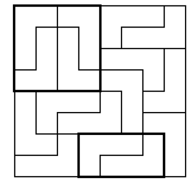
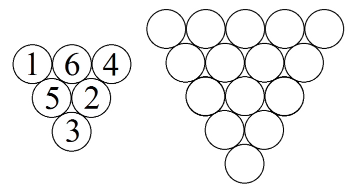
Olimpiada matemática internacional
"Fórmula de la Unidad" / "El Tercer Milenio"
Año escolar 2019–2020. Etapa preliminar

Problemas para los niveles R5 y R6

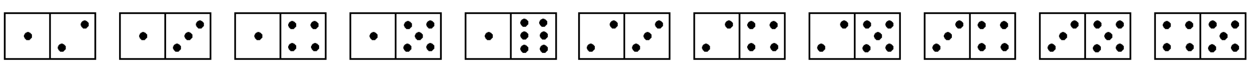
1. En la figura se muestra un cuadrado cuadriculado de tamaño 8×8 recortado en L-tetraminós (figuras pequeñas de cuatro cuadrículas en forma de la letra L). Unas de ellas forman rectángulos menores (dos de estos rectángulos están sobresaltados en la figura). ¿Podemos recortar un cuadrado de tamaño 8×8 en L-tetraminós sin formar rectángulos menores?



2. Pedro está escribiendo un poema. El primer día él compuso unas primeras líneas, y cada día siguiente agrega una línea más que el día anterior (por ejemplo, si en el primer día compone 3 líneas, entonces el poema contendrá 7 líneas al final del segundo día y 12 líneas al final del tercer día).
   a) ¿Es posible que al final de algún día (que no sea primero) la cantidad de líneas en el poema termine con la cifra 4?
   b) ¿Es posible que al final de algún día (que no sea primero) la cantidad de líneas en el poema termine con la cifra 4 y al final de alguno de los días siguientes termine con la cifra 7?
3. Una configuración de números se llama linda si cada número es igual a la diferencia de los dos números arriba de él. Por ejemplo, en la figura a la izquierda se muestra una configuración linda de los números de 1 a 6. Encuentre una configuración linda de números de 1 a 15 (cada número se utiliza sólo una vez formando una figura a la derecha).



4. Pedro y Pablo juegan lo siguiente. Tienen una barra de chocolate cuadriculada de tamaño 2019×2020 cuadrículas; en cada turno el movimiento de un jugador consiste en cortar de la barra un pedazo rectangular y comerselo (de tal manera que la barra sigue siendo un rectángulo cuadriculado pero de un tamaño menor). Pedro va primero y después los jugadores se turnan. El jugador que con su turno logre que el perímetro de la barra mida exactamente 10 gana. ¿Quién de los jugadores puede ganar sean cual sean los movimientos de su adversario? ¿Qué debe hacer para ganar?
5. En la figura se muestra un conjunto de fichas de dominó.



   a) ¿Podemos armar una cadena utilizando todas estas fichas según las reglas de dominó?
   b) ¿Podemos quitar una ficha del conjunto de tal manera que las demás fichas no puedan formar una cadena?
6. En una isla habitan cuatro tipos de personas: los caballeros (todas sus afirmaciones son verdaderas), los mentirosos (todas sus afirmaciones son falsas), la gente normal (pueden decir cualquier cosa) y los tímidos (no hacen ninguna afirmación). Una vez se juntaron varias personas y cada uno dijo una de las siguientes frases: "¿Quiénes son Uds.?", "Soy caballero", "Soy mentiroso", "Soy normal", "Soy tímido". Cada frase dijeron exactamente 10 personas. ¿Pueden los caballeros ser los más numerosos en esta compañía?
7. ***Sólo para el nivel R5.*** Hay tres recipientes. El primer recipiente está lleno de agua, mientras el segundo y el tercero están vacíos. A las 12:00 empiezan a bombear el agua del primer recipiente al segundo y al tercero, de tal manera que el segundo recipiente recibe 2 litros por minuto mientras el tercero recibe 4 litros por minuto. A las 13:00 el volumen de agua en el primer y el segundo recipientes se iguala.¿A qué horas el primer recipiente se quedará vacío?

