радіусом 1 см. Доведіть, що можна вибрати такі 4 різні монети з центрами A, B, C, D , що $1 \leq CD : AB < 1,1$ або $1 \leq AC : AB < 1,1$. (А. Теслер)

- Термін проведення відбіркового туру олімпіади — з **15 жовтня по 12 листопада включно**. Призерів відбіркового етапу буде запрошено на заключний етап, що проходить в січні-лютому 2020 року.
- Пам'ятайте, що в більшості завдань потрібна не тільки відповідь, але й повне її обґрунтування.
- Олімпіадні роботи приймаються в електронному вигляді (допустимі як текстові файли, так і відскановані копії паперових робіт). Докладніше див. на сайті formulo.org.
- У роботі не повинні міститися особисті дані учасника, тобто **підписувати роботу не слід**.
- Роботи з ознаками списування та колективної творчості розглядатися не будуть.



Міжнародна математична олімпіада
«Формула Єдності» / «Третє тисячоліття»
2019–2020 навчальний рік. Відбірковий етап

Задачі для 9 класу

- У магазині є три сорти чаю: зелений, чорний і фруктовий. Спочатку кількості пачок різних сортів відносилися як $4 : 5 : 8$. Після тижня продажів і нової поставки це співвідношення змінилося і стало $5 : 7 : 12$. Відомо, що кількість пачок фруктового чаю зросла на 60%, а зеленого збільшилася не більше, ніж на 20 пачок. Скільки всього пачок чаю було в магазині спочатку? (Л. С. Корешкова)
- Дано набір кісток доміно, зображений на рисунку.

 - Чи можна скласти з них усіх ланцюжок за правилами доміно?
 - Чи можна прибрати одну кістку з набору так, щоб з усіх інших не можна було зробити ланцюжок? (А. Теслер)

- Є два резервуари, кожен із яких вміщує 2020 м^3 води. Опівночі в першому резервуарі 100 м^3 води, а в другому 2020 м^3 . У перший резервуар щогодини надходить 110 м^3 води (поки він не заповниться), а з другого щогодини викачують 50 м^3 (поки він не спорожніє). У які моменти часу різниця між об'ємами води в резервуарах становитиме половину початкової? (И. Ж. Ибатуллин)
- У коло діаметром 5 вписаний трикутник, усі сторони якого мають цілі довжини. Знайдіть його периметр (укажіть усі можливі варіанти і доведіть, що інших немає). (П. Д. Муленко)
- Чи існують такі різні натуральні числа a , b , x і y , що x записується в системі числення з основою a точно так само, як y записується в системі числення з основою b , і навпаки (x записується в системі числення з основою b точно так само, як y записується в системі числення з основою a)? (В. П. Федотов)
- Стіл має форму квадрата зі стороною 1 метр. На ньому лежать, не накладаючись, 12 монет радіусом 1 см. Доведіть, що можна вибрати такі 4 різні монети з центрами A , B , C , D , що $1 \leq CD : AB < 1,1$ або $1 \leq AC : AB < 1,1$. (А. Теслер)
- Нехай a і b — два дійсних числа, причому $2a^3 + 2b^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 60ab = 16000$. Знайдіть всі можливі значення суми $a + b$. (А. Р. Араб)

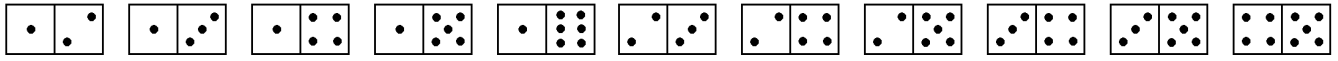
- Термін проведення відбіркового туру олімпіади — з **15 жовтня по 12 листопада включно**. Призерів відбіркового етапу буде запрошено на заключний етап, що проходить в січні-лютому 2020 року.
- Пам'ятайте, що в більшості завдань потрібна не тільки відповідь, але й повне її обґрунтування.
- Олімпіадні роботи приймаються в електронному вигляді (допустимі як текстові файли, так і відскановані копії паперових робіт). Докладніше див. на сайті formulo.org.
- У роботі не повинні міститися особисті дані учасника, тобто **підписувати роботу не слід**.
- Роботи з ознаками списування та колективної творчості розглядатися не будуть.



