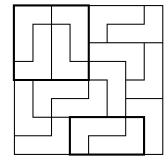
International Mathematical Olympiad
"Formula of Unity" / "The Third Millennium"
Année 2019/2020. Premier tour

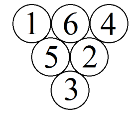
Problèmes pour les classes R5 – R6

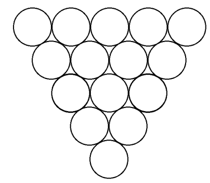
1. Un carré 8×8 est divisé en 16 L-tetrominos (réunion de 4 carrés unitaires en forme de L, voir figure). Plusieurs tetrominos forment des petits rectangles (les contours des deux de ces rectangles sont dessinés). Est-il possible de diviser un carré de dimension 8×8 en 16 L-tetrominos de façon à ce qu'aucun petit rectangle n'apparait? (*A. Tesler*)



2. Pierre écrit un poème. Le premier jour, il écrit quelque lignes et chaque jour suivant il écrit une ligne de plus que ce qu'il a écrit le jour précédent (par exemple, si le poème avait 3 lignes à la fin du premier jour, alors il y aura 7 lignes à la fin du deuxième jour, 12 lignes à la fin du troisième jour, et ainsi de suite).
   a) Est-il possible que le nombre de lignes à la fin d'une journée (qui n'est pas le premier jour) vaut 4?
   b) Est-il possible que le nombre de lignes à la fin d'une journée (qui n'est pas le premier jour) vaut 4, et, quelque jours plus tard, le nombre de ligne à la fin de la journée vaut 7? (*I. Tumanova*)

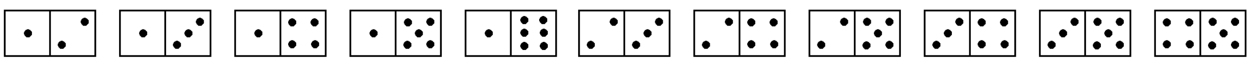
3. Six nombres compris entre 1 et 6 sont disposés de sorte que chaque nombre est égal à l'écart entre les deux nombres qui se trouvent en dessus (voir le dessin de gauche). On dit qu'une telle disposition est *jolie*. Ecrire les nombres de 1 à 15 à l'intérieur des cercles dans la figure de droite (chaque nombre doit être utilisé une et une seule fois) afin de former une *jolie* disposition. (*A. R. Arab*)





4. Felix et Sue jouent à un jeu. Ils ont une barre de chocolat de 2019×2020 carrés. A chaque tour, un joueur casse une pièce rectangulaire et la mange (après quoi, la barre reste rectangulaire mais avec des carrés en moins). Le jeu se joue à tour de rôle et c'est Felix qui commence le premier. Un joueur qui arrive à rendre la barre avec un périmètre égal à 10 gagne. Qui peut gagner quel que soit le jeu de l'adversaire? Comment doit-il ou elle agir? (*O. Pyaive*)

5. On prend quelque dominos montrés sur le dessin ci-dessous.



   a) Est-il possible de les relier tous en une seule chaine selon les règles usuelles des dominos?
   b) Est-il possible d'enlever un domino de sorte que les autres ne puissent pas former une chaine? (*A. Tesler*)

6. Sur une île vivent quatre types de personnes: les chevaliers (toutes leurs affirmations sont vraies), les menteurs (toutes leurs affirmations sont fausses), les gens ordinaires (qui peuvent affirmer ce qu'ils veulent) et les gens timides (qui n'affirment jamais rien). Lorsque plusieurs habitants de l'île se sont retrouvés, chacun d'eux a prononcé l'une de phrases suivantes: "Qui es tu?", "Je suis un chevalier", "Je suis un menteur", "Je suis ordinaire","Je suis timide". Chaque phrase a été prononcée par 10 personnes exactement. Est-il possible que les chevaliers soient le plus nombreux dans ce rassemblement? (*A. Tesler*)

