№1

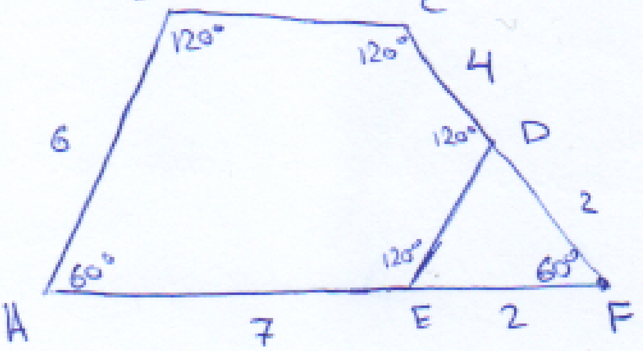
Заметим, что у любых двух непараллельных прямых на картинке есть точка пересечения (посмотрим на вертикальную, она очевидно пересекается со всеми прямыми других направлений, для прямой другого направления аналогично)

У нас всего есть 3 направления прямых, заметим, что в каждом треугольнике есть все 3 напр., знаит если мы рассмотрим по одной прямой из каждого направления, то либо они образуют треугольник (все точки пересечения есть), причём каждый ровно один раз, либо они пересекаются в одной точке, а значит кол-во треуг. = кол-во троек прямых − кол-во точек, в которых сходятся 3 прямые.

В каждом направлении по 9 прямых, а значит способов выбрать по одной − 9^3, кол-во точек, в которых сходится 3 прямые − 61 (просто посчитал)

Итого кол-во треуг. $= 9^3 - 61 = 729 - 61 = 668$

№2



сумма углов $180°\cdot 3 = 540°$

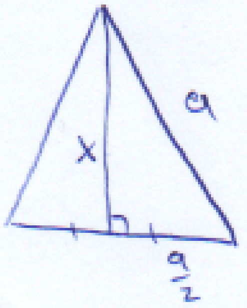
$\frac{540° - 60°}{4} = 120°$ – все ост. углы пятиугольника (кроме $\angle A$)

пересечём CD и AE получим F

Тогда $\triangle DEF$ – правильный, т.к. $\angle D = 60°$ и $\angle E = 60°$, значит $\angle F = 60°$.

$AF \parallel BC$, т.к. $\angle BAF = 60°$, $\angle ABC = 120°$ $\Rightarrow$ ABCF – трапеция, причём углы при основании AF равны $\Rightarrow$ трапеция равнобокая $\Rightarrow$ $AB = CF$ $\Rightarrow$ $CF = 6$ $\Rightarrow$ $DF = 2$, $\triangle DEF$ – равносторон. $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ $EF = 2$.

Мы хотим найти расстояние от A до CD, но это всё равно, что найти высоту в правильном треугольнике со стороной 9 (т.к. $AF = 9$ и $\angle AFC = 60°$)



$$\frac{a^2}{4} + x^2 = a^2$$

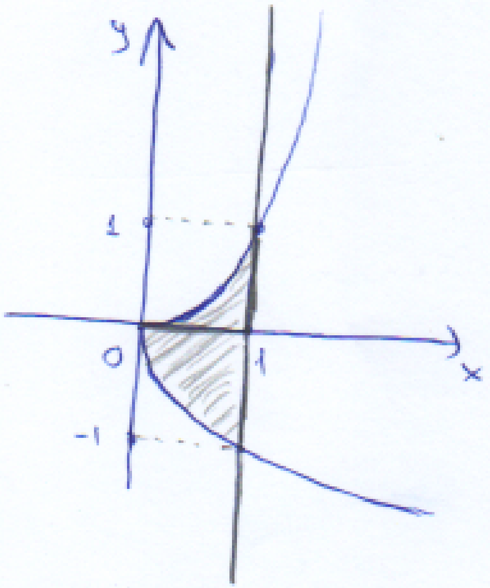
$$x^2 = a^2 \cdot \frac{3}{4}$$

$$x = \frac{a\cdot\sqrt{3}}{2} \qquad a = 9$$

Ответ: $\frac{9\cdot\sqrt{3}}{2}$

№3

Заметим, что $\sqrt{x}$ сущ. $\Rightarrow x \geq 0$ и $\sqrt{1-x}$ сущ. $\Rightarrow x \leq 1$



Значит x лежит от 0 до 1

при $x=1$ нер-во верно при любом y

При $0 \leq x < 1$ на $\sqrt{1-x}$ можно сократить не меняя знак

$(y+\sqrt{x})(y-x^2) \leq 0$

I) ~~рав-ва~~ $\begin{cases} y+\sqrt{x} \geq 0 \\ y-x^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq -\sqrt{x} \\ y \leq x^2 \end{cases}$

Нарисуем функции $y=x^2$ и $y=-\sqrt{x}$

Тогда подходящая нам область между этими двумя графиками (заштрих.)