Міжнародна математична олімпіада
«Формула Єдності» / «Третє тисячоліття»
2019–2020 навчальний рік. Відбірковий етап

Задачі для 10–11 класів

1. Дано набір кісток доміно, зображений на рисунку.



- а) Чи можна скласти з них усіх ланцюжок за правилами доміно?
- б) Чи можна прибрати одну кістку з набору так, щоб з усіх інших не можна було зробити ланцюжок? (А. Теслер)
2. У трикутнику ABC зі сторонами $AB = 6$, $BC = 4$, $AC = 8$ на стороні AC відмічено таку точку M , що вписані кола трикутників ABM і BCM мають спільну точку. Знайдіть відношення площ цих трикутників. (Л. С. Корешкова)
3. На одному острові живуть чотири типи людей: лицарі (всі їхні твердження істинні), брехуни (всі їхні твердження неправдиві), звичайні люди (можуть говорити все що завгодно) і бояки (взагалі не роблять жодних тверджень). Одного разу зібралися кілька людей, і кожен з них вимовив одну з наступних фраз: «Хто ви?», «Я лицар», «Я брехун», «Я звичайний», «Я бояка». Кожну фразу сказали рівно 6 осіб. Відомо, що людей усіх типів була різна і ненульова кількість. Найбільше було лицарів. А скільки саме? (Знайдіть усі можливі варіанти відповіді на це питання і доведіть, що інших немає.) (А. Теслер)
4. Поверхню дерев'яного куба з ребром 1 метр зафарбовано. Від кожного його кута відпиляли піраміду; в результаті залишився 14-гранник, усі зафарбовані грані якого — прямокутники, а всі незафарбовані — правильні трикутники. Знайдіть загальну площу зафарбованої поверхні цього 14-гранника, якщо вона в $\sqrt{3}$ разів менша, ніж загальна площа його незафарбованої поверхні. (А. Теслер)
5. По команді k роботи Дев'яткін і Десяткін виписують всі натуральні числа від 1 до $37k$. Потім Дев'яткін шукає серед них число, у десятковому записі якого найбільше цифр 9, а Десяткін — число з найбільшою кількістю нулів. Якщо в когось із них потрібних цифр виявиться більше, то йому присуджують очко. Із яким рахунком закінчиться матч, якщо він складається з послідовного виконання команд $k \dots$ (а) для k від 1 до 2019; (б) для k від 1 до 10^{2019} ? (В. П. Федотов)
6. Чи можна замість пропусків поставити сім послідовних натуральних чисел (у певному порядку) так, щоб рівність $(x - _)(x - _)(x - _) = (x - _)(x - _)(x - _) + _$ виконувалася для всіх x ? (А. Теслер)
7. Є три басейни. Із першого з постійною швидкістю виливається вода, а у другій і третій басейни вода надходить з постійними швидкостями. Спочатку у першому басейні було стільки ж води, скільки в двох інших разом; через деякий час у другому басейні стало стільки ж води, скільки в двох інших разом; ще через деякий час у третьому басейні стало стільки ж води, скільки в перших двох разом. Чи можливо, що ані на початку, ні в кінці цього проміжку часу жоден з басейнів не був порожнім? (А. Теслер)

- Термін проведення відбіркового туру олімпіади — з **15 жовтня по 12 листопада включно**. Призерів відбіркового етапу буде запрошено на заключний етап, що проходить в січні-лютому 2020 року.
- Пам'ятайте, що в більшості завдань потрібна не тільки відповідь, але й повне її обґрунтування.
- Олімпіадні роботи приймаються в електронному вигляді (допустимі як текстові файли, так і відскановані копії паперових робіт). Докладніше див. на сайті formulo.org.
- У роботі не повинні міститися особисті дані учасника, тобто **підписувати роботу не слід**.
- Роботи з ознаками списування та колективної творчості розглядатися не будуть.