7. ***Seulement pour les classes R5.*** On considère trois bassins. Le premier est plein alors que les deux autres sont vides. À 12:00, l'eau commence à couler du premierbassin dans les deux autres: chaque minute, 2 litres s'écoulent dans le deuxième bassin et 4 litres dans le troisième. À 13h00, les volumes d'eau dans le premier bassin et dans le deuxièm bassin sont égaux. À quelle heure le premier bassin deviendra-t-il vide? (*A. Tesler*)

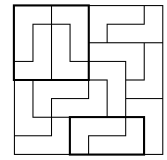
   Seulement pour les classes R6. Dans une boutique de thé il y trois sortes de thé: le thé vert, le thé noir et le thé aux fruits. Au début, la proportion du nombre de paquets de ces 3 types etait de $4 : 5 : 8$. Après que quelques paquets de thé soient vendus et que de nouveaux paquets soient arrivés, la proportion devient $5 : 7 : 12$. On sait que le nombre de paquets de thé aux fruits a augmenté de 60% et que le nombre de paquets de thé a augmenté d'au plus 20%. Combien de paquets y avait-il initialement dans la boutique? (*L. Koreshkova*)

- Le premier tour de l'Olympiade se déroule du 15 Octobre au 12 Novembre inclus. Les gagnants du premier tour seront invités à la finale qui se tiendra en février-mars 2020.
- La majorité des problèmes nécessitent non seulement une réponse, mais également une preuve complète.
- Veuillez envoyer votre copie au format éléctronique (les fichiers texte et les version numérisées copies manuscrites sont autorisés). Vous trouverez des instructions plus détaillées à l'adresse suivante: `formulo.org/en/olymp/2019-math-en/`.
- La copie ne doit pas comporter de details personnels du candidat, c'est-à-dire, **vous ne devez pas signer votre copie**.
- Veuillez résoudre les problèmes vous-même. Le travail collectif n'est pas autorisés.

International Mathematical Olympiad
"Formula of Unity" / "The Third Millennium"
Année 2019/2020. Premier tour

Problèmes pour les classes R7

1. Un carré 8×8 est divisé en 16 L-tetrominos (réunion de 4 carrés unitaires en forme de L, voir figure). Plusieurs tetrominos forment des petits rectangles (les contours des deux de ces rectangles sont dessinés). Est-il possible de diviser un carré de dimension 8×8 en 16 L-tetrominos de façon à ce qu'aucun petit rectangle n'apparait? (*A. Tesler*)

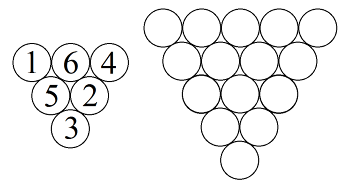


2. Pierre écrit un poème. Le premier jour, il écrit quelque lignes et chaque jour suivant il écrit une ligne de plus que ce qu'il a écrit le jour précédent (par exemple, si le poème avait 3 lignes à la fin du premier jour, alors il y aura 7 lignes à la fin du deuxième jour, 12 lignes à la fin du troisième jour, et ainsi de suite).

   a) Est-il possible que le nombre de lignes à la fin d'une journée (qui n'est pas le premier jour) vaut 4?

   b) Est-il possible que le nombre de lignes à la fin d'une journée (qui n'est pas le premier jour) vaut 4, et, quelque jours plus tard, le nombre de ligne à la fin de la journée vaut 7? (*I. Tumanova*)

3. Six nombres compris entre 1 et 6 sont disposés de sorte que chaque nombre est égal à l'écart entre les deux nombres qui se trouvent en dessus (voir le dessin de gauche). On dit qu'une telle disposition est *jolie*. Ecrire les nombres de 1 à 15 à l'intérieur des cercles dans la figure de droite (chaque nombre doit être utilisé une et une seule fois) afin de former une *jolie* disposition. (*A. R. Arab*)



4. Dans une boutique de thé il y trois sortes de thé: le thé vert, le thé noir et le thé aux fruits. Au début, la proportion du nombre de paquets de ces 3 types etait de 4 : 5 : 8. Après que quelques paquets de thé soient vendus et que de nouveaux paquets soient arrivés, la proportion devient 5 : 7 : 12. On sait que le nombre de paquets de thé aux fruits a augmenté de 60% et que le nombre de paquets de thé a augmenté d'au plus 20%. Combien de paquets y avait-il initialement dans la boutique? (*L. Koreshkova*)