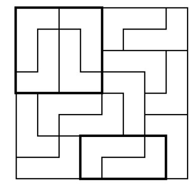
   Sólo para el nivel R6. Una tienda vende tres tipos de té: verde, negro y frutal. Al inicio la proporción de las cantidades de los paquetes de cada tipo fue $4 : 5 : 8$. Después de una semana de ventas y un abastecimiento esta proporción se cambió y se convirtió en $5 : 7 : 12$. Se sabe que la cantidad de paquetes de té frutal aumentó 60 %, y la cantidad de paquetes de té verde aumento en número no mayor a 20 paquetes. ¿Cuántos paquetes de té en total hubo en la tienda al inicio?

• La etapa preliminar se llevará a cabo desde el 15 de octubre hasta el 12 de noviembre inclusive. Los ganadores de la etapa preliminar serán invitados a la etapa final que se llevará a cabo en febrero de 2020.
• Recuerde que en la mayoría de los problemas se necesita propocionar no sólo la respuesta sino su justificación completa.
• Los trabajos se aceptan en forma electrónica: se admiten archivos de texto y trabajos manuscritos escaneados. Los requisitos detallados se pueden encontrar en formulo.org/en/olymp/2019-math-en/.
• No escriba sus datos personales en su trabajo, es decir, no ponga su nombre en las hojas con las soluciones.
• Los trabajos sospechosos de ser creación colectiva o copias no serán calificados.

Olimpiada matemática internacional
“Fórmula de la Unidad” / “El Tercer Milenio”
Año escolar 2019–2020. Etapa preliminar

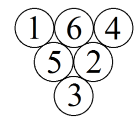
Problemas para el nivel R7

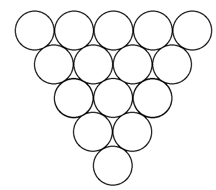
1. En la figura se muestra un cuadrado cuadriculado de tamaño 8×8 recortado en L-tetraminós (figuras pequeñas de cuatro cuadrículas en forma de la letra L). Unas de ellas forman rectángulos menores (dos de estos rectángulos están sobresaltados en la figura). ¿Podemos recortar un cuadrado de tamaño 8×8 en L-tetraminós sin formar rectángulos menores?



2. Pedro está escribiendo un poema. El primer día él compuso unas primeras líneas, y cada día siguiente agrega una línea más que el día anterior (por ejemplo, si en el primer día compone 3 líneas, entonces el poema contendrá 7 líneas al final del segundo día y 12 líneas al final del tercer día).
   a) ¿Es posible que al final de algún día (que no sea primero) la cantidad de líneas en el poema termine con la cifra 4?
   b) ¿Es posible que al final de algún día (que no sea primero) la cantidad de líneas en el poema termine con la cifra 4 y al final de alguno de los días siguientes termine con la cifra 7?

3. Una configuración de números se llama linda si cada número es igual a la diferencia de los dos números arriba de él. Por ejemplo, en la figura a la izquierda se muestra una configuración linda de los números de 1 a 6. Encuentre una configuración linda de números de 1 a 15 (cada número se utiliza sólo una vez formando una figura a la derecha).





4. Una tienda vende tres tipos de té: verde, negro y frutal. Al inicio la proporción de las cantidades de los paquetes de cada tipo fue $4 : 5 : 8$. Después de una semana de ventas y un abastecimiento esta proporción se cambió y se convirtió en $5 : 7 : 12$. Se sabe que la cantidad de paquetes de té frutal aumentó $60\,\%$, y la cantidad de paquetes de té verde aumento en número no mayor a 20 paquetes. ¿Cuántos paquetes de té en total hubo en la tienda al inicio?