II) $\begin{cases} y+\sqrt{x} \leq 0 \\ y-x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq -\sqrt{x} \\ y \geq x^2 \end{cases}$ $\quad -\sqrt{x} \geq x^2$

Это не верно (только для $x=0$ и $y=0$)

Значит нужно найти площадь (прямая $x=1$ не имеет площади) закр. фигуры, разобьём её на 2 части прямой Ox, тогда эти две части образуют квадрат 1×1, т.к. ~~в~~ функ. $y=x^2$ и $y=-\sqrt{x}$ получаются поворотом друг из друга, а площадь квадрата 1×1 (т.е. при повороте на 90° верхняя часть переходит в недост. до квадр.)

1 Ответ: 1.

№4

Все дарили разное кол-во подарков, можно подарить $0, 1, 2, \dots, N-1$ подарок, всего N вариантов, (т.к. можно дарить не более 1 подарка человеку)
значит все варианты задействованы, значит всего подарено $0+1+2+\dots+N-1 = \frac{(N-1)N}{2}$ подарков и это $\vdots N$, т.к. все получили поровну, а следовательно $N-1 \vdots 2$, т.е. N — нечётн.

Ответ: при всех нечётн. N (кроме $N=1$, т.к. $N>1$)

Пример.:

Будем строить по индукции пример для $N=2K+1$, что все подарят разное кол-во под. и все получат по K.

База: $N=3$

(стрелочки — кто кому подарок)

Переход: $N \to N+2$

Док-во перехода: у нас есть пример на $N=2K+1$ мы хотим построить пример на $N+2=2K+3$.

Рассмотрим $2K+3$ человека, выделим из них $2K+1$, по предположению индукции они как-то дарят подарки между собой (так, что кажд. получил K). Рассмотрим двух оставшихся человек A и B, пусть $K+1$ из наших $2K+1$ подарят подарок A, а ост. K чел. подарят подарок B. A подарит подарки всем $2K+2$ людям, тогда каждый человек получил $K+1$ подарок, B подарил 0, люди из $2K+1$ подарили $1 \dots 2K+1$ и A подарил $2K+2$, все подарили разное кол-во, и получили по $K+1$ под. ч.т.д.

Значит мы доказали для всех нечётных N.

№5

Докажем:

$(n+1)^3 > n^3+13n-273$

$\cancel{n^3}+3n^2+3n+1 > \cancel{n^3}+13n-273$

$3n^2-10n+274>0$

ветви вверх $D<0$, значит верно для всех n

Для $n \geq 9$:

$n^3+13n-273 > (n-1)^3$

$\cancel{n^3}+13n-273 > \cancel{n^3}-3n^2+3n-1$

$3n^2+10n-272>0$

ветви вверх, в точке 9: $3\cdot 81+10\cdot 9-272>0$ $61>0$

а в точке 0: $-272<0$

значит ~~[illegible]~~ корни находятся раньше 9 =>

=> для $n \geq 9$ нер-ве верное

Значит для $n \geq 9$ $(n+1)^3 > n^3+13n-273 > (n-1)^3$, значит если $n \geq 9$ кубоватое, то $n^3+13n-273 = n^3$ (единственный куб в промежутке)

$13n = 273$

$n = 21$ и оно подходит.

Осталось проверить числа от 1 до 8

n=1 $1^3+13\cdot 1-273<0$ (если <0, то это точно не куб натурального числа)

n=2 $2^3+13\cdot 2-273 = 8+26-273<0$

n=3 $3^3+13\cdot 3-273 = 27+39-273<0$

n=4 $4^3+13\cdot 4-273 = 64+52-273<0$

n=5 $5^3+13\cdot 5-273 = 125+65-273 = 190-273<0$

n=6 $6^3+13\cdot 6-273 = 216+78-273 = 294-273 = 21 \neq x^3$

n=7 $7^3+13\cdot 7-273 = 343+91-273 = 434-273 = 161 \neq x^3$

n=8 $8^3+13\cdot 8-273 = 512+104-273 = 616-273 = 343 = 7^3$

Значит кубоватые числа только 8 и 21, их сумма 29

Ответ: 29