5. On considère deux bassins identiaues dont le volume est 2020 m^3. A minuit, il y a 100 m^3 d'eau dans le premier bassin, et 2020 m^3 dans le deuxième. Toutes les heures, 110 m^3 d'eau entrent dans le premier bassin (jusqu'à ce qu'il soit plein), et 50 m^3 d'eau sortent du deuxième bassin (jusqu'à ce qu'il soit vide). A quel(s) moment(s) la différence entre le volume d'eau dans les bassins est-elle égale à la moitié de la différence initiale? (*I. Ibatulin*)

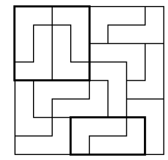
6. Harry Potter a une boite de dimensions $10 \times 10 \times 10$ cm ainsi qu'un outil magique. Quand cet outil est utilisé, l'une des dimensions de la boite (longueur, largeur, ou hauteur) augmente de 50%, et chacune des deux autres dimensions diminue de 20%. Est-il possible qu'après avoir utilisé l'outil plusieurs fois, Harry obtient une boite de dimensions $20 \times 20 \times 20$ cm? (*A. Tesler*)

7. Sur une île vivent quatre types de personnes: les chevaliers (toutes leurs affirmations sont vraies), les menteurs (toutes leurs affirmations sont fausses), les gens ordinaires (qui peuvent affirmer ce qu'ils veulent) et les gens timides (qui n'affirment jamais rien). Lorsque plusieurs habitants de l'île se sont retrouvés, chacun d'eux a prononcé l'une de phrases suivantes: "Qui es tu?", "Je suis un chevalier", "Je suis un menteur", "Je suis ordinaire","Je suis timide". Chaque phrase a été prononcée par 6 personnes. On sait que tous les types de personnes ont été présents, il n'y avait pas deux types représentés par un même nombre de personnes et que les chevaliers qui ont été le plus nombreux. Combien de chevaliers il y avait? (Donner vos réponses et montrer qu'il ne peut pas y en avoir d'autres.) (*A. Tesler*)

• Le premier tour de l'Olympiade se déroule du 15 Octobre au 12 Novembre inclus. Les gagnants du premier tour seront invités à la finale qui se tiendra en février-mars 2020.
• La majorité des problèmes nécessitent non seulement une réponse, mais également une preuve complète.
• Veuillez envoyer votre copie au format éléctronique (les fichiers texte et les version numérisées copies manuscrites sont autorisés). Vous trouverez des instructions plus détaillées à l'adresse suivante: `formulo.org/en/olymp/2019-math-en/`.
• La copie ne doit pas comporter de details personnels du candidat, c'est-à-dire, **vous ne devez pas signer votre copie**.
• Veuillez résoudre les problèmes vous-même. Le travail collectif n'est pas autorisés.

International Mathematical Olympiad
"Formula of Unity" / "The Third Millennium"
Année 2019/2020. Premier tour

Problèmes pour les classes R8



1. Un carré 8×8 est divisé en 16 L-tetrominos (réunion de 4 carrés unitaires en forme de L, voir figure). Plusieurs tetrominos forment des petits rectangles (les contours des deux de ces rectangles sont dessinés). Est-il possible de diviser un carré de dimension 8×8 en 16 L-tetrominos de façon à ce qu'aucun petit rectangle n'apparait? (*A. Tesler*)
2. Dans une boutique de thé il y trois sortes de thé: le thé vert, le thé noir et le thé aux fruits. Au début, la proportion du nombre de paquets de ces 3 types etait de $4 : 5 : 8$. Après que quelques paquets de thé soient vendus et que de nouveaux paquets soient arrivés, la proportion devient $5 : 7 : 12$. On sait que le nombre de paquets de thé aux fruits a augmenté de 60% et que le nombre de paquets de thé a augmenté d'au plus 20%. Combien de paquets y avait-il initialement dans la boutique? (*L. Koreshkova*)
3. Deux hackeurs ont écrit un programme chacun pour analyser les changements de nombres après certaines opérations.