5. Hay dos cisternas con la capacidad 2020 m^3 de agua. A la medianoche la primer cisterna contiene 100 m^3 de agua, mientras la segunda contiene 2020 m^3. La primer cisterna recibe 110 m^3 de agua por hora (hasta llenar), mientras que en la segunda el agua se bombea a 50 m^3 por hora (hasta vaciar). ¿En qué momentos de tiempo la diferencia entre los volúmenes de agua en las cisternas será igual a la mitad de la diferencia inicial?

6. Harry Potter tiene una caja que mide $10 \times 10 \times 10$ centimetros y un aparato mágico. Al colocar la caja en el aparato una de las dimensiones de la caja (largo, ancho, o alto) crece $50\,\%$, mientras las otras dimensiones dos se disminuyen $20\,\%$ cada una. ¿Puede Harry Potter obtener una caja que mida $20 \times 20 \times 20$ centimetros después de utilizar el aparato varias veces?

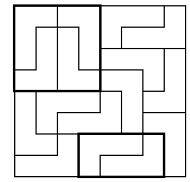
7. En una isla habitan cuatro tipos de personas: los caballeros (todas sus afirmaciones son verdaderas), los mentirosos (todas sus afirmaciones son falsas), la gente normal (pueden decir cualquier cosa) y los tímidos (no hacen ninguna afirmación). Una vez se juntaron varias personas y cada uno dijo una de las siguientes frases: “¿Quiénes son Uds.?”, “Soy caballero”, “Soy mentiroso”, “Soy normal”, “Soy tímido”. Cada frase dijeron exactamente 6 personas. Se sabe que las cantidades de cada tipo de persona eran distintas y ninguno era cero. Los caballeros eran los más numerosos. ¿Cuántos caballeros había? Encuentre todas las respuestas posibles y demuestre que no hay otras opciones.

• La etapa preliminar se llevará a cabo desde el 15 de octubre hasta el 12 de noviembre inclusive. Los ganadores de la etapa preliminar serán invitados a la etapa final que se llevará a cabo en febrero de 2020.
• Recuerde que en la mayoría de los problemas se necesita propocionar no sólo la respuesta sino su justificación completa.
• Los trabajos se aceptan en forma electrónica: se admiten archivos de texto y trabajos manuscritos escaneados. Los requisitos detallados se pueden encontrar en formulo.org/en/olymp/2019-math-en/.
• No escriba sus datos personales en su trabajo, es decir, no ponga su nombre en las hojas con las soluciones.
• Los trabajos sospechosos de ser creación colectiva o copias no serán calificados.

Olimpiada matemática internacional
"Fórmula de la Unidad" / "El Tercer Milenio"
Año escolar 2019–2020. Etapa preliminar

Problemas para el nivel R8

1. En la figura se muestra un cuadrado cuadriculado de tamaño 8×8 recortado en L-tetraminós (figuras pequeñas de cuatro cuadrículas en forma de la letra L). Unas de ellas forman rectángulos menores (dos de estos rectángulos están sobresaltados en la figura). ¿Podemos recortar un cuadrado de tamaño 8×8 en L-tetraminós sin formar rectángulos menores?



2. Una tienda vende tres tipos de té: verde, negro y frutal. Al inicio la proporción de las cantidades de los paquetes de cada tipo fue $4 : 5 : 8$. Después de una semana de ventas y un abastecimiento esta proporción se cambió y se convirtió en $5 : 7 : 12$. Se sabe que la cantidad de paquetes de té frutal aumentó $60\,\%$, y la cantidad de paquetes de té verde aumento en número no mayor a 20 paquetes. ¿Cuántos paquetes de té en total hubo en la tienda al inicio?