   Le programme du premier hackeur prend un nombre entier positif, le multiplie par 3, puis soustrait au résultat la somme de ses chiffres. Ensuite, le programme répète 7 fois le même procédé en partant à chaque fois du nombre obtenu à l'itération précédente. Aprš quoi il affiche le rapport entre le denier nombre obtenu et le nombre initial.

   Le programme du second hackeur un nombre qui s'écrit uniquement avec des 9 et calcule la somme de ses chiffres. Si la somme des chiffres divise le nombre, le programme calcule le quotient, sinon il calcule la différence entre le nombre et la somme de ses chiffres. Ensuite, le programme répète 7 fois le même procédé en partant à chaque fois du nombre obtenu à l'itération précédente. Puis il affiche le rapport entre le nombre initial et le dernier nombre obtenu.

   Les hackeurs décident de jouer à un jeu: chacun d'eux choisit un nombre initial pour lui-même; le hackeur ayant obtenu le plus grand résultat final gagne. Qui peut gagner quelque soit le choix de l'adversaire? (*I. Ibatulin*)
4. On considère deux bassins identiaues dont le volume est 2020 m^3. A minuit, il y a 100 m^3 d'eau dans le premier bassin, et 2020 m^3 dans le deuxième. Toutes les heures, 110 m^3 d'eau entrent dans le premier bassin (jusqu'à ce qu'il soit plein), et 50 m^3 d'eau sortent du deuxième bassin (jusqu'à ce qu'il soit vide). A quel(s) moment(s) la différence entre le volume d'eau dans les bassins est-elle égale à la moitié de la différence initiale? (*I. Ibatulin*)
5. On considère deux triangles rectangles isocèles ABC et CDE tels que leurs hypoténuses sont de longueurs $BC = 7$ and $CE = 14$, le point C se trouve sur le segment BE et les points A et D se trouvent du même côté par rapport à la droite BE. On appelle O le point d'intersection des segments AE et BD. Trouver l'aire du triangle ODE. (*A. R. Arab*)
6. Sur une île vivent quatre types de personnes: les chevaliers (toutes leurs affirmations sont vraies), les menteurs (toutes leurs affirmations sont fausses), les gens ordinaires (qui peuvent affirmer ce qu'ils veulent) et les gens timides (qui n'affirment jamais rien). Lorsque plusieurs habitants de l'île se sont retrouvés, chacun d'eux a prononcé l'une de phrases suivantes: "Qui es tu?", "Je suis un chevalier", "Je suis un menteur", "Je suis ordinaire","Je suis timide". Chaque phrase a été prononcée par 6 personnes. On sait que tous les types de personnes ont été présents, il n'y avait pas deux types représentés par un même nombre de personnes et que les chevaliers qui ont été le plus nombreux. Combien de chevaliers il y avait? (Donner vos réponses et montrer qu'il ne peut pas y en avoir d'autres.) (*A. Tesler*)
7. Sur une table carré de côté 1m sont placées 12 pièces de monnaies de rayon 1 cm (sans chévauchement). Prouver qu'il est possible de choisir 4 pièces différentes de centrés A, B, C, D telles que $1 \leqslant CD : AB < 1,1$ ou $1 \leqslant AC : AB < 1,1$. (*A. Tesler*)

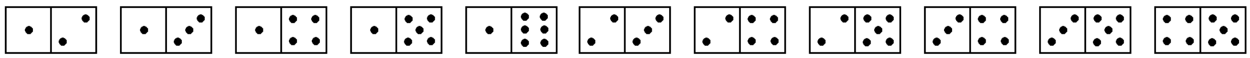
- Le premier tour de l'Olympiade se déroule du 15 Octobre au 12 Novembre inclus. Les gagnants du premier tour seront invités à la finale qui se tiendra en février-mars 2020.
- La majorité des problèmes nécessitent non seulement une réponse, mais également une preuve complète.
- Veuillez envoyer votre copie au format éléctronique (les fichiers texte et les version numérisées copies manuscrites sont autorisés). Vous trouverez des instructions plus détaillées à l'adresse suivante: `formulo.org/en/olymp/2019-math-en/`.
- La copie ne doit pas comporter de details personnels du candidat, c'est-à-dire, **vous ne devez pas signer votre copie**.
- Veuillez résoudre les problèmes vous-même. Le travail collectif n'est pas autorisés.

International Mathematical Olympiad
“Formula of Unity” / “The Third Millennium”
Année 2019/2020. Premier tour

Problèmes pour les classes R9

1. Dans une boutique de thé il y trois sortes de thé: le thé vert, le thé noir et le thé aux fruits. Au début, la proportion du nombre de paquets de ces 3 types etait de 4 : 5 : 8. Après que quelques paquets de thé soient vendus et que de nouveaux paquets soient arrivés, la proportion devient 5 : 7 : 12. On sait que le nombre de paquets de thé aux fruits a augmenté de 60% et que le nombre de paquets de thé a augmenté d’au plus 20%. Combien de paquets y avait-il initialement dans la boutique? (*L. Koreshkova*)

2. On prend quelque dominos montrés sur le dessin ci-dessous.



   a) Est-il possible de les relier tous en une seule chaine selon les règles usuelles des dominos?

   b) Est-il possible d’enlever un domino de sorte que les autres ne puissent pas former une chaine? (*A. Tesler*)

3. On considère deux bassins identiaues dont le volume est 2020 m^3. A minuit, il y a 100 m^3 d’eau dans le premier bassin, et 2020 m^3 dans le deuxième. Toutes les heures, 110 m^3 d’eau entrent dans le premier bassin (jusqu’à ce qu’il soit plein), et 50 m^3 d’eau sortent du deuxième bassin (jusqu’à ce qu’il soit vide). A quel(s) moment(s) la différence entre le volume d’eau dans les bassins est-elle égale à la moitié de la différence initiale? (*I. Ibatulin*)

4. Trouver toutes les valeurs possibles du périmètre d’un triangle inscrit dans un cercle de diamètre 5 (donner vos réponses et montrer qu’il ne peut pas y en avoir d’autres). (*P. Mulenko*)

5. Existe-t-il quatre nombres entiers différents a, b, x, y tels que la représentation de x dans la base a soit identique à la représentation de y dans la base b, et vice versa: la représentation de x dans la base b est identique à la représentation de y dans la base a? (*V. Fedotov*)

6. Sur une table carré de côté 1m sont placées 12 pièces de monnaies de rayon 1 cm (sans chévauchement). Prouver qu’il est possible de choisir 4 pièces différentes de centrés A, B, C, D telles que $1 \leqslant CD : AB < 1,1$ ou $1 \leqslant AC : AB < 1,1$. (*A. Tesler*)

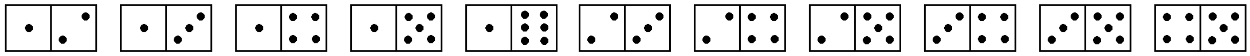
7. Soient a et b deux nombres réels tels que $2a^3 + 2b^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 60ab = 16000$. Trouver toutes les valeurs possible de $a + b$. (*A. R. Arab*)

• Le premier tour de l’Olympiade se déroule du 15 Octobre au 12 Novembre inclus. Les gagnants du premier tour seront invités à la finale qui se tiendra en février-mars 2020.
• La majorité des problèmes nécessitent non seulement une réponse, mais également une preuve complète.
• Veuillez envoyer votre copie au format éléctronique (les fichiers texte et les version numérisées copies manuscrites sont autorisés). Vous trouverez des instructions plus détaillées à l’adresse suivante: `formulo.org/en/olymp/2019-math-en/`.
• La copie ne doit pas comporter de details personnels du candidat, c’est-à-dire, **vous ne devez pas signer votre copie**.
• Veuillez résoudre les problèmes vous-même. Le travail collectif n’est pas autorisés.