3. Dos hackers crearon dos programas distintos para analizar la magnitud de cambio de números sujetos a ciertas operaciones.
   El primer programa recibe de entrada un número natural y en la primera iteración multiplica este número por 3 y luego sustrae del producto la suma de las cifras del producto. Después el programa aplica el mismo procedimiento al resultado de la iteración anterior y así repite 7 iteraciones más. La salida del primer programa es la razón entre el resultado después de todas las iteraciones y la entrada.
   El segundo programa recibe de entrada un número que se escribe utilizando sólo la cifra 9 y en la primera iteración divide este número entre la suma de sus cifras si el número es divisible, por el contrario sustrae del número la suma de sus cifras. Después el programa aplica el mismo procedimiento al resultado de la iteración anterior y así repite 7 iteraciones más. La salida del segundo programa es la razón entre el número de entrada y el resultado después de todas las iteraciones.
   Los hackers decidieron a jugar: cada uno escoge un número inicial y aplica su programa a este número. Gana el hacker con el número de salida más grande. ¿Cuál de los hackers puede ganar sea cual sea la jugada de su adversario?

4. Hay dos cisternas con la capacidad 2020 m^3 de agua. A la medianoche la primer cisterna contiene 100 m^3 de agua, mientras la segunda contiene 2020 m^3. La primer cisterna recibe 110 m^3 de agua por hora (hasta llenar), mientras que en la segunda el agua se bombea a 50 m^3 por hora (hasta vaciar). ¿En qué momentos de tiempo la diferencia entre los volúmenes de agua en las cisternas será igual a la mitad de la diferencia inicial?

5. ABC y CDE son triángulos rectángulos isósceles con las hipotenusas $BC = 7$ y $CE = 14$. El punto C pertenece al segmento BE, mientras los puntos A y D se encuentran en el mismo semiplano respecto a la recta BE. Los segmentos AE y BD se intersecan en el punto O. Encuentre el area del triángulo ODE.

6. En una isla habitan cuatro tipos de personas: los caballeros (todas sus afirmaciones son verdaderas), los mentirosos (todas sus afirmaciones son falsas), la gente normal (pueden decir cualquier cosa) y los tímidos (no hacen ninguna afirmación). Una vez se juntaron varias personas y cada uno dijo una de las siguientes frases: "¿Quiénes son Uds.?", "Soy caballero", "Soy mentiroso", "Soy normal", "Soy tímido". Cada frase dijeron exactamente 6 personas. Se sabe que las cantidades de cada tipo de persona eran distintas y ninguno era cero. Los caballeros eran los más numerosos. ¿Cuántos caballeros había? Encuentre todas las respuestas posibles y demuestre que no hay otras opciones.

7. Una mesa tiene forma de un cuadrado cuyos lados miden 1 metro. Sobre la mesa se encuentran 12 monedas que miden 1 cm de radio y que no solapan una a otra. Demuestre que se puede escoger 4 monedas diferentes con los centros A, B, C, D, tales que $1 \leqslant CD : AB < 1.1$ o bien $1 \leqslant AC : AB < 1.1$.

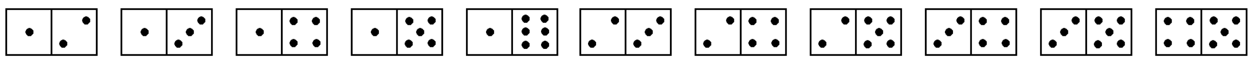
• **La etapa preliminar se llevará a cabo desde el 15 de octubre hasta el 12 de noviembre inclusive. Los ganadores de la etapa preliminar serán invitados a la etapa final que se llevará a cabo en febrero de 2020.**
• **Recuerde que en la mayoría de los problemas se necesita propocionar no sólo la respuesta sino su justificación completa.**
• **Los trabajos se aceptan en forma electrónica: se admiten archivos de texto y trabajos manuscritos escaneados. Los requisitos detallados se pueden encontrar en** formulo.org/en/olymp/2019-math-en/.
• **No escriba sus datos personales en su trabajo, es decir, no ponga su nombre en las hojas con las soluciones.**
• **Los trabajos sospechosos de ser creación colectiva o copias no serán calificados.**