International Mathematical Olympiad
“Formula of Unity” / “The Third Millennium”
Année 2019/2020. Premier tour

Problèmes pour les classes R10 –R11

1. On prend quelque dominos montrés sur le dessin ci-dessous.



   a) Est-il possible de les relier tous en une seule chaine selon les règles usuelles des dominos?

   b) Est-il possible d’enlever un domino de sorte que les autres ne puissent pas former une chaine? (*A. Tesler*)

2. Dans un triangle ABC, on connâit les longueur des côtés: $AB = 6, BC = 4, AC = 8$. Sur le côté AC, on choisit un point M de sorte que les cercles inscrits dans les triangles ABM et BCM aient un point commun. Trouver le rapport des aires de ces deux triangles. (*L. Koreshkova*)

3. Sur une île vivent quatre types de personnes: les chevaliers (toutes leurs affirmations sont vraies), les menteurs (toutes leurs affirmations sont fausses), les gens ordinaires (qui peuvent affirmer ce qu’ils veulent) et les gens timides (qui n’affirment jamais rien). Lorsque plusieurs habitants de l’île se sont retrouvés, chacun d’eux a prononcé l’une de phrases suivantes: “Qui es tu?”, “Je suis un chevalier”, “Je suis un menteur”, “Je suis ordinaire”,”Je suis timide”. Chaque phrase a été prononcée par 6 personnes. On sait que tous les types de personnes ont été présents, il n’y avait pas deux types représentés par un même nombre de personnes et que les chevaliers qui ont été le plus nombreux. Combien de chevaliers il y avait? (Donner vos réponses et montrer qu’il ne peut pas y en avoir d’autres.) (*A. Tesler*)

4. La surface d’un cube en bois de coté 1 m estpeinte d’une même couleur. On coupe une pyramide régulière à chaque sommet du cube. On obtient alors un polyèdre à 14 arêtes dont certaines faces sont peintes et d’utres non. Toutes les faces peintes sont des rectangles, et toutes les faces non peintes sont des triangles équilatéraux. Trouver l’aire totale des faces peintes de ce polyèdre si celle-ci est $\sqrt{3}$ fois plus petite que l’aire totale des faces non peintes. (*A. Tesler*)

5. Après un commande k, les robots Neuff et Zerro écrivent tous les nombres entiers compris entre 1 et $37k$. Ensuite, Neuff choisit un nombre ayant le maximum de chiffres 9, et Zerro choisit un nombre avec le maximum de chiffres 0. Si l’un des robots a plus de chiffres lui correspondant que l’autre, alors un point lui est attribué. Trouver le score final après un match composé de k commandes ... (a) pour $k = 1, 2, \ldots, 2019$; (b) pour $k = 1, 2, \ldots, 10^{2019}$. (*V. Fedotov*)

6. Est-il possible de placer sept nombres entiers positifs consécutifs (dans un ordre quelconque) à la place des tirets bas afin que l’égalité $(x-\_)(x-\_)(x-\_) = (x-\_)(x-\_)(x-\_)+\_$ soit vraie pour tout nombre réel x? (*A. Tesler*)

7. On considère trois bassins. L’eau s’écoule du premier bassin à la vitesse constante; et l’eau entre dans le deuxième et le troisième bassins à la vitesse constante. Initialement, la quantité d’eau dans le premier bassin est égale à la quantité totale d’eau dans les deux autres bassins. Après quelques heures, la quantité d’eau dans le deuxième bassin est égale à la quantité totale dans les deux autres bassins; et après quelques heures de plus, la quantité d’eau dans le troisième bassin est égale à la quantité totale dans les deux autres bassins. Est-il possible qu’aucun de ces trois bassins n’ait été vide à aucun moment? (*A. Tesler*)

- Le premier tour de l’Olympiade se déroule du 15 Octobre au 12 Novembre inclus. Les gagnants du premier tour seront invités à la finale qui se tiendra en février-mars 2020.
- La majorité des problèmes nécessitent non seulement une réponse, mais également une preuve complète.
- Veuillez envoyer votre copie au format éléctronique (les fichiers texte et les version numérisées copies manuscrites sont autorisés). Vous trouverez des instructions plus détaillées à l’adresse suivante: `formulo.org/en/olymp/2019-math-en/`.
- La copie ne doit pas comporter de details personnels du candidat, c’est-à-dire, **vous ne devez pas signer votre copie**.
- Veuillez résoudre les problèmes vous-même. Le travail collectif n’est pas autorisés.