Olimpiada matemática internacional
“Fórmula de la Unidad” / “El Tercer Milenio”
Año escolar 2019–2020. Etapa preliminar

Problemas para el nivel R9

1. Una tienda vende tres tipos de té: verde, negro y frutal. Al inicio la proporción de las cantidades de los paquetes de cada tipo fue $4:5:8$. Después de una semana de ventas y un abastecimiento esta proporción se cambió y se convirtió en $5:7:12$. Se sabe que la cantidad de paquetes de té frutal aumentó 60 %, y la cantidad de paquetes de té verde aumento en número no mayor a 20 paquetes. ¿Cuántos paquetes de té en total hubo en la tienda al inicio?

2. En la figura se muestra un conjunto de fichas de dominó.



   a) ¿Podemos armar una cadena utilizando todas estas fichas según las reglas de dominó?

   b) ¿Podemos quitar una ficha del conjunto de tal manera que las demás fichas no puedan formar una cadena?

3. Hay dos cisternas con la capacidad 2020 m^3 de agua. A la medianoche la primer cisterna contiene 100 m^3 de agua, mientras la segunda contiene 2020 m^3. La primer cisterna recibe 110 m^3 de agua por hora (hasta llenar), mientras que en la segunda el agua se bombea a 50 m^3 por hora (hasta vaciar). ¿En qué momentos de tiempo la diferencia entre los volúmenes de agua en las cisternas será igual a la mitad de la diferencia inicial?

4. En una circunferencia con el diámetro 5 está inscrito un triángulo, cuyos lados tienen medidas enteras. Encuentre su perímetro (señale todas las opciones y demuestre que no hay otras).

5. Averigüe si existen números naturales a, b, x y y distintos entre sí, tales que x se escribe en el sistema de numeración con la base a de exactamente la misma forma que y se escribe en el sistema de numeración con la base b, y viceversa (x se escribe en el sistema de numeración con la base b de la misma forma que y se escribe en el sistema de numeración con la base a).

6. Una mesa tiene forma de un cuadrado cuyos lados miden 1 metro. Sobre la mesa se encuentran 12 monedas que miden 1 cm de radio y que no solapan una a otra. Demuestre que se puede escoger 4 monedas diferentes con los centros A, B, C, D, tales que $1 \leqslant CD : AB < 1.1$ o bien $1 \leqslant AC : AB < 1.1$.

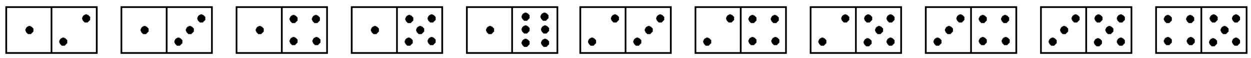
7. Sean a y b dos números reales, tales que $2a^3 + 2b^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 60ab = 16000$. Encuentre todos los valores posibles de $a + b$.

• La etapa preliminar se llevará a cabo desde el 15 de octubre hasta el 12 de noviembre inclusive. Los ganadores de la etapa preliminar serán invitados a la etapa final que se llevará a cabo en febrero de 2020.
• Recuerde que en la mayoría de los problemas se necesita propocionar no sólo la respuesta sino su justificación completa.
• Los trabajos se aceptan en forma electrónica: se admiten archivos de texto y trabajos manuscritos escaneados. Los requisitos detallados se pueden encontrar en formulo.org/en/olymp/2019-math-en/.
• No escriba sus datos personales en su trabajo, es decir, no ponga su nombre en las hojas con las soluciones.
• Los trabajos sospechosos de ser creación colectiva o copias no serán calificados.

Olimpiada matemática internacional
"Fórmula de la Unidad" / "El Tercer Milenio"
Año escolar 2019–2020. Etapa preliminar

Problemas para los niveles R10 y R11

1. En la figura se muestra un conjunto de fichas de dominó.



   a) ¿Podemos armar una cadena utilizando todas estas fichas según las reglas de dominó?

   b) ¿Podemos quitar una ficha del conjunto de tal manera que las demás fichas no puedan formar una cadena?

2. En el triángulo ABC los lados miden $AB = 6$, $BC = 4$, $AC = 8$. El punto M está marcado sobre el lado AC de tal manera que las circunferencias inscritas de los triángulos ABM y BCM tienen un punto común. Encuentre la razón de las áreas de estos triángulos.

3. En una isla habitan cuatro tipos de personas: los caballeros (todas sus afirmaciones son verdaderas), los mentirosos (todas sus afirmaciones son falsas), la gente normal (pueden decir cualquier cosa) y los tímidos (no hacen ninguna afirmación). Una vez se juntaron varias personas y cada uno dijo una de las siguientes frases: "¿Quiénes son Uds.?", "Soy caballero", "Soy mentiroso", "Soy normal", "Soy tímido". Cada frase dijeron exactamente 6 personas. Se sabe que las cantidades de cada tipo de persona eran distintas y ninguno era cero. Los caballeros eran los más numerosos. ¿Cuántos caballeros había? Encuentre todas las respuestas posibles y demuestre que no hay otras opciones.

4. Un cubo que es hecho de madera sólida y cuyos aristas miden 1 metro tiene toda su superficie pintada. Después de cortar una pirámide de cada uno de los vértices del cubo se quedó un tetradecaedro (un poliedro con 14 caras), cuyos caras pintadas son rectángulos y las caras sin pintar son triángulos equiláteros. Encuentre el área total de la superficie pintada del tetradecaedro, si esta área es $\sqrt{3}$ veces menor que el área total de la superficie sin pintar.

5. Al recibir el comando k los robots El Noveno y El Deceno escriben todos los números naturales de 1 hasta $37k$. Luego El Noveno busca entre los números escritos un número con la máxima cantidad de cifras 9, mientras El Deceno busca un número con la máxima cantidad de ceros. El robot que tenga más cifras indicadas gana un punto. ¿Cuál será la cuenta al final del partido si durante el partido se ejecutan consecutivamente los comandos $k\ldots$ (a) para los números k desde 1 hasta 2019; (b) para los números k desde 1 hasta 10^{2019}?

6. ¿Podemos llenar los espacios con siete números naturales consecutivos (en cualquier orden) de tal manera que la igualdad $(x - \_)(x - \_)(x - \_) = (x - \_)(x - \_)(x - \_) + \_$ se cumpla para cualquier valor de x?

7. Hay tres piscinas. Del primer piscina se bombea el agua con una tasa de flujo constante, mientras la segunda y la tercera reciben el agua con sus respectivas tasas de flujo constantes. Inicialmente la primer piscina contiene un volumen de agua igual a la suma de los volúmenes en la segunda y la tercera; después de un cierto tiempo la segunda piscina contiene el mismo volumen que la suma de los volúmenes en las otras dos; después de un rato más la tercera piscina contiene el mismo volumen de agua que la suma en las otras dos. ¿Es posible que ninguna de las trés piscinas esté vacía ni al inicio ni al final de este intervalo de tiempo?

• La etapa preliminar se llevará a cabo desde el 15 de octubre hasta el 12 de noviembre inclusive. Los ganadores de la etapa preliminar serán invitados a la etapa final que se llevará a cabo en febrero de 2020.
• Recuerde que en la mayoría de los problemas se necesita propocionar no sólo la respuesta sino su justificación completa.
• Los trabajos se aceptan en forma electrónica: se admiten archivos de texto y trabajos manuscritos escaneados. Los requisitos detallados se pueden encontrar en formulo.org/en/olymp/2019-math-en/.
• No escriba sus datos personales en su trabajo, es decir, no ponga su nombre en las hojas con las soluciones.
• Los trabajos sospechosos de ser creación colectiva o copias no serán calificados.